

**А.В. Перельмутер  
В.И. Сливкер**

# **РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ СООРУЖЕНИЙ И ВОЗМОЖНОСТЬ ИХ АНАЛИЗА**

**Издание четвертое, переработанное и дополненное**

**Издательство СКАД СОФТ  
Издательство Ассоциации строительных вузов  
Издательство ДМК Пресс  
Москва 2011**



УДК 624.012.03:681.3.06

ББК 38.2-5-05

П27

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. В.Н. Гордеев

д-р физ.-мат. наук, проф. Л.А. Розин

Расчетные модели сооружений и возможность их анализа /

А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. — 4-е изд., перераб. — М.: Издательство СКАД СОФТ, 2011. — 736 стр.

Книга посвящена анализу методов, используемых при создании современных программных систем для статического и динамического расчета несущих строительных конструкций, а также приемов использования этих систем. Наличие (а иногда и отсутствие) руководств, входящих в систему программной документации, чаще всего дает возможность «использовать» программную систему как черный ящик и в лучшем случае позволяет научиться нажимать необходимые кнопки, что бы вызвать к жизни ту или иную функцию программы. Вместе с тем опыт показывает, что любое руководство к самой совершенной программе бессмысленно, если пользователь не понимает основ тех методов, которые эти программы реализуют.

Особое внимание в книге уделяется роли выбора расчетной модели, ее обоснованности, а также внутренней и внешней согласованности с решаемой задачей. Приводятся многочисленные практические рекомендации, указывающие типичные и нетипичные проблемы и ошибки, описываются различного рода ловушки, подстерегающие инженера-расчетчика. Многие поучительные примеры связаны с практическим опытом авторов, как инженеров-проектировщиков. По сравнению с предыдущими изданиями материал расширен и дополнен.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, как пользователей программной продукции, так и разработчиков программных средств. Она может быть использована студентами, аспирантами и преподавателями дисциплин прочностного курса (строительная механика, теория упругости) или курса САПР.

**ISBN 978-5-903683-12-3** © Издательство СКАД СОФТ, 2011

**ISBN 978-5-930938-06-7** © Издательство АСВ, 2011

**ISBN 978-5-940747-10-9** © Издательство ДМК Пресс, 2011

© Коллектив авторов, 2011

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЯ IX

Предисловие к четвертому изданию .....	X
Предисловие к третьему изданию .....	XII
Предисловие ко второму изданию .....	XV
Предисловие к первому изданию .....	XIX

## 1. ОБЪЕКТЫ РАСЧЕТА И ПРОБЛЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ 1

1.1. Многомерность и многофункциональность .....	1
1.2. Основные факторы, учитываемые при построении расчетной модели .....	3
1.3. Неопределенность в системе знаний об объекте .....	7
1.4. Эксперимент и практический опыт .....	9
1.5. Общие проблемы моделирования .....	13
1.6. Мажорантные и минорантные модели .....	16
1.7. Апостериорный анализ расчетной схемы .....	18

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ 21

2.1. Определяющие параметры и число степеней свободы .....	22
2.2. Модель нагружения – составная часть расчетной схемы .....	27
2.3. Контроль расчетной схемы и средства ее описания .....	31
2.4. Параметризация расчетной модели .....	44
2.5. Некоторые приемы .....	52
2.6. Моносвязи и полисвязи в расчетной схеме .....	62
2.7. Абсолютно жесткие тела как типы конечных элементов...	67
2.7.1. Одномерные абсолютно жесткие тела .....	68
2.7.2. Двумерные абсолютно жесткие тела .....	69
2.7.3. Трехмерные абсолютно жесткие тела.....	70
2.7.4. Примеры использования абсолютно жестких тел .....	73
2.8. О нелинейных расчетах .....	75
2.9. Одновременное использование нескольких схем .....	78
2.10. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных .....	85

<b>3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ</b>	<b>89</b>
3.1. Разрешающие уравнения .....	89
3.1.1. Метод перемещений .....	92
3.1.2. Метод сил.....	96
3.1.3. Дуализм метода перемещений и метода сил. Проекторы .....	99
3.2. Статико-кинематический анализ .....	104
3.2.1. Замечание о дислокациях .....	109
3.3. Снова о полисвязях. Вариационная формулировка .....	111
3.4. Нуль элементы .....	121
3.5. Геометрическая нелинейность. Устойчивость .....	128
3.5.1. Четыре этажа геометрически нелинейных постановок задач .....	129
3.5.2. Геометрическая нелинейность для стержней ферменного типа .....	131
3.5.3. Геометрически нелинейные уравнения в вариациях.	138
3.6. Конструктивная нелинейность – системы с односторонними связями .....	142
3.7. Вантовые элементы в расчетной модели .....	150
3.7.1. Координатные оси и интегральные параметры нагружения вант.....	154
3.7.2. Задание преднапряжения .....	156
3.7.3. О линеаризованных моделях вантовых конструкций .	158
3.7.4. Линеаризация вантовых элементов расчетной схемы.	160
3.7.5. Линеаризация сжато-изогнутых элементов расчетной схемы .....	165
3.8. Расчет на динамическую нагрузку .....	167
3.9. Континуальные системы в конечноэлементном описании.	173
3.9.1. Замечание о терминологии .....	175
3.9.2. замечание о способах изображения расчетных схем	176
 <b>4. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ</b>	 <b>177</b>
4.1. Замечания о дискретизации задачи .....	177
4.2. Основные понятия метода конечных элементов.....	178
4.3. Моделирование стержневых систем .....	184
4.4. Моделирование конечноэлементной сеткой .....	193
4.5. О практической сходимости .....	196
4.6. Проверка сходимости для некоторых моделей .....	199
4.7. Экстраполяция Ричардсона .....	202

4.8. Обход особых точек .....	207
4.9. Генерация конечноэлементной сетки .....	212
4.10. О применении гибридных конечных элементов .....	212
<b>5. ОШИБКИ И ЛОВУШКИ</b>	<b>223</b>
5.1. Фрагментация .....	223
5.2. Построение непрерывных полей напряжений в МКЭ .....	233
5.3. Ошибки и ловушки при стыковке элементов различной размерности .....	244
5.3.1. Стержни + плиты .....	245
5.3.2. Стержни + пластины .....	253
5.3.3. Стержни + объемные элементы .....	268
5.3.4. Плиты + пластины (сопряжение оболочечных элементов) .....	268
5.3.5. Использование специальных методов стыковки элементов ..	275
5.4. Об одном парадоксе при сочетании стержней Бернулли и стержней Тимшенко в одной модели .....	277
5.5. Аппроксимация геометрической формы и закреплений ..	287
5.6. Погрешности вычислений и как с ними бороться .....	291
5.6.1. Замечания о применении суперэлементов .....	305
5.6.2. Замечания о тестировании программного комплекса	307
5.7. Шаговая процедура .....	309
<b>6 АНАЛИЗ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ</b>	<b>317</b>
6.1. Проблема анализа .....	317
6.2. Какие результаты расчета нужны .....	318
6.3. Общая апробация .....	326
6.4. Характерное перемещение .....	332
6.5. Вычисление энергии деформации .....	336
6.6. Последующая обработка результатов .....	338
<b>7 НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПАРАМЕТРОВ</b>	<b>341</b>
7.1. Основные источники неопределенности .....	341
7.2. Методы расчета чувствительности .....	351
7.3. Чувствительность собственных колебаний .....	355
7.4. Оценка дополнительных усилий при изменении	

жесткостей .....	361
7.5. Теоретические оценки для случая неопределенных жесткостей .....	366
7.6. Использование методов планирования экспериментов ....	370
7.7. Предельное равновесие при неопределенном нагружении..	382
<b>8 АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ</b>	<b>385</b>
8.1. Шарнирно стержневые системы .....	386
8.2. Монтаж .....	389
8.2.1 Генетическая нелинейность .....	396
8.3. Преднапряжение .....	407
8.4. Конструкции с гидравлическими домкратами .....	411
8.4.1. Жидкостный конечный элемент .....	417
8.5. Модель «здание – основание».....	418
8.5.1. Учет распределительных способностей грунта .....	418
8.5.2. Модель основания с двумя коэффициентами постели .....	421
8.5.3. Упругие характеристики основания .....	428
8.6. О назначении характеристик двухпараметрового упругого основания .....	431
8.6.1. Модель основания "ССС" .....	436
8.7. Анализ модели «здание – основание» .....	445
8.7.1. Итерационный расчет .....	445
8.7.2. Расчетная модель фундаментной плиты .....	448
8.7.3. Об использовании конечноэлементной модели основания .....	451
8.8. Бистержевая модель тонкостенного стержня открытого профиля .....	455
8.8.1. Построение бистержевой модели .....	456
8.8.2. Бистержевая модель тонкостенного стержня, усиленного поперечными планками .....	463
8.8.3. Усиление тонкостенного стержня поперечной диафрагмой .....	471
8.8.4. Математическая трактовка бистержевой модели и ее дискретной схемы .....	472
8.9. Расчетные сочетания нагрузок .....	475
<b>9. ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ</b>	<b>487</b>
9.1. Проверка устойчивости равновесия .....	487

9.2. Классическая задача устойчивости равновесия .....	494
9.3. Свободные длины сжатых стержней .....	500
9.4. Анализ роли отдельных подсистем.....	508
9.5. О влиянии дополнительных связей на устойчивость системы .....	518
9.5.1. Об одной ошибке загадочного характера в программных продуктах при расчете механических систем на устойчивость .....	519
9.6. Об одном парадоксе в задаче на устойчивость стержня ...	536
9.7. Учет несовершенств реальной конструкции .....	543
9.8. Замечание по учету $P$ - $\Delta$ эффектов.....	549

## 10. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

**551**

10.1. Расчетные модели в задачах динамики .....	551
10.1.1. Динамические степени свободы .....	559
10.1.2. Динамическая конденсация – процедура Гайяна... ..	561
10.2. Интегрирование уравнений движения .....	565
10.3. Вынужденные колебания при гармоническом воздействии ..	570
10.3.1. Модель Гордеевой.....	580
10.4. Декремент колебаний .....	584
10.4.1. Конечные элементы из упругого материала .....	588
10.4.2. Элемент сухого трения .....	589
10.4.3. Элемент вязкого трения .....	589
10.4.4. Элемент нелинейно-вязкого трения .....	590
10.4.5. Демпфирование излучением .....	591
10.5. Три резонансные кривые .....	593
10.6. Расчет сооружений на сейсмические воздействия .....	596
10.6.1. Спектральный метод расчета .....	597
10.6.2. Специальные проблемы спектральной методики ..	605
10.6.3. Акселерограммы. Интегрирование уравнений движения .....	610
10.7. Действие импульсных и ударных нагрузок. ....	617
10.8. Колебания под воздействием пульсаций ветрового потока ..	621
10.8.1. Моделирование ветрового воздействия .....	621
10.8.2. Динамическое действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки .....	623
10.8.3. Представление пульсационной составляющей ветровой нагрузки .....	625
10.8.4. Спектр пульсаций скорости ветра .....	628
10.8.5. Динамическая составляющая расчетного фактора ..	628
10.8.6. Проблемы численной реализации .....	630

<b>11. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ</b>	<b>633</b>
11.1. Дублирование расчетов как мера защиты от ошибок .....	633
11.1.1. Что такое независимо разработанные программные комплексы .....	634
11.1.2. Использование разных расчетных схем .....	635
11.1.3. Как проводится сопоставительный анализ .....	637
11.1.4. О возможном нормировании правил определения НДС .....	638
11.2. Расчет на прогрессирующее обрушение .....	640
11.2.1. Прогессирующее обрушение как научно техническая проблема .....	640
11.2.2. Исходные события .....	643
11.2.3. О динамических эффектах .....	644
11.2.4. Оценка поведения элементов .....	645
11.3. Схемная характеристика живучести .....	647
11.4. О расчетном сопровождении строительного процесса ....	654
<b>12. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ</b>	<b>659</b>
12.1. Наши рекомендации потенциальным пользователям .....	659
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	<b>669</b>
А Жордановы исключения и их роль в строительной механике .....	669
А.1 Общее описание .....	670
А.2 Жордановы исключения с матрицей жесткости системы .....	673
А.3 Матрица жесткости конечного элемента при нежестком присоединении элемента к узлам .....	677
А.4 Двойное жорданово исключение .....	682
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>685</b>
<b>ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ</b>	<b>703</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</b>	<b>707</b>

# ПРЕДИСЛОВИЯ

*Нашим сыновьям — Мише, Андрею, Саше — отцовского уровня интереса к механике не унаследовавших, зато преуспевших в программировании, и в этом отношении своих родителей превзошедших.*

А.П., В.С.

*Настали тяжелые времена, прогневались боги, дети больше не слушаются родителей и каждый стремится написать книгу.*

Древневавилонская запись

## Предисловие к четвертому изданию

Предыдущее третье издание книги, выпущенное в 2007 году издательством «ДМК Пресс», полностью разошлось, что и вызвало необходимость в выпуске настоящего, четвертого издания. Неизменная востребованность книги, впервые опубликованной в 2001 году, и ее высокая оценка в форме награждения медалью Российской академии архитектуры и строительных наук требуют от авторов постоянной работы по уточнению текста и пополнению его новыми данными. Большую роль в этом процессе играют наши читатели, общение с которыми, как мы надеемся, является обоюдо полезным.

В этом издании небольшое количество дополнений внесено в различные части книги, которая полностью сохранила свою структуру и ориентацию на инженеров, стремящихся к сознательному принятию решений и к ответственности за их использование. Что же касается содержания дополнений, то они, в основном, отражают накопленный опыт расчетного анализа современных сложных сооружений, построение расчетных моделей которых имеет свою специфику.

В предисловии еще к первому изданию мы отметили, что широкое внедрение компьютерных расчетов создало внешне картину относительного благополучия в рассматриваемой области инженерной деятельности. К этому следует добавить явную тенденцию к облегчению интерфейса, к оперированию все более обобщенными понятиями, являющимися «кирпичиками» расчетной модели (стена, перекрытие и т.п.) и зачастую полной автоматизации

перехода от «архитектурно-геометрического» описания этих объектов к собственно расчетной модели. Пользователю все чаще предлагают облегченные пути, сводящиеся к нажатию кнопок.

*Благородная задача избавления инженера от рутинной части расчетных процедур зачастую преобразуется в способ его избавления от необходимости думать.*

Эта тенденция представляется нам чрезвычайно опасной. Мы подтверждаем неоднократно заявляемую нами (явно или неявно) позицию — использование компьютерных расчетов требует не более низкой, а существенно более высокой квалификации.

В связи со сказанным остро встает проблема подготовки соответствующих специалистов. Высшая школа явно не справляется с ее решением, альтернативой пока что служат специально создаваемые учебные центры, работа которых патронируется той или иной фирмой-разработчиком и, естественно, ориентирована на вполне определенное программное обеспечение, его возможности и достоинства (а также, очевидно, и недостатки). Мы рассматриваем нашу книгу как находящуюся в ряду пособий, нацеленных на повышение квалификации инженеров-расчетчиков без жесткой привязки к конкретному.

А.Перельмутер, В.Сливкер                      декабрь 2010

## **Предисловие к третьему изданию**

Третье издание выходит с небольшими дополнениями, в которых мы постарались отразить накопленный опыт, а также учесть те замечания, которые поступили к авторам от заинтересованных читателей.

В некоторых из упомянутых замечаний содержались предложения о «приближении текста к уровню понимания рядового инженера», по сути предлагавшие превращение этой книги в собрание рецептов для тех пользователей программных средств, которые лихо научились нажимать кнопки, но не хотели бы принимать решения самостоятельно. Авторы не согласны на такое изменение содержания книги и стиля ее изложения. Мы являемся убежденными сторонниками той точки зрения, что никакой автомат и никакой авторитет не может отнять у инженера право (и обязанность!)

сознательного принятия решений и ответственности за их использование.

Мы уже имели возможность высказаться по этому поводу и остается лишь процитировать себя [Перельмутер, Сливкер, 2005]:

*«... ответственность за используемые результаты компьютерных программ лежит на пользователе. Даже для абсолютно безошибочной программы на нее нельзя возложить ответственность за достоверность задаваемой информации и, тем более, за принимаемые расчетные предпосылки. И это относится к наиболее сложной части автоматизированного проектирования – выполнению статических и динамических расчетов объекта. На этом фоне отсылка к авторитету СНИП, которая касается лишь заключительных проверочных процедур, не может служить основанием правильности принимаемых решений даже в том случае, когда детальный текстовый комментарий представлен расчетчику для просмотра и подтвержден его одобрительной подписью».*

Что касается содержания дополнений, то главные из них связаны с вопросами расчета на прогрессирующее разрушение и проблемой расчетного сопровождения процесса возведения ответственных объектов. Им посвящена дополнительная глава книги. Кроме того, ряд дополнений был вызван к жизни практикой общения с нашими читателями, которые подчас задавали вопросы, потребовавшие включения указанных дополнений. Типичным примером может служить форум сайта DWG.RU, на котором оживленно обсуждаются темы: «Моделирование модели – вычисление  $C_1$  и  $C_2$ » и «Защита от прогрессирующего обрушения». Анализ его протекания явно указал нам на необходимость внесения дополнительных пояснений в текст книги. Мы с благодарностью воспринимаем такого рода стимулирующее общение с нашими читателями и высоко ценим возможность быть полезными практикующим инженерам.

А. Перельмутер, В. Сливкер      сентябрь 2006

## Предисловие ко второму изданию

Едва опубликовав книгу, мы почувствовали потребность переработать ее. Хотелось привлечь дополнительный фактический материал, уточнить некоторые положения и формулировки. Кроме того, ряд откликов и замечаний наших коллег показал, что одни

вопросы можно было бы изложить лучше, а другие положения нуждаются в более детальной аргументации.

Несколько расширенная по сравнению с первым изданием, эта книга носит прикладной характер в том смысле, что она нацелена на решение задач, выдвигаемых практическими потребностями строительного проектирования с использованием современных средств автоматизации инженерного труда. Вместе с тем она была и остается в разряде изданий скорее аналитического, а не справочного характера, она не ориентирована на читателя, которому необходим фактографический материал или точные руководства к действию. Великий Гёте писал, что

*"...точно знают, только когда мало знают. Вместе со знанием растёт сомнение".*

В литературе по расчету строительных конструкций при описании используемых расчетных моделей и в рекомендациях по их назначению и использованию наблюдается заметный перекося в сторону чисто рецептурных подходов в ущерб аналитическим. В результате накапливается разрыв между эмпирическим и теоретическим знанием.

При написании этой книги и работе над ее вторым изданием авторы настойчиво прикладывали усилия к тому, чтобы в какой-то мере уменьшить этот разрыв, постоянно стремясь дистанцироваться от стиля поваренной книги. Конечно, полностью отказаться от обращения к рецептам не удастся хотя бы потому, что инженеру-расчетчику приходится считаться с указаниями официальных документов, а сами нормы, увы, построены по рецептурному принципу. Но ошибок и недоразумений в любой области интеллектуальной деятельности не избежать с помощью простых рецептов. По этому поводу Эндрю Коениг в книге с характерным названием "Ловушки и силки при программировании на языке С" писал<sup>1</sup>:

*«... если бы это было возможно, то мы могли бы исключить катастрофы на дорогах простой наклейкой на стеклах автомобилей надписей типа "Водитель – будь бдителен!". Люди обучаются наиболее эффективно посредством опыта – своего или чьего либо. А уже само понимание возможности ошибочного решения есть первый и верный шаг к тому, чтобы избежать этой опасности.»*

---

<sup>1</sup> Andrew Koenig. C Traps and Pitfalls. //Addison-Wesley Publishing Company, 1989. 147 pp.

Первое издание предлагаемой читателю книги разошлось, не успев удовлетворить читательского спроса. Отклики читателей на это издание, принятые авторами с благодарностью и удовлетворением, оказались для нас вернейшим признаком того, что книга не оставила специалистов равнодушными к обсуждаемым проблемам и что труд, затраченный на подготовку книги, был оправдан. А большой разброс в квалификации и опыте «откликантов» прибавил нам уверенности, что эта книга не напрасно сокращает объем свободного места на полке как новичка в расчетах конструкций, так и ветерана.

Не обошлось и без критики, и многие замечания читателей нами приняты. В настоящее издание в связи с принятыми замечаниями внесены необходимые исправления. Но не со всякой критикой, как и предупреждалось в предисловии к первому изданию книги, мы можем согласиться. Так, например, один из критически настроенных читателей, говоря о вопросе из предисловия к первому изданию (как не ошибиться при создании расчетной схемы и как понять результаты машинного расчета?), написал:

*“Я не берусь судить, возможен ли вообще положительный ответ на первую часть вопроса, т.к. человеку свойственно ошибаться, и поэтому всегда надо себя проверять. Что же касается второй части вопроса (как понять результаты счета), то, по моему мнению, здесь может быть только один ответ: что заказал, то и получил, так что понимай, как знаешь. А не знаешь — не заказывай. Это относится не только к пользователям, но и к разработчикам программных средств (и к ним — в первую очередь)”*.

Мы позволили себе привести эту цитату из частного письма потому, что столь высокомерная точка зрения на заказчика имеет право быть здесь представленной, но авторам с ней трудно согласиться. Мы убеждены, что человек может рассчитывать на помощь, даже если он ошибается. Собственно, анализ ошибок, допускаемых пользователями программных систем, в том числе и при интерпретации результатов, в значительной степени продиктовал содержание и первого издания и тех дополнений, которые мы внесли во второе издание.

Нет смысла перечислять здесь изменения и дополнения, внесенные во второе издание книги — они многочисленны. Иногда это небольшие, но существенные вставки в текст, иногда целые параграфы. Что касается исключений, то единственное, что нам показалось уместным изъять из первого издания, это английский вариант предисловия и оглавления. Сделано это потому, что

англоговорящая читательская аудитория имеет теперь возможность ознакомиться с полным текстом книги, так как одновременно со вторым изданием на русском языке издательством Springer Verlag готовится публикация полного перевода книги на английский в известной серии Foundations of Engineering Mechanics Series<sup>2</sup>.

После некоторых колебаний мы отказались от хотя бы частичного поименования авторитетных специалистов, вступивших с нами в переписку по обсуждаемой проблематике, поскольку любые читательские отклики оказались для авторов чувствительным катализатором, ускорившим работу над вторым изданием, вне зависимости от титулования наших корреспондентов. Мы чувствуем себя обязанными выразить всем эти лицам искреннюю признательность за проявленный интерес к нашей работе. Хотя от одного отступления от этой позиции мы все же не можем отказаться. Речь идет о незамедлительной и лестной для авторов реакции Я.Г. Пановко на нашу книгу<sup>3</sup>. Среди замечаний и рекомендаций, высказанных Яковом Гилелевичем, есть и рекомендация по изменению названия. Вот как, по мнению Я.Г. Пановко, стоило бы назвать эту книгу:

### **РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ СООРУЖЕНИЙ (идеи, принципы выбора, анализ, опасности и неудачи).**

Не правда ли, сразу чувствуется рука мастера! И все же, ради сохранения преемственности, мы оставили старое название, поскольку здесь представлена не новая книга, а всего лишь обновленная, пополненная и отредактированная, версия старой книги с уже узнаваемым, хотя и более сухим, названием.

И последнее. В книге немало ссылок на широко распространенные программные системы, большинство из которых носят коммерческий характер. Для удобства читателей приведем здесь список таких программ, снабдив наименование этих программ адресом соответствующего веб-сайта:

---

<sup>2</sup> К настоящему моменту этот перевод уже опубликован. Вот его выходные данные: Perelmuter A.V., Slivker V.I. Numerical Structural Analysis. Methods, Models and Pitfalls. //Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.

<sup>3</sup> В апреле 2002 года выдающийся механик и замечательный человек Яков Гилелевич Пановко скончался в возрасте 89 лет. На его книгах, посвященных самым различным разделам механики и всегда отличающихся неординарностью и отменным литературным вкусом, было воспитано несколько поколений инженеров и исследователей. К одному из этих поколений причисляют себя и авторы настоящей книги. Некролог, посвященный памяти Я.Г.Пановко, опубликован в журнале "Успехи механики", т.1, №2, 2002.

SCAD	<a href="http://www.scadgroup.com">www.scadgroup.com</a>
GTSTRUDL	<a href="http://www.gtstrudl.gatech.edu">www.gtstrudl.gatech.edu</a>
MicroFe	<a href="http://www.eurosoft.ru">www.eurosoft.ru</a>
Lira Windows	<a href="http://www.lira.com.ua">www.lira.com.ua</a>
ANSYS	<a href="http://www.ansys.com">www.ansys.com</a>
Robot Millennium	<a href="http://www.robobat.com">www.robobat.com</a>
Straus7	<a href="http://www.strand7.com">www.strand7.com</a>
NASTRAN	<a href="http://www.mscsoftware.com">www.mscsoftware.com</a>
ABAQUS	<a href="http://www.hks.com">www.hks.com</a>
STAAD	<a href="http://www.reiworld.com">www.reiworld.com</a>
COSMOS	<a href="http://www.cosmosm.com">www.cosmosm.com</a>
LS-DYNA	<a href="http://www.ls-dyna.com">www.ls-dyna.com</a>
LUSAS	<a href="http://www.lusas.com">www.lusas.com</a>
DIANA	<a href="http://www.diana.nl">www.diana.nl</a>
RM2000	<a href="http://www.tdv.at">www.tdv.at</a>
ADINA	<a href="http://www.adina.com">www.adina.com</a>

В подавляющем большинстве случаев обращение к веб-сайту позволит выяснить необходимые подробности.

А.Перельмутер, В.Сливкер      ноябрь 2002

## Предисловие к первому изданию

Тридцать лет назад было сказано [Феодосьев, 1975]:

*"Для инженера искусство выбора расчетной схемы является очень важным. Этому искусству нигде специально не учат. В программах высших технических учебных заведений и, тем более, в университетских программах, нет таких курсов, таких дисциплин, где бы этот вопрос разбирался концентрировано и в должной мере".*

С тех пор мало что изменилось по существу, хотя широкое внедрение компьютерных расчетов резко изменило понятие о размерах доступных для решения задач и, по крайней мере внешне, создало картину относительного благополучия в части расчетных обоснований принимаемых решений. Обнаружилась явно выраженная тенденция ко все большему усложнению используемых расчетных схем и увеличению их размерности. Но является ли использование усложненных и детализированных расчетных моделей благом? Есть ли другие пути получения качественных результатов?

Как не ошибиться при создании расчетной схемы и как понять результаты машинного расчета? Ответы на эти и другие смежные вопросы составляют основу замысла этой книги.

После появления ЭВМ строительная механика в значительной степени *стала экспериментальной наукой*, но этот факт почему-то не осознан в должной мере<sup>4</sup>. Такие научные дисциплины как планирование эксперимента и статистическая обработка результатов эксперимента, методы и приемы, развитые в них, а самое главное — идеология этих дисциплин остались в стороне при стандартной подготовке инженера-расчетчика. Внешняя легкость постановки расчетного эксперимента приводит к тому, что инженеры-практики и даже некоторые исследователи ставят эти эксперименты бессистемно, а их результаты анализируются лишь частично, что не только обедняет такой подход, но и создает опасность пропуска ошибки. Укоренилось мнение, что "хорошая программа"<sup>5</sup> и проверенные на безошибочность исходные данные дают гарантию точного результата, но при этом упускается весьма существенная сторона проблемы — для какого варианта расчетной модели получен этот результат и какова степень его адекватности реальной конструкции, а не принятой расчетной модели. Оказалось, что получить ответ на эти вопросы весьма непросто и что во многих случаях для этого недостаточно развит теоретический аппарат, не говоря уже о наличии соответствующих функций используемого программного обеспечения.

Повсеместное распространение программных систем, основанных на использовании метода конечных элементов (МКЭ), позволяют сузить проблему, названную в заголовке книги до формулировки "расчетные конечно-элементные модели сооружений и возможность их анализа с помощью ЭВМ". Достаточно полное представление о круге анализируемых задач можно получить из приведенного ниже перечня этапов компьютерного расчета и возникающих на этих этапах вопросов [MacLeod, 1995]. Основными этапами являются:

- создание модели;
- выбор программного обеспечения для реализации расчета;
- проверка модели;
- собственно расчет;
- верификация результатов.

---

<sup>4</sup> Здесь имеется в виду вычислительный эксперимент.

<sup>5</sup> Тот самый случай, когда все знают, что это такое, но каждый понимает это по своему

При создании модели можно, к примеру, поставить следующие вопросы:

- каковы истинные условия опирания — шарнирные или защемленные опоры;
- должны ли узлы воспринимать моменты или считаться шарнирными (или полужесткими);
- взаимодействует ли рама с другими конструкциями или является изолированной плоской системой;
- каковы истинные нагрузки системы (собственным весом, ветром, снегом и др.);
- каково влияние эффектов второго порядка (выпучивания стоек, изгибно-крутильной формы потери устойчивости и др.)?

При верификации результатов необходимо различать оценку обоснованности, связанную с анализом неопределенностей расчетной модели, и собственно верификацию, которая ориентирована на поиск ошибок в ней. Мы говорим об ошибках, когда задаваемые значения параметров неверны, если же нельзя сказать, что параметр неверен, но значение его может быть несколько иным, то речь идет о неопределенностях.

Оценка обоснованности должна привести к заключению — *"эта модель адекватна, она соответствует реальной конструкции"*. А в связи с верификацией уместно выполнить:

- проверку данных (огромное значение имеет графическое отображение!);
- проверку общего равновесия — сумма реакций равна сумме нагрузок;
- проверку локальных равновесий по подсистемам;
- проверку на соответствие видимой картины деформирования заданным условиям опирания;
- проверку имеющихся условий симметрии;
- оценку общей картины напряженно-деформированного состояния конструкции (НДС), сопоставление деформаций с распределением внутренних сил.

Обычная программная документация расчетно-вычислительных систем (если она существует!) содержит описание библиотеки конечных элементов, формальные указания по подготовке входных документов и расшифровке полученных результатов. За ее пределами остаются вопросы методики использования программы в условиях реального проектирования или выполнения исследовательского

анализа, способы создания расчетных моделей с использованием предоставляемых программой возможностей и методы интерпретации результатов.

Рассмотрению этих и других аналогичных вопросов посвящено последующее изложение. При этом в тех случаях, когда нам потребуются примеры программной реализации каких-нибудь положений, мы будем чаще всего обращаться к программно-вычислительному комплексу SCAD [Карпиловский и др., 1998], с помощью которого решены практически все примеры (редкие исключения оговорены в тексте) и который является достаточно типичной разработкой, пригодной для анализа современного подхода к рассматриваемым проблемам. Коллектив разработчиков этого комплекса с большим вниманием отнесся к идее написания этой книги, оказал авторам всяческую помощь и хотел бы ее видеть в качестве неформальной компоненты эксплуатационной документации.

Сама книга ориентирована на читателя, знакомого с обычным курсом строительной механики и имеющего хотя бы небольшой опыт выполнения расчетов с использованием ЭВМ. Этот читатель возможно уже успел понять, что расчеты реальных сооружений сложнее, чем те, которые ему приходилось делать при выполнении вузовских упражнений по заранее подготовленным для него расчетным схемам. Иными словами книга рассчитана на подготовленного читателя — читателя, который считает, что его профессиональная подготовка не завершилась с получением вузовского диплома, а нуждается в постоянном совершенствовании. В некотором смысле это учебник, но такой, что трудно назвать наименование учебной дисциплины, к которой его следует отнести. Кроме того, рассматриваемый предмет во многом является искусством, а единственным методом обучения искусству является указание мастера-учителя "*Делай, как я*", хотя ученик становится мастером именно тогда, когда он перестает делать как учитель. Поэтому к призывам авторов поступать именно так, а не иначе, следует относиться с творческим недоверием.

Говоря о потенциальном читателе, мы сознательно употребили глагол "ориентирована" взамен "предназначена", поскольку по нашему представлению читательская аудитория не ограничивается одними только пользователями расчетной программной продукции. Авторы надеются, что и разработчики найдут для себя на страницах этой книги полезные рекомендации и советы. Вообще, разделение армии профессионалов расчетчиков на *разработчиков* и

*пользователей* достаточно условно и не соответствует ранжированию инженеров, скажем, на генералов и сержантов, это скорее взаимодействующие рода войск вроде артиллерии и пехоты. Многие и даже большинство из разработчиков одновременно являются и пользователями, а само понятие пользователь не употребляется нами хоть в сколько-нибудь уничижительном смысле - да мы и сами пользователи!

Как пользователи (и для пользователей) на страницах этой книги мы неоднократно будем обращать внимание читателя на различного рода ловушки и сюрпризы, подстерегающие инженера, рискнувшего пуститься в плавание расчетной инженерии на только что приобретенной новенькой и еще пахнущей свежей краской яхте с интригующим названием СЛМПК<sup>6</sup>.

Как пользователи (и для пользователей) мы поделимся с читателем некоторым опытом (своим и своих коллег) прохождения казалось бы непроходимых водных преград на доступном для Вас суденышке, строители которого даже и не догадывались о такой прыткости своего детища. Иногда для преодоления возникающих трудностей достаточно воспользоваться “маленькими хитростями”, в иных случаях требуется серьезная предварительная проработка деталей.

Как пользователи (но для разработчиков) мы будем касаться обсуждения мореходных качеств кораблей и того такелажа, которым хотелось бы оснастить будущие океанские лайнеры (расчетные программные комплексы) или снабдить которыми можно и полезно, слегка подновив, уже построенные.

Полностью разделяем мнение Л.А. Розина, высказанное им в недавно изданной книге [Розин, 1998] в словах:

*"От расчетчика - пользователя программными комплексами, интересующегося напряженно-деформированным состоянием, не требуется детального знания всех математических, вычислительных и компьютерных проблем. Однако ему необходимо иметь представление о том, как математически формулируются задачи и что представляют собой численные методы их решения. Без этого трудно рационально выбрать расчетную схему и правильно оценить достоверность окончательных результатов".*

Именно поэтому как инженеры и для инженеров мы не посчитали себя вправе отмалчиваться и в вопросах математической постановки

<sup>6</sup> Вы уже догадались, что это всего лишь аббревиатура Самой Лучшей в Мире Программы по Расчету Конструкций.

расчетных инженерных проблем, а также обсуждения алгоритмов и численных методов решения этих проблем.

И еще один момент, который стоит отразить в предисловии. В книге немало специфической терминологии. В тех случаях, когда в учебной, научной и технической литературе (по крайней мере, русскоязычной) имеется прижившийся, общепринятый термин, мы старались не отступать от традиций вне зависимости от того, нравится нам этот термин или мы бы предпочли другое слово для обозначения того же понятия. В ситуациях, когда сосуществуют разные термины для обозначения одного и того же понятия (например, *плита* и *изгибаемая пластина*), мы считали себя вправе сделать выбор. Но нам пришлось вводить и целый ряд новых терминов, иногда заимствуя их из своих ранее опубликованных работ (*нуль-элемент*, *полубесконечный конечный элемент*, *моносвязи и полисвязи* и т.д.), а иногда подыскивая или конструируя специально для этой книги подходящие по нашему мнению новые термины (*псевдожесткость* и *псевдоподатливость*, *бистержневая модель* и т.д.). Делалось это не из стремления к словотворчеству, а из понимания необходимости пополнять и совершенствовать словарь той предметной области, к которой и относится содержание книги. Если такой словарь не вырабатывать, не стараться шлифовать определения понятий и обозначать их емко и кратко одним-двумя словами, то легко впасть в такую терминологическую анархию, когда даже два специалиста в одной узкой области знаний перестают понимать друг друга <sup>7</sup>.

Заранее принимаем упрек в том, что в этой книге нет обсуждения той или иной важной темы - "*нельзя объять необъятное*" (Козьма Прутков). Из всего того, чего здесь нет, отметим только одну деталь, осознанно нами опущенную. В мире насчитываются десятки (сотни?) расчетных программ. Как выбрать из этого множества назойливо рекламируемых продуктов именно то, что Вам нужно, на что стоит потратить свои деньги и время на детальное изучение, а что можно сразу отбросить? Так вот, мы не даем рекомендаций по приобретению какой-либо конкретно поименованной программы. Это не означает, что авторы не имеют своего мнения на этот счет, но рынок... Рынок слишком деликатная вещь, болезненно реагирующая

---

<sup>7</sup> Ну как тут не вспомнить известный анекдот о двух инопланетянах, приземлившись где-то между С.Петербургом и Москвой. Один из них говорит: "Кажется, мы на кладбище. Смотри-ка, вот надгробный камень. Землянин, лежащий под ним, жил 128 лет.". "Ого! А как его звали?". "Его звали           Его звали КилометровОтМосквы."

на грубые вмешательства даже экономистов, а мы инженеры. Если читатель разочарован этим, то все, чем мы можем его утешить, это посоветовать приобретать “хорошие программы”. Мы полагаем, что после прочтения книги читателю будет ясен смысл, вкладываемый в это понятие авторами.

Замысел этой книги неоднократно обсуждался с рядом крупных специалистов, среди которых особо заметную роль сыграли В.Н. Гордеев, А.А. Дыховичный, М.И. Казакевич, Э.З. Криксунов, С.Ф. Пичугин, Ю.Б. Шулькин. Всем этим лицам, авторы выражают глубокую благодарность.

Многие приемы анализа и подходы к решению некоторых проблем были наработаны при решении практических задач, связанных с расчетом и проектированием целого ряда весьма сложных и ответственных сооружений. Авторы с удовольствием вспоминают творческие контакты с такими профессионалами-расчетчиками как Э.С. Александровская, В.Б. Барский, Ю.С. Борисенко, К.П. Галасова, С.З. Динкевич, Л.Г. Дмитриев, М.Г. Дмитриев, А.Я. Дривинг, А.А. Дыховичный, М.Л. Гринберг, А.И. Конаков, В.М. Коробов, Н.Б. Краснопольская, В.П. Крыжановский, А.О. Кунцевич, М.А. Микитаренко, А.Г. Пинскер, А.Я. Прицкер, С.Ю. Фиалко, Е.Б. Фрайфельд и рядом других своих коллег. Их опыт и приемы работы в той или иной мере нашли свое отражение на страницах этой книги.

Особую благодарность авторы хотели бы высказать рецензентам книги профессорам В.Н. Гордееву и Л.А. Розину за многочисленные рекомендации при уточнении и улучшении текста книги, которые мы использовали при подготовке окончательной редакции. Мы также искренне признательны нашему коллеге Ф.М.Свойскому, взявшему на себя труд прочесть книгу в рукописи, и благодаря внимательности которого удалось исправить многие (к сожалению не все!) неточности. Наша признательность – Д.А. Маслову и И.Н. Лайкиной за помощь в подготовке иллюстративного материала. И наконец, мы не можем не отметить существенную поддержку со стороны компаний SCAD Group и ОАО Гипростроймост – Санкт-Петербург, оказанную на всех этапах нашей работы, без которой эта книга вряд ли увидела бы свет.

В свое время три автора оказали наиболее сильное влияние на формирование наших научных взглядов. Это в алфавитном порядке – Я.Г. Пановко, Л.А. Розин и В.И. Феодосьев. Мы хотим воспользоваться представившимся случаем, чтобы высказать свое почтительное восхищение трудами этих авторов.

Отчетливо осознаем, что в ряде случаев наши высказывания субъективны, а отбор материала навеян личным опытом и личными профессиональными предпочтениями. Впрочем, любое из научных или технических положений, изложенных на страницах книги, авторы готовы защищать до тех пор, пока не ознакомятся с убедительным его опровержением.

Мы будем признательны любым читательским откликам, содержащим дискуссионные положения или прямую критику, а самое главное, указания на неосвещенные в книге проблемы расчета конструкций, с которыми инженерам-расчетчикам пришлось столкнуться в своей практической деятельности и обсуждение которых они предполагали увидеть, приобретая эту книгу. Проще всего с авторами можно связаться, воспользовавшись электронной почтой. Вот наши адреса:

**aperel@i.com.ua** и **slivker@VS3491.spb.edu**

# 1. ОБЪЕКТЫ РАСЧЕТА И ПРОБЛЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Серьезному развитию серьезных наук лучше всего способствует легкомыслие и некоторая издевка. Нельзя относиться всерьез к своей собственной персоне. Конечно, есть люди, которые считают, что все, что делается с серьезным видом,— разумно. Но они, как говорят англичане, не настолько умны, чтобы обезуметь. На самом деле, чем глубже проблема, тем вероятнее, что она будет решена каким-то комичным, парадоксальным способом, без звериной серьезности.*

Даниил Гранин. Зубр // Новый мир.— 1987.— №1.

## 1.1. Многомерность и многофункциональность

Современные здания и сооружения чаще всего бывают сложными конструктивными многоэлементными комплексами, создаваемыми для выполнения большого числа различных функций, и их жизненный цикл связан с возможностью реализации многих рабочих состояний. Специфика строительной деятельности такова, что ее конечный продукт (здание или сооружение) должен сочетать в себе три подчас противоречивых момента: функциональность, эстетичность и конструктивность.

С точки зрения расчетчика, наибольшее значение имеют конструктивные особенности объекта, с которыми связана проблема оценки его несущей способности, но сама по себе конструктивная функция не всегда предстает в рафинированной форме. Если в каркасном здании довольно просто указать на основные конструктивные элементы (хотя и здесь имеются определенные проблемы), то для сооружения другого типа это удастся сделать далеко не сразу и то — только после предварительного анализа нескольких конкурирующих гипотез. Более того, список несущих элементов здания может оказаться различным для разных режимов работы. Так, игнорирование роли "ненесущих" перегородок при расчетах, ориентированных на выявление предельного состояния и

конструирование силового каркаса здания, вполне правомерно, но отбрасывание их вклада при оценке малых колебаний конструкции может привести к заметной ошибке.

Многочисленность функций и возможных режимов работы современного сколь ни будь сложного сооружения таковы, что все это практически невозможно учесть в рамках одной расчетной модели.

Второй особенностью, на которую следовало бы обратить внимание, является многомерность расчетных моделей, которые используются в современной проектной практике. Десятки и сотни тысяч учитываемых степеней свободы давно перестали волновать воображение расчетчика, поскольку для доступных ему вычислительных средств это не является препятствием. Достаточно характерным (и рядовым по величине!) примером может служить расчетная схема здания, представленная на рис. 1.1 и насчитывающая 4416 узлов и 6632 конечных элемента, причем сетка конечных элементов в пределах каждой из стеновых панелей или плит перекрытия принята достаточно грубой.

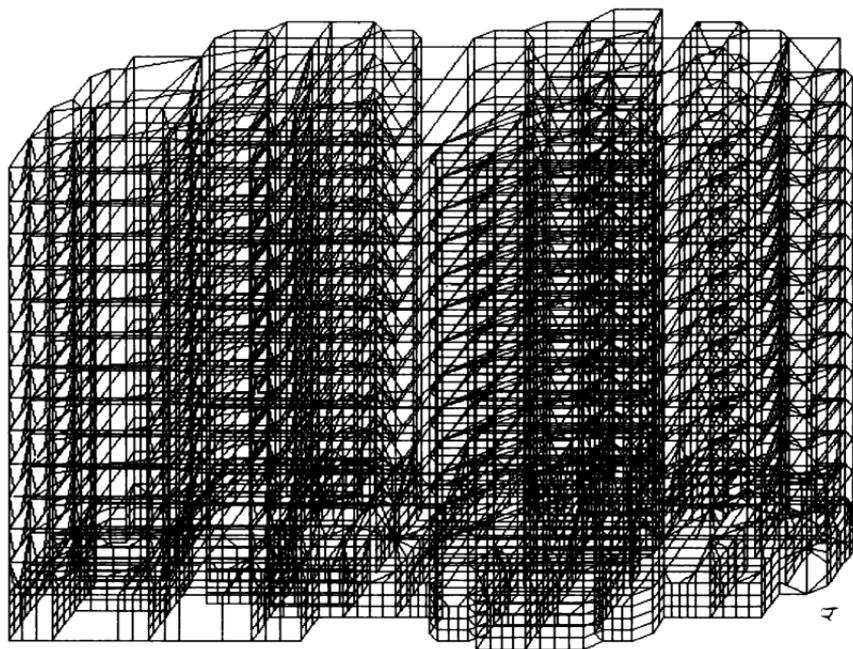


Рис. 1.1. Конечноэлементная модель здания

Наибольшая по размерности из известных нам задач, достойная книги рекордов Гиннеса, — это моделирование термо-гидро-газодинамически-прочностного поведения атомного реактора,

выполненное в 1998 году фирмой Adarco с помощью программного комплекса **STAR-CD**. Размерность задачи составила  $5,78 \times 10^6$  конечных элементов и сотни миллионов степеней свободы; решение на многопроцессорном комплексе из 64 рабочих станций IBM SP заняло 55 часов.

В еще большей степени возрастает размерность решаемых задач, когда сооружение рассматривается совместно с упругим основанием, на котором оно установлено. Задачи такого рода, сформулированные в начале 80-х годов как призыв к выполнению расчетов здания совместно с основанием как единой пространственной системы, обратились в практику 90-х.

## 1.2. Основные факторы, учитываемые при построении расчетной модели

Выделение из объекта его несущей части является первым шагом идеализации. Условность и неоднозначность этого шага связана с несколькими обстоятельствами:

- с различной ролью отдельных элементов сооружения при различных режимах нагружения — при одних нагружениях какие-то элементы выполняют только роль ограждающих, а при других они существенно влияют на игру сил;
- с изменением схемы передачи усилий при различной интенсивности нагружения: уже упоминалось о переменной роли перегородок, таким же образом могут вести себя и другие элементы;
- с изменениями, которые могут происходить при различных режимах функционирования объекта: многие из современных сооружений принадлежат к числу трансформируемых, и то, что было несущим остовом в одной конфигурации, может стать балластным грузом при другой конфигурации (если учесть стадии изготовления, перевозки и монтажа, то изменение функций отдельных частей сооружения станет скорее правилом, чем исключением).

После того, как выбрана та часть объекта, которая будет фигурировать в расчете, начинается идеализация ее геометрического образа — *геометрическое моделирование*. Эта операция может выполняться сверху вниз, когда в основу положен набор некоторых геометрических примитивов (прямоугольные и круглые пластины,

параллелепипеда, оболочки в виде конуса, цилиндра или сферы и т.п.), или же снизу вверх, когда в основу построения геометрической модели положены понятия точки, линии, поверхности и т.п. Моделирование с использованием операций обоих типов приводит, в конце концов, к созданию некоторой идеализированной геометрической модели конструкции, лишенной несущественных (по мнению расчетчика) деталей, например, мелких объектов типа фасок и скруглений.

В процессе геометрического моделирования решается вопрос о возможной идеализации объекта в смысле придания ему свойств регулярности или симметрии, хотя сам объект, возможно, и не является строго регулярным, а условия симметрии могут быть в небольшой степени нарушенными. Однако регулярность и симметрия являются такими мощными факторами сокращения объема анализа, что обычно на некоторые отступления не обращают внимание. Примерно таким же образом рассуждают при выявлении некоторых повторяющихся частей объекта, которые можно с той или иной степенью точности считать одинаковыми подсистемами. Естественно, что геометрическая тождественность есть лишь одно из необходимых условий для выводов такого рода.

Следующим этапом является идеализация материала конструкции, вернее набора его физико-механических параметров. Чаще всего материал наделяется свойствами идеальной упругости, или идеальной пластичности. Значения параметров, характеризующие свойства материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести и др.) принимаются по справочным значениям и предполагаются одинаковыми в пределах достаточно больших частей сооружения (или по всему сооружению), и соответствие их реальных значений принятым анализируется весьма редко. Эта традиция проистекает из классического подхода к расчету, где давно выяснено, что для таких, например, материалов как конструкционная сталь изменчивость физико-механических свойств невелика и мало сказывается на результатах расчета. Но, к сожалению, выводы этого типа используются и далеко за пределами своей обоснованности. Достаточно сказать, что идеализированными и одинаковыми по пространству свойствами нередко наделяются грунты основания, для которых предположение о малой изменчивости параметров не слишком оправдано, а зачастую — просто не согласуется с результатами инженерно-геологических изысканий. Другим типичным примером является наделение системы неким осредненным значением логарифмического декремента колебаний или других аналогичных мер диссипации, в то время когда такие

параметры могут меняться в пределах сооружения в десятки и сотни раз.

В процессе идеализации материала иногда принимается решение о выполнении расчета «с учетом физической нелинейности», но оно очень редко делает такой расчет убедительным. Дело в том, что, хотя «физическая нелинейность», по замыслу, должна моделировать пластическую работу, чаще всего (имеются и исключения) все сводится к нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями, одинаковой при нагружении и разгрузке, т.е. для упругого, а не для пластического материала. Необходима твердая уверенность в том, что нагружение будет активным, и никакие разгрузки происходить не будут, а для этого недостаточно предположить, что будут только возрастать все внешние силы (мы уже не говорим, что и такое предположение далеко от реальности). Таким образом, роль указанной идеализации в практическом расчете оказывается сомнительной, хотя ее использование в процессе исследовательского анализа может и быть полезным.

Наконец, в понятие идеализации материала иногда включается идеализация конструктивного решения. Так, например, часто расположенные ребра подкрепления пластин и оболочек «размазываются», но при этом материалу сглаженной системы приписывается свойство анизотропии (так называемая «конструктивная анизотропия»).

Достаточно серьезной процедурой является *идеализация нагрузок*, действующих на конструкцию в различных режимах работы. Вообще, нагрузки являются одной из наименее изученных компонентов системы, они имеют большую изменчивость во времени и пространстве, и те расчетные модели, которыми оперирует проектная практика, достаточно условны. Некоторые из моделей нагружения, которые традиционно используются при составлении расчетных моделей (равномерно распределенная нагрузка, сосредоточенная сила, импульсивное воздействие, гармоническая осцилляция) являются сильными физическими абстракциями, о чем надо хорошо помнить при анализе результатов расчета. Особенно много ошибок в процессе идеализации нагрузок совершается в части описания их поведения во времени, что приводит к недостоверной картине динамического поведения системы. Именно в динамике наиболее ярко проявляется обратная связь между нагрузкой и сооружением, когда его поведение меняет сам характер динамически приложенных нагрузок (флаттер, галопирование, взаимовлияние различных форм колебаний и др.).

Понятие нагрузки является удобным способом описания

взаимодействия конструкции с окружающей средой, но это — не единственная форма такого взаимодействия. Часто необходимо описать не силовое, а кинематическое взаимодействие, когда некоторые, внешние по отношению к рассчитываемой системе устройства стесняют перемещения или повороты отдельных точек или навязывают ей свои перемещения. Такие условия, называемые связями, почти всегда присутствуют в расчетной модели. Заметим попутно, что заданное перемещение какой либо точки всегда реализуется в виде смещения связи, а обычная связь-опора является частным случаем такого кинематического воздействия, когда упомянутое заданное перемещение имеет нулевое значение. Конечно, бесконечно жесткая связь, абсолютно точно навязывающая системе определенное (возможно, нулевое) значение перемещения является идеализацией; в действительности взаимодействие с окружающей средой реализуется через некоторые устройства, имеющие, возможно, очень большую, но не бесконечно большую жесткость.

Вообще, следовало бы говорить не столько о *нагрузках*, сколько о *воздействиях* на сооружение. Если попытаться их классифицировать, то в первом приближении воздействия можно разделить на внешние и внутренние — с одной стороны, а с другой стороны — на силовые и кинематические, что и отражено в приводимой ниже таблице 1.1.

Таблица 1.1.

	Силовые воздействия	Кинематические воздействия
Внешние воздействия	Нагрузки	Заданные перемещения опорных узлов
Внутренние Воздействия	Контролируемое предварительное напряжение	Дислокации, температурные перемещения

Но и эта классификация — условна и неполна, так как не отражает таких, например, специфических условий взаимодействия с окружающей средой как коррозия, химическое взаимодействие, выкрашивание, изменение схемы сооружения в результате разрывов связей (в том числе и по злому умыслу) и т.п.

*Идеализация связей* распространяется и на описание законов взаимодействия отдельных элементов системы друг с другом. Принимаемые чаще всего условия полного совпадения перемещений или взаимных поворотов в точках соединения (абсолютно жесткая связь), равно как и их альтернатива, т.е. отсутствие какого бы то ни было взаимодействия по рассматриваемым видам перемещений (шарнир, ползунок), конечно, являются достаточно сильной

идеализацией реальной картины взаимодействия.

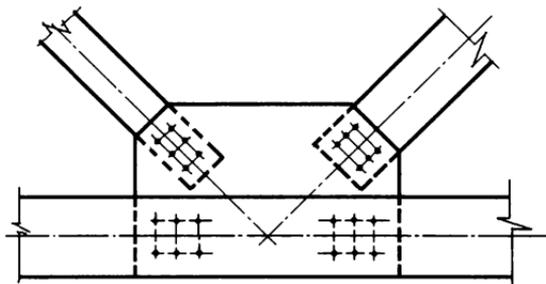


Рис. 1.2. Узел фермы

При этом чаще всего исходят не из кинематических условий сопряжения, а из гипотез, связанных с силовыми аспектами взаимодействия. Так, глядя на конструкцию узла некоторой фермы (рис. 1.2), трудно принять решение о полной свободе взаимных углов поворота концевых сечений стержней, сходящихся в узле. В то же время, приводящая к такому же выводу гипотеза о малой роли изгибающих моментов при чисто узловых нагружениях интуитивно воспринимается как вполне разумная.

Двойственность силового и кинематического описания условий связи, сводящаяся к формуле

*«невозможно такое-то взаимное перемещение»*  $\equiv$   
*«воспринимается такая-то сила»*

или к обратной формуле

*«допускается такое-то взаимное перемещение»*  $\equiv$  *«не воспринимается такая-то сила»*,

сильно облегчает анализ.

### 1.3. Неопределенность в системе знаний об объекте

Идеализация расчетной модели и невозможность сделать ее абсолютно адекватной реальной конструкции создают ситуацию некоторой неопределенности, и именно в условиях такой неопределенности приходится принимать проектные решения.

Неопределенность порождается как недоступностью всей необходимой информации. (например, нам принципиально неизвестны все возможные в будущем режимы работы конструкции),

так и ее неполнотой (вряд ли можно себе представить, например, что мы можем точно узнать физико-механические свойства в любой точке конструкции). Недоступность некоторых видов информации и ее неполнота являются принципиальными моментами, они не могут быть до конца преодолены, и сколь бы подробно мы не изучали поставленную проблему, мы не можем никогда сказать, что в расчетной модели учтено все.

Однако не только недоступность и неполнота данных порождают ситуацию неопределенности. Имеется еще и их неоднозначность, т.е. возможность различных трактовок одних и тех же факторов, а это требует оценки имеющихся альтернатив. Известны классические подходы к неопределенности, которые сводятся к следующим вариантам принятия решений:

- использование теории вероятностей, когда в основе принимаемого решения находится объективный предыдущий опыт;
- использование экспертных оценок, т.е. принятие решений на основе субъективного опыта эксперта (коллектива экспертов);
- минимаксная оценка, когда принимается наилучшее решение из числа достижимых, в предположении возможного наихудшего варианта развития событий, т.е. решение принимается по возможному результату.

Все эти варианты применяются совместно или порознь и направлены на оценку правдоподобности расчетной модели. Имеются и другие факторы, определяющие приблизительность расчетной модели и приводящие к возникновению ошибок, искажений и противоречий.

Это, во-первых, ошибки расчетного моделирования (ошибки аппроксимации), возникающие либо за счет приблизительности наших знаний, либо за счет их намеренного закругления. К такого рода «ошибкам» можно отнести использование упрощенных математических описаний — выбор полиномов относительно небольшой степени для описания поля перемещений в методе конечных элементов, усечение числа членов ряда в методе Галеркина и т.п. Сюда же относятся ошибки от несогласованности научных теорий и гипотез, использованных для описаний различных деталей одной и той же расчетной схемы. Типичным примером может служить несоответствие между моделированием нагрузок сосредоточенными силами и использованием пластинчатых конечных элементов, которые не способны уравновесить сосредоточенное воздействие конечными значениями поперечных сил. Естественно, что те мифические значения поперечной силы в элементе, которые

получаются в результате такого расчета, являются следствием указанной нестыковки моделей.

Во-вторых, здесь следует упомянуть приближенность почти всех задаваемых параметров модели, связанную с реально существующими допусками на размеры, вес и другие измеряемые величины. С практической точки зрения обе упомянутые неточности различаются мало, хотя в первом случае мы имеем дело с ограниченной точностью модельного представления (сознательной или бессознательной), а во втором — с ограниченной точностью «оригинала».

Последнее, о чем нужно упомянуть в рассматриваемой проблеме — это возможные неточности и недоопределенности, связанные с отсутствием четких границ у используемых понятий. Этой проблемой в настоящее время интенсивно занимается так называемая теория размытых (нечетких) множеств и нечеткой логики [Kasprzyk, 1986]. Имеются примеры использования этой теории в задачах расчета несущих конструкций при оценке их состояния, когда неточны описания имеющихся повреждений [Фу и др., 1986], и при оптимизации, когда сама целевая функция задана неточно [Почтман, Фридман, 1997].

## 1.4. Эксперимент и практический опыт

Несмотря на то, что в этой книге не рассматриваются вопросы экспериментального исследования работы конструкций, нельзя обойти вниманием эту проблему, в связи с тем, что эксперимент и практический опыт являются средствами проверки теоретического решения, а иногда — и средствами выработки соответствующих расчетных моделей. В натурном или модельном эксперименте обычно решаются следующие задачи:

- обнаружение новых явлений или новых фактов;
- проверка гипотез;
- физическое моделирование с целью установления качественных и количественных значений тех характеристик, которые невозможно определить теоретически.

Проводятся и другие эксперименты, необходимость которых определяется, например, установленной процедурой приемосдаточных испытаний ответственных, нетрадиционных и уникальных объектов, или испытаниями головных образцов серийной

продукции. Но, независимо от объявленной цели эксперимента, для перенесения его результатов с единичного явления на другие случаи (возможно, что только на аналогичные, а возможно — и на более далекие) требуется, чтобы в эксперименте решалась хотя бы одна из указанных выше задач.

Обнаружение в эксперименте новых явлений или новых фактов может иметь нелокальный характер лишь в том случае, когда экспериментальное исследование сопровождается тщательно проведенным теоретическим анализом. Именно в сопоставлении экспериментальных данных с теоретическими и можно говорить о новизне обнаруженных эффектов. Если же экспериментальное исследование проводится без руководящей теоретической идеи и служит только для подмены расчетного анализа, то от него нельзя ожидать сколь ни будь общих выводов. Эксперименты такого рода сводятся к пополнению копилки наблюдательного материала и создают почву для развития эмпиризма, хотя в каждом конкретном случае они могут и быть полезными. Характерным примером могут служить многочисленные усталостные испытания самых разнообразных конструкций. Многие годы они выполняются в исследовательских центрах, связанных с конструированием различного типа машин, но без некоторой фундаментальной теоретической идеи (точнее, предположений, претендовавших на эту роль, было слишком много [Феодосьев, 1975]), и до сих пор это не привело к созданию достаточно обоснованной теории усталостного разрушения.

Накапливаемый экспериментальный материал часто служит основой для проводимого впоследствии научного обобщения. Но далеко не всякое обобщение экспериментальных данных или практического опыта может рассматриваться как научное обобщение. В работе [Картвелишвили, Галактионов, 1976] в качестве примера, подтверждающего это, указывается на знаменитую в свое время формулу Сежурне для определения толщины свода каменного моста, не только отразившую коллективный технический опыт, но и учитывавшую личный опыт и психологию строителя по шкале: трусливо, робко, нормально, смело, дерзко. Естественно, что такого рода эмпирическая зависимость не имеет никакого отношения к развитию теории сооружений, и это прекрасно понимал сам Сежурне.

По-видимому, экспериментальные обоснования первоначальной идеализации отдельных элементов сложных конструктивных комплексов можно считать в основном завершенными, по крайней мере для обычных материалов и условий работы. Что же касается экспериментального исследования сложных систем, то здесь чаще

всего может идти речь о проверке гипотез, положенных в основу их расчета. И основная задача исследований такого рода состоит в подтверждении (или опровержении) применимости тех расчетных предпосылок, которые были использованы, если только проверяемые результаты надежно получены из этих предпосылок.

Заметим, что для установления границ применимости расчетной модели необходимо оценивать по окончательному результату любые упрощения и аппроксимации, а также отбрасывание малых величин, которые были объявлены малосущественными. Для сложной системы установить оценку такого рода удастся редко, и далеко не все гипотезы и упрощения поддаются экспериментальной проверке на натурном объекте или на модели. Но во многих случаях сложная схема допускает расчленение на подсхемы, для которых выполнение экспериментального исследования намного проще. Конечно, сама возможность указанного расчленения также должна обосновываться, в том числе и экспериментально. Если расчленение выполнено обоснованно, то ценность информации при экспериментальных исследованиях подсистемы может оказаться более высокой в силу следующих причин:

- подсистемы такого рода находят применение и в других объектах, что дает возможность конструировать их расчетные схемы, если только изучены связи между подсистемами;
- при испытаниях всей системы регистрируются интегральные параметры поведения конструкции, а результаты, касающиеся определенной подконструкции, могут оказаться недоступными.

Конечно, для большинства практических расчетов, которые выполняются в многочисленных проектных организациях, никаких экспериментальных обоснований никто не проводит, поскольку такие расчеты относятся к более или менее хорошо изученным конструктивным решениям. Здесь огромную роль играет традиционность подхода, зафиксированного в научно-технической, справочной, учебной и нормативной литературе. Наряду с силой такого подхода и удобством следования традиции, здесь имеется и определенная негативная черта — инженер постепенно отвыкает от привычки самостоятельно обосновывать применяемые расчетные схемы и целиком полагается на чужое мнение. При этом нетрудно совершить ошибку типа «чрезмерное расширение применения», перенося в принципе верные рекомендации далеко за область их теоретического и экспериментального обоснования (к сожалению, имеется чрезвычайно вредная традиция в книгах справочного и учебного характера эти области не указывать).

Типичным примером может служить подход норм проектирования сейсмостойких сооружений на основе спектральной теории, принятый в большинстве стран. Рекомендации таких норм, строго говоря, имеют отношение только к случаю абсолютно жесткого основания, все точки которого синхронно перемещаются в результате землетрясения. Но эта гипотеза в явном виде нигде не указана (о ней можно прочесть далеко не во всякой научной книге), что может привести к сомнительным результатам при анализе зданий и сооружений, протяженность которых сопоставима с длиной сейсмической волны в грунте.

К сожалению, в нормах проектирования, где отражается огромный коллективный опыт, как правило, не приводятся сведения о тех расчетных моделях, для которых соответствующие рекомендации норм обоснованы. Зачастую эти расчетные модели достаточно примитивны и весьма грубо отражают особенности напряженно-деформированного состояния элемента, рассматриваемого не изолированно, а в составе более сложной расчетной схемы. С точки зрения надежности конструкции, такая грубость парируется использованием осторожного подхода к назначению других параметров расчетной модели (расчетным нагрузкам, коэффициентам условий работы и др.). Но при этом возникает следующее противоречие: уточнение расчетной схемы может приводить к менее экономичным решениям, поскольку и для грубой и для уточненной моделей применяются одни и те же коэффициенты запаса. Получается, что, взяв на себя ответственность за составление уточненной модели, расчетчик должен иметь возможность корректировать рекомендации нормативного документа. К сожалению, такой подход в странах с жесткой регламентацией проектных процедур (например, в России) не принят, хотя в других странах, где законодательство об ответственности проектировщика является более развитым, и правовой статус норм является несколько иным, он в определенной мере допускается.

Раз уж мы коснулись нормативных документов, связанных с проектированием и расчетом сооружений, уместно спросить, приходило ли кому-либо в голову хотя бы экспертно прикинуть то количество человеко-лет, которое ежегодно тратится сотрудниками проектных организаций на выяснения и дискуссии по поводу тех или иных положений норм? Что заложено на основе чистой эмпирики, а что имеет под собой теоретический фундамент, и если имеет, то какой? Конечно, о многих вещах можно догадываться, но на многое не способны ответить даже специалисты узкого профиля.

## 1.5. Общие проблемы моделирования

Реакция сооружения на воздействия окружающей среды определяется рядом сложных физических процессов, адекватное описание которых на протяжении всего интервала действия нагрузок — от начала вплоть до разрушения конструкции — во многом проблематично. Для этого, как правило, недостаточно имеющихся в распоряжении расчетчика данных, а зачастую и не существует удовлетворительной и достаточно детальной теории явления (описания сложного нагружения в пластической области работы сооружения, описания особенностей усталостного разрушения, полного набора параметров, характеризующих поведение материала и т.п.). Все это вынуждает инженера заменять физическую реальность некоторой аппроксимирующей расчетной моделью или, как чаще говорят, расчетной схемой, обладающей идеализированными свойствами.

Общие проблемы моделирования неоднократно служили темой исследований, и их авторы выдвигали разнообразные правила построения расчетных моделей. Так, в свое время Н.М. Герсеванов [1923] выдвинул три принципа создания расчетных моделей сооружений:

- методы расчета должны исходить из форм разрушений и деформаций, подтвержденных опытом строительной практики;
- расчетная гипотеза, которая может быть достаточно условной, должна ставить конструкцию в менее благоприятные условия, чем те, в которых находится действительная конструкция;
- набор расчетных гипотез должен обеспечивать не только прочность и устойчивость, но и экономичность конструкции.

По мнению авторов книги, специально посвященной моделированию [Гольденблат и др., 1979], эти принципы, однако, не являются полными, и их следует дополнить следующим образом:

- целесообразно иметь не одну модель, а систему аппроксимирующих моделей работы сооружения, каждая из которых имеет свои границы применения;
- аппроксимирующая модель работы сооружения должна не только правильно и полно отражать работу реального объекта, но и быть настолько простой, чтобы расчет не становился чрезмерно громоздким<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Кому-то из великих принадлежат слова о том, что «любая теория имеет право на существование только тогда, когда она представляет собой разумный компромисс»

Ничуть не оспаривая эти положения, хотелось бы дополнить их некоторыми соображениями, которые необходимо учитывать как при создании, так и при использовании расчетных схем сооружений.

Так, особую роль играют общие модели конструкций и их элементов — стержень, пластина, оболочка и т.п., с помощью которых конструируются полные расчетные схемы одних сооружений и части расчетных схем других, более сложных объектов. Такие модели являются *базовыми*, они должны изучаться со всей доступной нам степенью строгости и служить в дальнейшем основой для рассмотрения других расчетных моделей. Тогда использование указанных моделей становится привлекательным в силу их изученности, а инженер во многом предугадывает результат анализа (по крайней мере его качественные особенности). Он «понимает» результаты расчета — в том смысле, как об этом пишет Я.Г.Пановко [1985], — когда отмечает, что между глаголами «знать» и «понимать» существует определенное смысловое различие, и что

*«... только понимание делает знание активным и творческим, а формальное знание — само по себе, без подлинного понимания — стоит недорого».*

Переход от конструкции к расчетной схеме, составленной из базовых моделей, чаще всего осуществляется на интуитивном уровне, и первым мотивом, положенным в основу такого перехода, служат геометрические соображения («похожесть» формы). Хотя и здесь имеются значительные возможности для маневра. Такие операции, как замена сквозной решетчатой конструкции некоторым континуальным объектом, форма которого похожа на конструкцию лишь в среднем, или уже упоминавшееся ранее «размазывание» ребер и других конструктивных особенностей применяются сплошь и рядом. Имеются и примеры обратного порядка, когда сплошное тело заменяется его стержневым аналогом (см., например, [Трофимов, Бегун, 1972]). Здесь уже используются некоторые знания об особенностях работы выбранных базовых моделей, а не только их геометрические образы. Так, если при использовании программного комплекса для плоского участка расчетной схемы выбрана модель чисто изгибаемой пластины, то нужно понимать, что не будут определены компоненты напряженного состояния, связанные с мембранной группой усилий. Если эти компоненты могут быть существенными (например, они могут вызвать потерю устойчивости),

---

*между математической простотой и физической достоверностью».*

то более подходящей будет более общая модель оболочечного элемента.

Вторым мотивом, играющим также фундаментальную роль в переходе к расчетной схеме, является выбор одной из стандартизированных идеализаций свойств материала (упругого, идеально пластического, сыпучего и т.п.). Эти свойства также представлены заранее изученными базовыми моделями [Белл, 1984], и о них не стоило бы говорить отдельно, если бы не следующее соображение: их выбор в большей мере нуждается в экспериментальном обосновании, чем выбор геометрического образа, но этот этап, как правило, опускается. Обычно расчетчик оперирует известными ему данными о физических моделях работы материала, полученными из экспериментов над абсолютно другими конструктивными элементами и образцами. В лучшем случае такие действия обосновываются тем, что результаты этих исследований могут быть использованы в конструируемой расчетной модели, исходя из некоторых представлений о возможном характере деформаций и об ожидаемом уровне напряжений при действии на систему нагрузок определенного уровня. Но чаще всего здесь основную роль играет традиция и реальные возможности расчетчика. Вот характерная цитата из российских норм проектирования стальных конструкций:

*“1.8. Расчет стальных конструкций следует, как правило, выполнять с учетом неупругих деформаций стали. Для статически неопределимых конструкций, методика расчета которых с учетом неупругих деформаций не разработана, расчетные усилия (изгибающие и крутящие моменты, продольные и поперечные силы) следует определять в предположении упругих деформаций стали по недеформированной схеме”.*

Аналогичные замечания имеются и в нормах других стран. Например в Еврокоде-3 сказано:

*“5.2.6.3 (3) However, as an alternative, rigid-plastic analysis with indirect allowance for second-order effects, as given in (4) below, may be adopted in the following cases:*

*(a) Frames one or two stories high in which either no plastic hinge locations occur in the column, or the column satisfies 5.2.7.*

*(b) Frames with fixed bases, in which the sway failure mode involves plastic hinge locations in the column at the fixed bases only ...”*

Практическая невозможность проведения детальных нелинейных расчетов применительно к любому объекту и любой расчетной схеме не означают полного отказа от выполнения такого типа расчетов. По-видимому, наиболее правильной стратегией является выполнение тщательного анализа некоторых типичных моделей на уровне сложности, доступном современной вычислительной технике, и сопоставление результатов такого расчета с упрощенным. Такого рода вычислительное экспериментирование позволяет определить (для некоторого класса задач), не является ли заметное расхождение между расчетом и экспериментом следствием неудовлетворительной идеализации.

Прикладные исследования, к числу которых принадлежит и анализ расчетных моделей, не всегда выполняются на «математическом уровне строгости», а зачастую основаны на правдоподобных рассуждениях [Блехман и др., 1983]. Во всех случаях необходимо помнить, что нестрогое решение и неверное решение — принципиально разные вещи.

## 1.6. Мажорантные и минорантные модели

Имея в виду все неопределенности и волевые решения, принимаемые при выборе расчетной схемы, расчетчик хотел бы иметь уверенность, что они приняты «в запас надежности», т.е. дают некоторую одностороннюю оценку верного, но неизвестного решения задачи. Доказать, что используемая расчетная модель всегда мажорирует точное решение, удается крайне редко. Чаще всего такого рода утверждения носят локальный характер, т.е. экстремальность присуща только какой-нибудь одной характеристике системы, но опасно, если она выдается за экстремальность «в целом». Некоторые свойства экстремальности присущи широкому классу систем, но и для них имеется определенная область применения, выход за которую должен контролироваться.

Типичным примером сказанного может служить широко применяемое правило завышения нагрузок для получения более надежных решений. Но имеются системы (они не являются линейно деформируемыми конструкциями), у которых экстремальное значение внутренних сил (или другого отклика) связано не с экстремальными параметрами нагружения, а с некоторыми промежуточными величинами. Подтверждающий пример показан на

рис. 1.3, а, где рассмотрена система, имеющая односторонние связи, установленные с зазорами.

При возрастании нагрузки реакция левой опоры (см. рис. 1.3, б) сперва равна нулю, затем, после замыкания левой связи начинает возрастать до тех пор, пока не замкнется правая связь, далее реакция начинает уменьшаться и снова обращается в нуль. Таким образом, максимальное значение достигается внутри возможного интервала изменения нагрузки от  $P_1$  до  $P_3$  (см. рис. 1.3, с).

Разумеется, что идеальной была бы ситуация, когда расчетчик имел бы возможность уверенно оперировать одновременно и мажорантной и минорантной системами. Однако сделать это, к сожалению, удастся крайне редко. Например, с позиций метода конечных элементов, конечномерная механическая система мажорирует исходную континуальную систему хотя бы по энергии. Во всяком случае, это справедливо при использовании совместных конечных элементов.

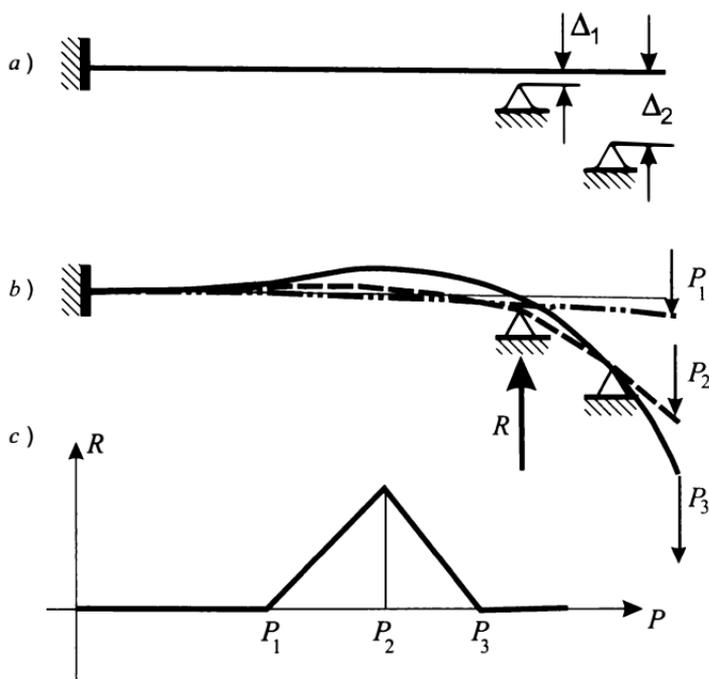


Рис. 1.3. Система с односторонними связями

Аналогичная оценка справедлива и для классических методов Ритца или Галеркина. В терминах механики это легко объясняется влиянием на поведение системы дополнительных связей. Но вот минорантную систему для аналогичных задач построить гораздо

труднее, и это удастся иногда сделать, воспользовавшись спецификой конкретной задачи. В качестве примера сошлемся на бистерженную модель тонкостенного стержня, рассмотренную в восьмой главе этой книги.

## 1.7. Апостериорный анализ расчетной схемы

Построение расчетной схемы предшествует решению задачи, а некоторые предпосылки, используемые при моделировании, опираются на ожидаемые свойства решения. Например, предположение о малости перемещений и, к особенностям, углов поворота служит основанием для решения задачи в геометрически линейной постановке, а предположение об отсутствии резких концентраторов напряжений лежит в основе применения примерно равномерной сетки конечных элементов. Поэтому необходим апостериорный анализ полученного решения и, при необходимости, корректировка расчетной схемы в соответствии с результатами такого анализа.

Особо внимательного отношения к конструированию расчетной модели требуют задачи оптимального проектирования. Это связано с тем, что в таких задачах заранее не известно соотношение параметров отдельных элементов расчетной модели, и решение может достигаться на значениях, далеко выходящих за пределы области, где справедливы принятые расчетные предпосылки.

Например, если в качестве оптимизируемого объекта рассматривается схема стержневой системы, и в число параметров оптимизации включены размеры поперечных сечений стержней, то не исключено, что оптимальное решение будет иметь такие высоты сечений, что станет сомнительной сама возможность рассмотрения ее элементов как стержней, описываемых уравнениями технической теории стержней Бернулли-Эйлера.

Приверженцы оптимального проектирования считают, что указанной опасности можно избежать, сформулировав ряд дополнительных «конструктивных» ограничений. Однако нет уверенности, что для конкретной проблемы все опасности такого рода будут предотвращены, поскольку иначе следует согласиться с тем, что исследователю заранее известно решение оптимизационной задачи (по крайней мере, область, в которой реализуется экстремум).

Выполнение анализа результатов расчета сильно облегчается при использовании наглядных и простых моделей, для которых накоплен

большой опыт применения, и ожидаемые результаты легко предсказываются. Их использование освящено многолетней традицией, а достоверность устанавливается почти что на интуитивном уровне, хотя именно такая интуитивная достоверность часто лежит в основе пренебрежения достаточно строгим апостериорным анализом.

Достаточно типичной является ситуация, когда, например, рассматривается задача об оптимальной по весу сжатой стойке. При этом используется привычное уравнение продольного изгиба в форме

$$EIv'' + Pv = 0, \quad (1.1)$$

справедливое, однако, лишь в случае постоянной продольной силы  $P$  и при определенных краевых условиях. Решение же получают в виде стержня переменного сечения, для которого при учете влияния собственного веса стержня на величину продольной силы, следовало бы использовать уравнение

$$(EIv'')' + (Pv)' = 0. \quad (1.2)$$

Конечно, неточности такого рода сравнительно легко обнаруживаются при апостериорном анализе полученного решения, но, к сожалению, такой анализ выполняется далеко не во всех случаях, особенно тогда, когда предпосылки, положенные в основу построения расчетной модели оптимизационной задачи, не указаны в явной форме.

Необходимо также заметить, что апостериорный анализ не должен приводить к обязательному перерасчету всей системы, если обнаружены некоторые особенности решения, не соответствующие принятым предпосылкам. В тех случаях, когда хорошо изучены свойства такого рода отклонений (например, локальность расположения на схеме), а также имеется соответствующий опыт конструктивной реализации необходимых изменений, можно спокойно использовать большинство полученных результатов, вводя лишь некоторые поправки к решению. Так, например, поступают, если обнаруживается, что напряжения краевого эффекта в оболочке далеко превысили предел текучести материала, но инженер понимает, что такого рода пики напряжений практически сглаживаются за счет пластической работы, а условия работы системы допускают локальную пластификацию.

Вообще, всегда следует помнить, что расчетная схема есть некоторая абстракция, созданная для определенных целей, и поэтому отношение к ней не должно превращаться в обожествление. Некоторое чувство юмора по отношению к расчетной схеме характеризует опытного и грамотного расчетчика. Этот же расчетчик

обычно использует (иногда не явно) не одну, а несколько, в некотором смысле близких расчетных схем и, если результаты анализа такого рода набора схем близки друг к другу, то уверенность в их правильности резко возрастает. В этом случае апостериорная проверка, по сути, анализирует устойчивость результата по отношению к вариациям расчетной модели. Если при таких вариациях обнаружены локальные несоответствия, и они убедительно объясняются особенностями применяемой схемы, то уверенное использование остальных результатов становится вполне оправданным. Сами упомянутые локальные зоны подлежат специальному анализу, быть может, с использованием других расчетных моделей.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ

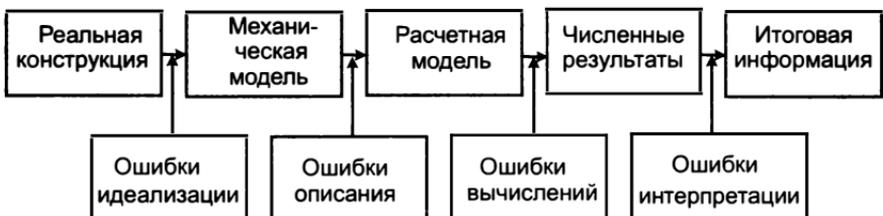
*Как видно, совершенство достигается не тогда, когда уже ничего нельзя прибавить, но когда уже ничего нельзя отнять.*

**Антуан де Сент-Экзюпери**

Привести внятные и однозначные рекомендации по выбору и построению расчетных схем сооружений различного назначения, обладающих разными конструктивными решениями, практически невозможно. Это, по-видимому, можно сделать, лишь ограничившись гораздо более узким классом объектов. Нужно помнить, что [Моррис, 1971]

*«любой набор правил для построения моделей может, в лучшем случае, иметь только ограниченную область применения, а в худшем случае — даже помешать проявлению необходимой интуиции».*

В силу сказанного, все, что приведено ниже, нужно рассматривать, во-первых, только как очень мягкие рекомендации и, во-вторых, заранее настроиться на отрывочный стиль изложения. Но прежде, чем переходить непосредственно к обещанным рекомендациям, имеет смысл обратить внимание на следующий аспект в построении расчетной схемы. Расчетная схема интересует инженера не сама по себе, а в качестве промежуточной модели для определения напряженно-деформированного состояния конструкции, для оценки инженером таких показателей конструкции как ее способность быть возведенной, надежно эксплуатируемой, экономичной и т.д.



**Рис. 2.1.** Погрешности на разных этапах расчета

В этой связи, в процессе получения результирующей информации расчет условно можно разбить на четыре этапа (рис. 2.1).

Первый этап — переход от реальной конструкции (**РК**) к механической или математической ее модели (**ММ**). Второй этап — переход от непрерывной механико-математической модели к дискретной модели или расчетной схеме (**РС**), приспособленной к возможностям конкретного инструмента вычислений. Третий этап — описание этой расчетной схемы доступными средствами избранного программного обеспечения, проведение самого расчета, получение численных результатов расчета (**ЧР**). И, наконец, последний этап связан с интерпретацией и анализом результатов расчета и получением итоговой информации (**ИИ**). Итак,

$$\text{РК} \Rightarrow \text{ММ} \Rightarrow \text{РС} \Rightarrow \text{ЧР} \Rightarrow \text{ИИ} .$$

На каждом из этих этапов роль или степень участия инженера-расчетчика и роль используемого программного обеспечения различны, равно как и различна их ответственность. Важно обратить внимание на то, что каждый из этих этапов содержит элементы моделирования, а значит — вносит и свою долю в накопление погрешностей при переходе от **РК** к **ИИ**.

## 2.1. Определяющие параметры и число степеней свободы

Не первый десяток лет наблюдается явно выраженная тенденция все большего усложнения используемых расчетных схем и увеличения их размерности. Разработчики современных программных средств твердо знают, что любые их достижения в области наращивания количественных возможностей программ быстро перекрываются пользователями. А пользователи считают большим достижением возможность проведения расчета целого здания, да еще совместно с основанием, как единой системы, и тяготеют ко все большей детализации и учету большого числа подробностей.

Расчетные задачи большой размерности совершенно естественно возникают при анализе трехмерных проблем механики сплошной среды в конечно-элементной постановке. При характерном числе шагов конечно-элементной сетки, равном  $m$ , количество неизвестных перемещений имеет порядок  $Cm^3$  (константа  $C$  зависит от задачи и от используемых типов конечных элементов), что быстро наращивает размер задачи до десятков тысяч неизвестных даже в случае областей,

не слишком отличающихся от канонических. Именно такие пространственные задачи порождают естественный спрос на программы большой мощности, и для удовлетворения подобного спроса разработчики непрерывно наращивают их возможности. Однако затем эти программные продукты используются и при решении задач расчета стержневых несущих каркасов, создавая соблазн для расчетчика применить, не слишком мудрствуя, подробную расчетную схему каркаса, включающую в себя десятки тысяч упругих элементов и узлов.

Казалось бы, что никакой разницы в двух описанных выше случаях нет. Однако, это не так. Задача механики сплошной среды для своего описания требует только аккуратного задания геометрии тела, а характеристики материала задаются несколькими параметрами. Для сложного стержневого каркаса массив исходных параметров, характеризующих задачу, весьма велик и разнороден, и большинство таких параметров, по сути, являются случайными величинами, для которых расчетчик задает лишь некоторую возможную реализацию значений. Поэтому с увеличением числа задаваемых параметров возрастает степень неопределенности расчетной модели в целом.

Откладывая вопрос об этой неопределенности для более детального анализа, заметим, что увеличение размерности задач приводит к резкому росту трудозатрат на подготовку исходной информации и на анализ результатов. В работе [Жеков, 1998] представлены усредненные данные о распределении трудозатрат при использовании известной системы ANSYS, специально предназначенной для решения больших задач (рис. 2.2). Эти данные хорошо иллюстрируют тот факт, что основная тяжесть проблемы сейчас переместилась в область работы с данными о расчетной схеме и для экономии труда требуется возможно более тщательное обоснование разумной степени сложности расчетных моделей.

Но дело даже не только в росте трудозатрат на подготовку данных и анализ результатов. Порой формальная разбивка конструкции в дискретной расчетной схеме на «лапшу» из тысяч конечных элементов приводит лишь к кажущейся эффективности и повышению точности в решении задачи, тогда как на самом деле точность может даже понизиться (и существенно!) в связи с неизбежным наращиванием погрешностей вычислений при увеличении по порядку количества неизвестных в дискретной схеме. Вряд ли разумно, скажем, разбивать стержни явно акцентированного стержневого каркаса здания на трехмерные конечные элементы. Возвращаясь к нашей армейской аналогии из предисловия, можно сказать, что артиллерийские залпы по мухе не приходили в голову разработчикам,

да и обыкновенная мухобойка многократно эффективнее и точнее просто по умолчанию.

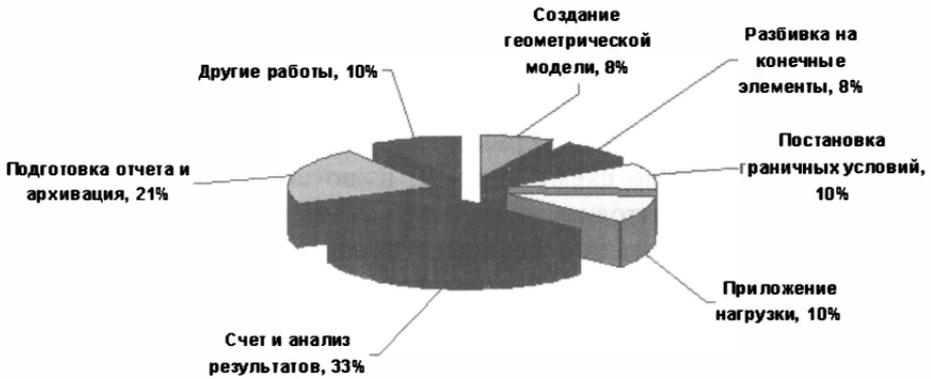


Рис. 2.2. Распределение затрат труда

Требования достаточной простоты модели по отношению к выбранной системе ее характеристик связаны со степенью ее адекватности — примерно так, как указано на условной диаграмме (рис. 2.3), заимствованной из работы [Блехман и др., 1983].

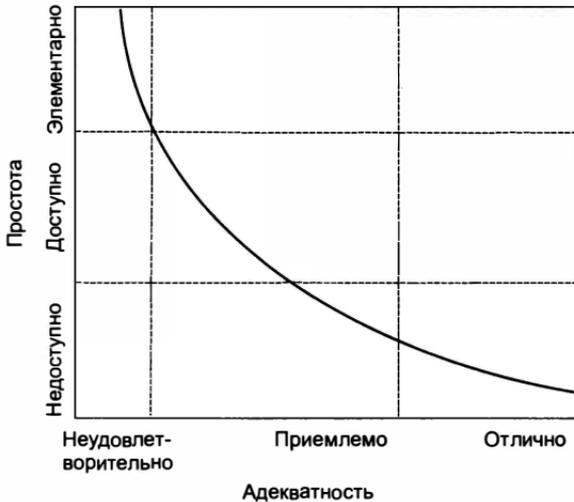


Рис. 2.3. К оценке простоты модели

Там же сказано, что

*«имеется шутливое, но далеко не бессмысленное определение ценности теории  $C$  как*

$$C = [(k/n) - 1],$$

*где  $k$  — число независимых величин, которые удается предсказать, а  $n$  — число исходных параметров».*

Построение расчетной схемы всегда есть определенный компромисс. Чтобы с помощью этой схемы можно было получить результаты, имеющие смысл и прикладное значение, она должна быть достаточно детальной и сложной. В то же время, она должна быть достаточно простой, чтобы можно было получить решение при ограничениях, налагаемых на результат такими факторами, как сроки, доступное программное обеспечение, квалификация исполнителей, возможности анализа и осмысления получаемых результатов. Кроме того, она должна быть адекватной по точности исходной непрерывной модели.

Подавляющее число достижений теории сооружений связано с тем, что удавалось выделить объекты с относительно небольшим числом определяющих параметров, взаимодействие отдельных частей которых было относительно слабым. Для таких систем можно сформулировать и решить задачу в такой постановке, когда отыскивался «полный ответ», т.е. детальная картина напряженно-деформированного состояния всех элементов системы. Такая постановка задачи настолько укоренилась в расчетной практике, что когда список относительно простых объектов исследования был исчерпан, она все равно продолжала считаться единственно возможной и без критического анализа переносилась на большие системы. При этом произносились оптимистические лозунги относительно безграничной мощи современной вычислительной техники и печатались многие тысячи страниц с результатами машинного расчета. Переход к графическому отображению результатов превратил тысячи страниц цифрпечати в сотни страниц с изображениями изополей, но практически не изменил целевую установку.

Вместе с тем, как утверждал один из основоположников кибернетики У. Эшби [1966], имеются определенные принципиальные ограничения по размеру задач, доступных для анализа, например, число  $10^{100}$ , которое равно произведению числа атомов во вселенной ( $10^{73}$ ) на количество микросекунд существования земной коры ( $10^{23}$ ), и

*«... возможность устранения этого ограничения менее вероятна, чем, например, возможность устранения ограничения, которое накладывается законом сохранения энергии... Я убежден, что в будущем теоретик систем должен стать экспертом по упрощению».*

Авторам остается только присоединиться к последнему призыву.

Экспертом по упрощению расчетных моделей может стать только высококвалифицированный специалист. А программная система разрабатывается в расчете на пользователей различной квалификации, что и вызывает некоторые из отмеченных выше противоречий. Нам представляется, что возможным выходом из положения была бы принятая во многих компьютерных играх самоидентификация уровня подготовки пользователя (например, «Beginner», «Intermediate», «Expert»), при этом каждому уровню становится доступным тот или иной набор возможностей расчетного комплекса, например, в соответствии с таблицей 2.1.

Таблица 2.1.

Уровень	Возможности доступа к системе при:	
	настройке программы	выполнении расчетов
<b>Beginner</b>	Использование только стандартных назначений	Линейные расчеты стержневых систем без использования техники подконструкций
<b>Intermediate</b>	Возможность регулирования состава выводимых результатов, формы отображения на экране монитора, задания параметров, точности решения задачи, назначение точности сборки и оценки совпадения координат узлов	Линейные статические расчеты произвольных систем с использованием конечно-элементных моделей, включающих пластинки и оболочки, динамические расчеты по рекомендациям норм проектирования (сейсмика, ветер)
<b>Expert</b>	Доступ к установке всех параметров программы (настройка стиля инструментальной панели, изменение цветов, стиля и размеров шрифта на экране, настройка режима анимации и др.)	Линейный и нелинейный расчет (физическая и геометрическая нелинейность) с использованием всех возможностей программы, все виды динамического расчета, анализ устойчивости, использование техники фрагментации, все виды и формы документирования, экспорт и импорт в другие системы

Помощь в правильной самоидентификации могла бы оказывать встроенная экзаменующая подсистема, построение которой отличалось бы от обычных систем типа «выбери ответ» тем, что

среди предлагаемых ответов присутствовал не один, а несколько правильных ответов с характеристикой квалификации, соответствующей этому ответу и соответствующими комментариями. Естественно, что разработка такого теста представляет собой сложную и интересную дидактическую проблему.

К числу наиболее мощных приемов упрощения принадлежит использование некоторых кинематических гипотез, с помощью которых поведение больших групп «независимых» переменных представляется через относительно небольшое число определяющих параметров. Типичным примером (он настолько традиционен, что его применение даже не фиксируется) является использование гипотезы плоских сечений в теории стержней Бернулли-Эйлера.

Аналогичны гипотезы об отсутствии деформаций в плоскости перекрытий многоэтажного здания, когда они представляются абсолютно жесткими диафрагмами, а здание в целом рассчитывается на горизонтальные нагрузки как система соединенных упругими вертикальными связями горизонтальных дисков, движущихся только в горизонтальной плоскости [Николаенко, Назаров, 1988].

Все эти приемы агрегирования переменных и использования некоторых обобщенных координат важны не столько для уменьшения размерности задачи (хотя и это учитывается), сколько для сжатия информации с целью большего удобства ее осмысления. Кроме того, такие приемы важны в тех случаях, когда данные о внешних воздействиях не детализированы в такой степени, чтобы их можно было корректно «привязать» к детальной расчетной схеме.

## 2.2. Модель нагружения — составная часть расчетной схемы

То, что идеализация воздействий является частью операций по составлению расчетной схемы, вспоминается не очень часто. Причин тому много, одна из них связана с тем, что действующие нормы проектирования [СНиП 2.01.07-85] сформулированы как универсальные и не связываются с той частью расчетной модели, которая описывает конструкцию сооружения. Такой подход справедлив, если нагрузка, моделирующая воздействие окружающей среды на сооружение, никак не определяется работой самого сооружения. Но иногда приходится вспоминать, что есть не только действие нагрузки на систему, но и взаимодействие нагрузки с системой.

К числу характерных примеров взаимодействия нагрузки с системой относятся многие режимы динамического нагружения. Сооружение является некоторым фильтром, отбирающим из действующих на него возмущений определенную часть. Это обстоятельство хорошо исследовано, частотная картина нагружения является неотъемлемой частью описания динамической нагрузки, и модальный анализ, дающий спектр собственных частот и форм колебаний, лежит в основе подавляющего числа динамических расчетов.

В меньшей степени известно, что фильтрация может происходить не только по частоте воздействия (резонансные явления), но и по длине волны. Уже упоминалось, что сейсмическое воздействие на объект с малыми размерами в плане (дымовая труба, башня и т.п.) и на сооружение большой протяженности, расположенное на общей фундаментной плите (корпус элеватора, атомная электростанция), оказываются существенно разными. Если в первом случае сооружение будет реагировать на волны всех длин, лишь бы частотная картина воздействия была такой, что она попадает в зону чувствительности, определяемую спектром собственных частот, то во втором случае сооружение будет реагировать аналогичным образом только на волны, длина которых примерно вдвое превышает размер фундамента в плане — они действуют практически синфазно на протяжении всего сооружения, в то время как воздействие более коротких волн может оказаться в противофазе. Аналогичные эффекты следует учитывать при расчете гидротехнических объектов. Так, для конструкций морских глубоководных оснований удастся заметно снизить общий уровень загруженности, если их генеральные размеры подобраны так, что на противоположных сторонах сооружения волновая нагрузка действует в противофазе.

Еще одним примером взаимодействия нагрузки с сооружением является аэродинамическое нагружение. Его величина существенно зависит от формы конструкции, обтекаемой ветровым потоком. Здесь, кстати, наблюдается своеобразный эффект положительной обратной связи — увеличение поперечных размеров сечения увеличивает ветровую нагрузку, что в свою очередь может вызвать увеличение размеров сечения. Этот процесс не всегда является затухающим и известны случаи, когда таким путем не удавалось запроектировать конструкцию. Аналогичная положительная обратная связь возникает при учете нагрузки от собственного веса, а также в случаях нагружения гибких конструкций весом слоя жидкости. В последнем случае прогибы конструкции увеличивают толщину слоя жидкости,

что приводит вновь к увеличению прогибов<sup>1</sup>. Во всех указанных случаях возможно явление своеобразной неустойчивости равновесия, несмотря на то, что в системе отсутствуют сжимающие нагрузки ([Пановко, Губанова, 1987], стр. 25).

Реакции в отброшенных связях, с помощью которых окружающая среда взаимодействует с сооружением, ограничивая свободу его перемещений и навязывая определенное поведение, часто выступают в роли нагрузок. Рассчитываемая конструкция всегда является частью более общей системы и, выделяя конструкцию из окружающей среды, мы либо идеализируем ее влияние в форме абсолютного запрета на некоторые виды перемещений (присоединение системы к «земле»), или же описываем это влияние в форме внешней нагрузки на систему. Но при использовании такого подхода очень важно понять, не влияет ли деформация системы на нагрузку. Иными словами, рассматриваемая конструкция должна быть в некотором смысле несопоставимой по жесткости с отброшенным окружением. Лишь тогда можно уверенно предполагать, что нагрузку можно рассматривать как не зависящую от деформаций системы.

Таким образом, стандартной идеализацией взаимодействия с внешней средой является либо задание некоторых перемещений (чаще всего нулевых) — и тогда мы накладываем соответствующую связь, либо задание некоторого нагружения силового характера.

Рассматривая различия между силовым и деформационным нагружением, В.И.Феодосьев [1975] приводит пример характерной ошибки, когда на опорное кольцо резервуара (рис. 2.4, а) передают нагрузку по силовой схеме (рис. 2.4, б), где общий вес равномерно распределен по длине опорного кольца.

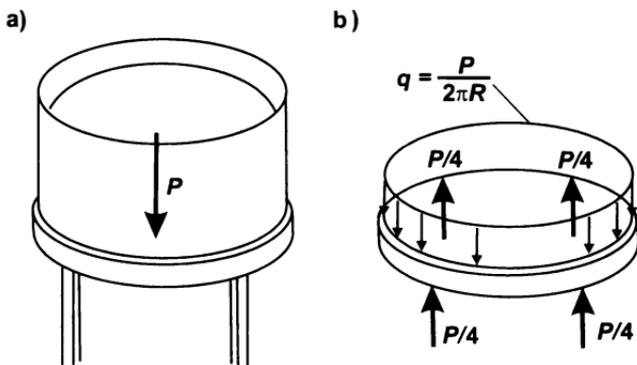


Рис. 2.4. Расчетная модель

<sup>1</sup> В известном учебнике по механике материалов С.П.Тимошенко и Дж.Гере назвали это задачей о заполняемой емкости.

Однако, кольцо не может рассматриваться, как самостоятельно нагруженная силами система, поскольку оно прогибается ровно настолько, насколько позволяет ему деформироваться стенка бака. Кольцо практически находится в условиях деформационного нагружения, а еще лучше сказать — кинематического воздействия.

Разница между силовым и деформационным нагружением особенно резко сказывается при анализе тех последствий, к которым приводит их изменение. В упругой системе эта разница практически не проявляется, но дело существенно меняется при рассмотрении систем неупругих. На это обстоятельство не очень часто обращают необходимое внимание, проектная практика настолько глубоко привязана к оценке напряжений, что об их неравноправности с деформациями, в тех случаях, когда несправедлив закон Гука, забывают.

В упомянутой книге В.И.Феодосьева очень четко поставлен вопрос о том, является ли вычисленный по напряжениям коэффициент запаса достаточной характеристикой надежности. Отвечая на него отрицательно, автор рассматривает два способа создания напряжений в стержне — приложением некоторой нагрузки  $P$ , вызывающей в сечении стержня напряжение  $\sigma$ , и принудительным деформированием, создающим такую деформацию  $\epsilon$ , что ей соответствует такое же напряжение  $\sigma$  (рис. 2.5). В первом случае увеличение напряжения в 1,5 раза приведет к разрыву стержня, во втором (увеличение деформации в те же 1,5 раза) — лишь к росту остаточных деформаций.

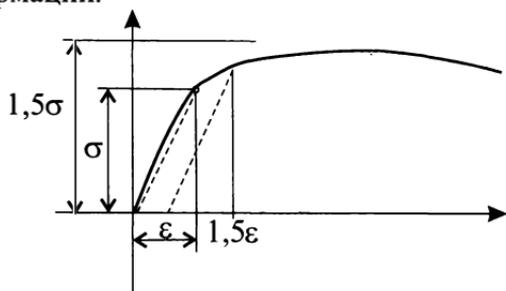


Рис. 2.5. Диаграмма напряжений

Особенно сильно сказывается различие между силовым и деформационным нагружением при рассмотрении вопроса о влиянии точности задания воздействия на результаты расчета. Так, в простейшем случае изгиба балки, который сводится к решению дифференциального уравнения

$$(EIv'')'' = q(x)$$

можно рассмотреть два случая:

- нагрузка — причина изгиба, а прогиб — следствие;
- прогиб является причиной (изгиб по лекалу), а нагрузка (реакция) — следствием.

Если предполагать абсолютную точность задания исходных данных и способа решения задачи, то формального различия между указанными случаями нет. Но в действительности это различие очень велико, поскольку малые изменения нагрузки приводят к малым изменениям прогибов, а если неточно задана форма лекала, то разброс в полученных значениях нагрузки может быть очень большим (мы практически не умеем находить даже первую производную от неточно заданной функции). По сути, здесь нет ничего нового, чем другое прочтение закона Гука:

*если в упругой системе большие силы приводят к малым деформациям, то ее малые деформации могут быть связаны с большими усилиями.*

Однако, традиции инженерного образования не фиксируют внимание студента на рассмотрении закона упругости в такой форме.

### 2.3. Контроль расчетной схемы и средства ее описания

В поучительной книге А.А. Космодемьянского [1969] сказано, что

*«...при проектировании и строительстве новых сооружений (мостов, плотин, самолетов, ракет, зданий) на основании колоссального предшествующего опыта специалисты настолько уверены в справедливости законов механики, что все вытекающие из расчетов выводы считаются абсолютно верными. Если в ряде случаев и получаются расхождения теории с практикой, то при последующем строгом и тщательном анализе они объясняются или неточностью исходных данных, или арифметическими ошибками счета».*

Эти слова, в основном, относятся к «домашинной» эпохе; сейчас, при повсеместном распространении расчетов с использованием ЭВМ, в качестве основных источников расхождений можно было бы назвать неправильное составление расчетных схем или некорректное

использование программного обеспечения и (намного реже) ошибки в программном обеспечении.

Эту ситуацию хорошо осознают опытные расчетчики, и они не жалеют усилий на любые доступные им методы проверки правильности составления расчетной схемы и соответствия результатов расчетов работе конструкции. К числу приемов контроля относятся проверки:

- размерностей использованных величин;
- характера зависимости результата от изменения некоторых исходных данных, включая проверку таких свойств, как ожидаемая симметрия (антисимметрия) или нечувствительность к некоторым параметрам;
- поведения системы при экстремальных значениях определенных параметров;
- устойчивость расчетной модели по отношению к малым изменениям ее структуры или значений параметров;
- соблюдения выводов, вытекающих из теорем взаимности (перемещений, усилий, работ).

Ниже мы остановимся подробнее на некоторых полезных приемах проверки и покажем, как они реализуются на практике, но начнем с тривиального контроля вводимых исходных данных.

В задачах большой размерности вероятность появления ошибки в исходных данных резко возрастает. Исследования по инженерной психологии говорят о приблизительно степенной зависимости вероятности человеческой ошибки от объема перерабатываемой человеком информации. На этом основании в работе [Lind, 1979] было высказано предположение о тесной зависимости вероятности ошибки от размера и сложности рассматриваемой схемы конструкции.

Любой современный расчетно-вычислительный комплекс оперирует с достаточно разнородными данными, с помощью которых описываются свойства конечных элементов, узлов, нагрузок и воздействий и т.п. При решении задач большой размерности всю эту информацию трудно рассматривать одновременно, а использование стандартного подхода, основанного на выделении фрагментов, не всегда удобно. В частности, это неудобство дает о себе знать при попытке проследить за тем, как некоторый фактор соотносится с системой в целом (например, как в системе располагаются элементы, обладающие вполне определенной жесткостью).

Вот, например, какие средства анализа исходной информации представляет графическая среда вычислительной системы ANSYS, являющейся одной из самых мощных в мире:

- цветовая и цифровая индикация элементов и геометрических примитивов согласно их атрибутам;
- символьное представление нагрузок и граничных условий;
- построение любых сечений и разрезов;
- присвоение прозрачностей поверхностям и твердым телам;
- перспективное изображение;
- позиционирование источников света;
- трехмерное изображение реальной геометрии сечения балочных и оболочечных элементов;
- возможность создания графических аннотаций (нанесение на изображение символов и текста).

Для облегчения анализа входной информации используются специальные инструментальные средства, встраиваемые в программы расчета. Ниже приведено описание этого набора средств для комплекса SCAD, который является достаточно типичным для современного подхода.

В комплексе, например, предусмотрено применение так называемых *фильтров отображения*, с помощью которых с экрана монитора удаляется вся информация, которая в данный момент не представляет оперативного интереса, а также использование специальных *инструментов визуализации*. По отдельности и в любых комбинациях можно, например, отфильтровать информацию, касающуюся элементов определенного типа или занимающих определенное пространственное положение. При включенном фильтре на экране остается только та информация из группы однотипной, которая связана с таким фильтром (см. табл. 2.2).

Типичный пример использования фильтрации представлен на рис. 2.6 - 2.9, где показано, как по мере включения все новых фильтров, постепенно сужается объем информации, выводимый на экран компьютера.

После включения фильтра «*Цветовое отображение жесткостей*» появляется возможность указать только часть информации (соответствующие цвета), сохраняемую для дальнейшей работы. Кроме того, эта информация может использоваться для выделения соответствующего фрагмента расчетной схемы, при этом все остальное попросту исчезнет с экрана.

Таблица 2.2.

Группа	Фильтры	Пропускается информация, относящаяся только к:
<b>Описание элементов</b>	Стержни	элементам стержневого типа
	Пластины	элементам типа пластин и оболочек
	Трехмерные элементы	трехмерным элементам
	Специальные элементы	элементам, моделирующим связи
<b>Описание нагрузок</b>	Узловые	узловым нагрузкам
	Распределенные	нагрузкам, распределенным по линиям, площадям и объемам
	Сосредоточенные	сосредоточенным внеузловым нагрузкам
<b>Геометрическое положение</b>	Вертикальные	вертикальным стержням
	Горизонтальные	горизонтальным стержням
	Наклонные	наклонным стержням
	В плоскости X0Y	пластинам, расположенным параллельно плоскости X0Y
	В плоскости X0Z	пластинам, расположенным параллельно плоскости X0Z
	В плоскости Y0Z	пластинам, расположенным параллельно плоскости Y0Z

Кроме фильтров, используются *маркеры*, активизация которых вызывает на экран монитора дополнительную справочную информацию. С помощью маркеров можно включить или отключить отображение различного рода данных (узловые нагрузки, распределенные нагрузки, связи, нумерации элементов и узлов и др.). При этом широко используется цветовая индикация данных одного типа, отличающихся только значениями.

Всего в системе **SCAD** имеется много различных маркеров, некоторые из них перечислены в таблице 2.3. Следует заметить, что маркеры сами по себе могут быть настроены так, чтобы работать на отфильтрованных значениях (например, пометать только горизонтальные элементы).

В комплексе **SCAD**, как и в других аналогичных программах, реализовано несколько приемов декомпозиции расчетной схемы, что облегчает анализ задачи на входе и на выходе. Возможна декомпозиция по пространству (техника фрагментов), по смыслу (техника групп) и по структуре (техника подконструкций).

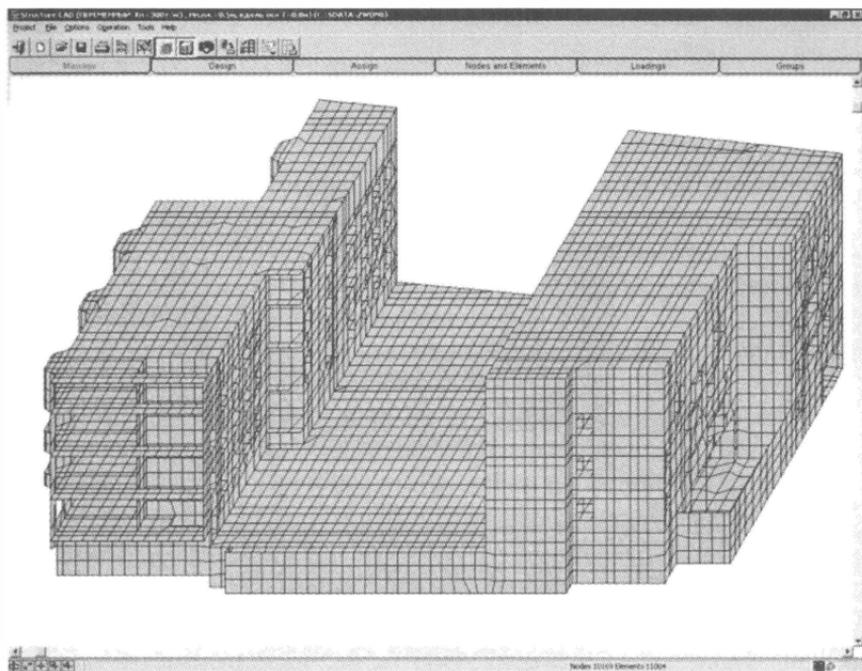


Рис. 2.6. Фильтрация информации — полная картина

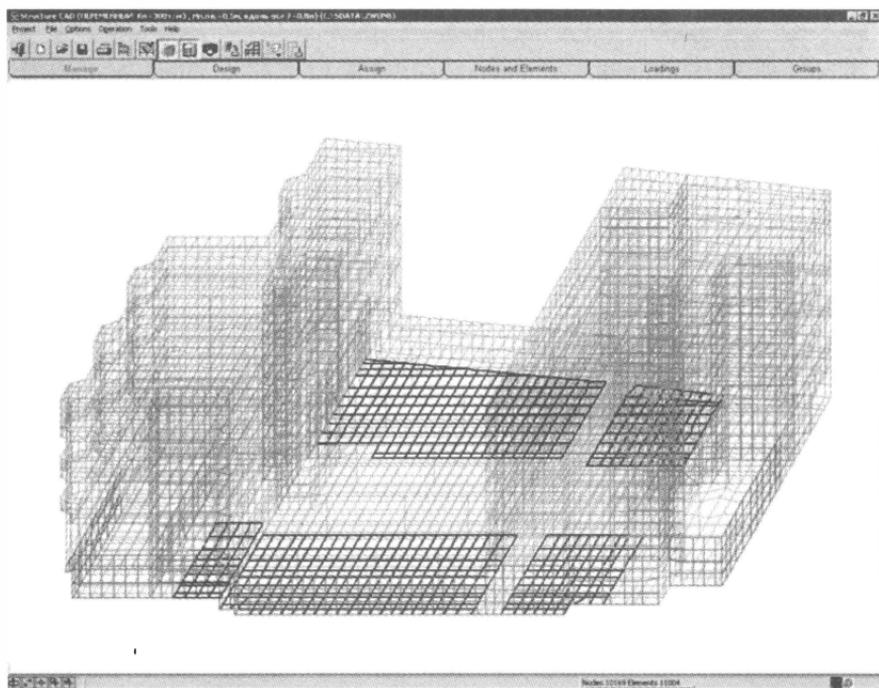


Рис. 2.7. Фильтрация информации — цветовое отображение типов жесткостей

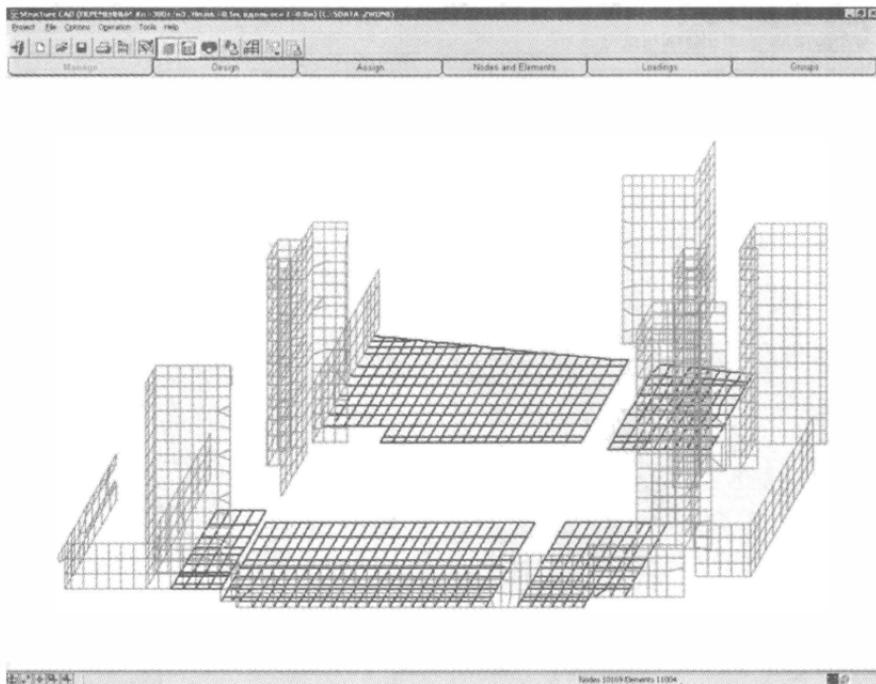


Рис. 2.8. Фильтрация информации — исключение ненужных частей;

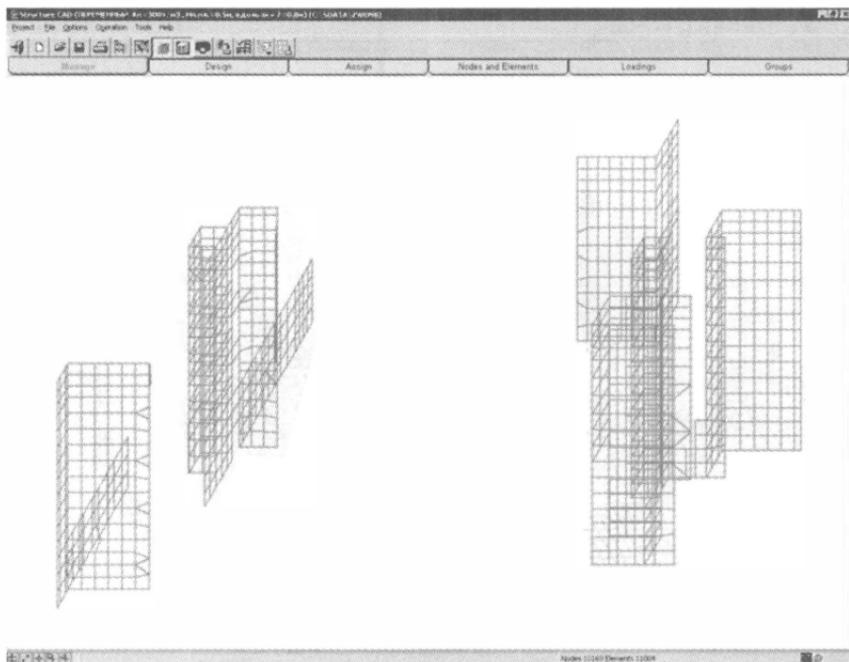


Рис. 2.9. Фильтрация информации — отбор элементов с необходимой жесткостью

Таблица 2.3.

<b>Маркеры</b>	<b>Отображаемая информация</b>
<b>Описание схемы</b>	
Номера узлов	Нумерация всех узлов, видимых на экране
Номера элементов	Нумерация всех элементов, видимых на экране
Связи	Индикация узлов с внешними связями
Объединяемые перемещения	Отображение групп узлов с объединяемыми перемещениями
«Висячие» узлы	Индикация узлов, к которым не примыкают никакие элементы
Совпадающие узлы	Индикация разных узлов, занимающих одно и то же положение в пространстве
Группы узлов	Цветовое отображение групп узлов
Группы элементов	Цветовое отображение групп элементов
<b>Описание элементов</b>	
Тип элементов	Цифровая и/или цветовая индикация типа конечных элементов
Тип жесткости	Цифровая и/или цветовая индикация типа жесткости
Местные оси	Изображение локальных координат элементов
Шарниры	Изображение концевых шарниров на стержнях
Жесткие вставки	Изображение жестких вставок на стержнях
Совпадающие элементы	Индикация разных элементов, занимающих одно и то же положение в пространстве
<b>Описание нагрузок</b>	
Узловые	Изображение символа узловой нагрузки
Распределенные	Изображение символа распределенной нагрузки
Сосредоточенные	Изображение символа сосредоточенной нагрузки на элементе
Температурные	Изображение символа температурной нагрузки
Значения нагрузок	Вывод числовых значения нагрузок рядом с символом

В роли фрагмента может выступать любая часть расчетной модели, которая была обозначена на экране «резиновым окном», после чего из нее автоматически удаляются элементы, попавшие в окно не полностью. Все прочие элементы расчетной схемы образуют фрагмент, и только они (естественно, до тех пор пока это нужно) присутствуют на экране. К полученной таким образом части схемы может быть применена техника фильтрации и наоборот, фрагментация возможна на отфильтрованном изображении. Таким

образом, декомпозиция в технике фрагментов является только приемом для оперативного анализа информации.

Часто бывает необходимым зафиксировать некий фрагмент системы для многократного обращения к нему с различными запросами. Такая операция связана с использованием техники *групп*, с помощью которой любое подмножество объектов расчетной схемы (узлы, элементы, нагрузки) может быть представлено как поименованная группа. Наконец, любая часть схемы может быть рассмотрена как *подконструкция*, а сама конструкция определена как совокупность подконструкций. Отличие группы от подконструкции состоит в том, что последняя обладает свойством некой расчетной модели, а группа таковой может и не являться.

a)



b)



Рис. 2.10. Deskрипторы: a — узла; b — элемента

Еще одной совокупностью инструментов анализа, кроме фильтров и маркеров, являются *deskрипторы*. Они могут относиться к узлам или к элементам системы и при использовании показывать все

данные, относящиеся к конкретному объекту расчетной схемы. На рис. 2.10 приведен пример дескриптора для узлов, который может быть настроен на рассмотрение конкретного узла, помеченного на экране монитора, или узла, заданного своим номером. В последнем случае такой узел отыскивается на изображении расчетной схемы и помечается для рассмотрения.

Показанный вариант дескриптора позволяет не только видеть необходимые данные (координаты, связи, нагрузки), но и изменять их в оперативном режиме, т.е. он является не только средством визуализации и контроля, но и средством ввода и/или корректировки информации.

Заметим, что весьма важную роль в создании удобства работы является возможность самостоятельной настройки некоторых элементов графической среды. Среди пользователей программных средств имеются категорические сторонники как позитивного (темное изображение на светлом фоне), так и негативного (темный фон, светлое изображение) стиля представления расчетной модели. Черный фон экрана бывает очень эффектным при презентациях, светло-серый фон рабочего экрана менее контрастен и менее утомителен. О преимуществах этих полярных подходов можно спорить столь же долго, сколь и бесполезно. Пользователь, проводящий многие часы за экраном монитора, должен иметь право выбора.

В заключение этого раздела укажем на другие инструментальные возможности повышения уровня наглядности результатов, которые встраиваются в современные расчетно-вычислительные комплексы программ. К ним относятся:

- регулируемый масштаб изображения деформаций;
- анимация перемещений;
- построение графиков зависимости перемещений, усилий или напряжений от времени или интенсивности нагрузки;
- построение эпюр для стержневых элементов;
- построение изолиний или изополей перемещений или компонентов напряжений;
- построение линий тока для направлений главных напряжений в двумерных задачах;
- расчет коэффициентов использования ограничений, задаваемых нормами проектирования конструкций.

Умелое использование этих функций программы облегчает пользователю оценку полученного результата и дает то понимание

работы рассчитываемой системы, ради которого, собственно, и предпринимался расчет.

Вопросы контроля расчетной схемы тесно увязаны со средствами описания исходной информации к расчетной программе. Эти средства можно разделить на три категории: табличные, командные и интерактивные графические. Возможны, и даже желательны любые комбинации этих средств.

По понятным причинам описание входной информации к задаче в форме таблиц с исходными данными (иногда такие таблицы организованы в виде набора *документов*) исторически предшествовало появлению командных и интерактивных средств описания данных. Для облегчения ввода данных, сокращения их объема при табличном вводе широко используются такие приемы, как систематическое использование «*принципа умолчания*» (неявное присвоение какому-либо данному или группе данных предопределенных значений), применение различного рода *повторителей* данных, в том числе вложенных повторителей, объединение данных в поименованные группы с последующим использованием имени для обращения к группе в целом и т.д.

В целях унификации синтаксиса табличных данных Р.А. Резниковым [1971] был в свое время разработан специальный язык описания данных, названный им языком **ВХОД**. Сегодня широко используется другое средство унификации представления исходных данных, реализованное в программной системе **FeMap**, которая является универсальным препроцессором для таких различных программных комплексов, как **NASTRAN**, **ANSYS**, **LS-DYNA**, **ABAQUS**, **STAAD**, **COSMOS** и ряда других.

Командные средства описания данных (одним из типичных представителей программных средств, широко применяющих командный стиль описания данных, является программный комплекс **GTSTRUDL**) близки к табличным средствам в части использования тех же принципов и приемов для сокращения объемов данных, где собственно данные задаются параметрами команд. Основные отличия команд от, скажем, табличных документов с данными заключаются в том, что команды могут быть выданы в произвольном порядке (точнее, почти в произвольном, немногие исключения специально оговариваются), и одинаковые по имени команды могут присутствовать в наборе входных данных неоднократно. Сами команды условно подразделяются на *декларативные* и *директивные*. Декларации воздействуют на содержание данных, тогда как директивы предназначены для манипулирования данными. Например, возможна директива пространственного перемещения некоторого

ранее поименованного объекта (в терминах SCAD объект ассоциируется с подконструкцией) с копированием данных и переопределением имени объекта или же с удалением копируемого оригинала — это близко тому, что пользователям Windows известно как выдача последовательности команд *Copy+Paste+Rename* или *Cut+Paste*. Другие директивы инициируют определенный вид обработки данных или формирование и выдачу по запросу пользователя на экран монитора (и/или в печатный документ, и/или на иной носитель информации) исходных данных, результатов промежуточных вычислений, окончательных результатов расчета.

Табличные и командные средства ввода данных объединяет то, что в обоих случаях речь идет о текстовой форме их представления. В этом смысле наиболее продвинутые возможности задания исходной информации к расчетной задаче связаны все же с интерактивными графическими формами описания и манипулирования данными. С появлением и повсеместным использованием такой операционной системы, как Windows, интерактивный графический способ описания данных в программных комплексах расчетного характера стал, по существу, стандартом и реализован практически во всех известных программах по расчету конструкций. Понятно, что возможности визуализации и манипулирования данными в графической форме многократно облегчают пользователю его действия за экраном монитора, доступнее в освоении (интуитивно более понятны и быстрее запоминаются), способствуют самоконтролю пользователя. Поэтому вряд ли сегодня любая расчетная программа сможет конкурировать на рынке программной продукции, если она не оснащена средствами машинной графики при вводе данных.

Вместе с тем, по мнению авторов, интерактивная графика не отменяет полезности табличных и командных средств описания входных данных. Во-первых, текстовая форма данных очень удобна для создания различного рода *конверторов* — специальных программ, преобразующих структуру и синтаксис данных, сформированных для одного расчетного комплекса, к структуре и синтаксису данных другого комплекса. Во-вторых, текстовая форма данных уместна в целях последующего бумажного документирования, обмена между людьми, сохранения и архивации входной информации к задаче. Наконец, текстовая форма данных позволяет заниматься их анализом и проверкой не только за экраном компьютера, но и в спокойной атмосфере за письменным столом, причем некоторые тонкие аспекты описания расчетной модели конструкции оказывается проще и надежнее подвергать анализу, внимательно исследуя тексты данных. В силу сказанного,

представляется, что в идеале интерактивная графическая форма описания данных должна автоматически отображаться в эквивалентную текстовую форму, и наоборот. Пользователь сам выберет для себя ту форму описания данных, которая, с его точки зрения, наиболее удобна для его конкретных целей, а при необходимости сможет переключаться с текстовой формы на графическую и с графической на текстовую.

Имеются программы, допускающие одновременное использование табличного и графического ввода информации. На экране одновременно присутствует изображение схемы и таблица с данными (рис. 2.11), и ввод данных в таблицу сразу же корректирует изображение, также как ввод графической информации меняет таблицу.

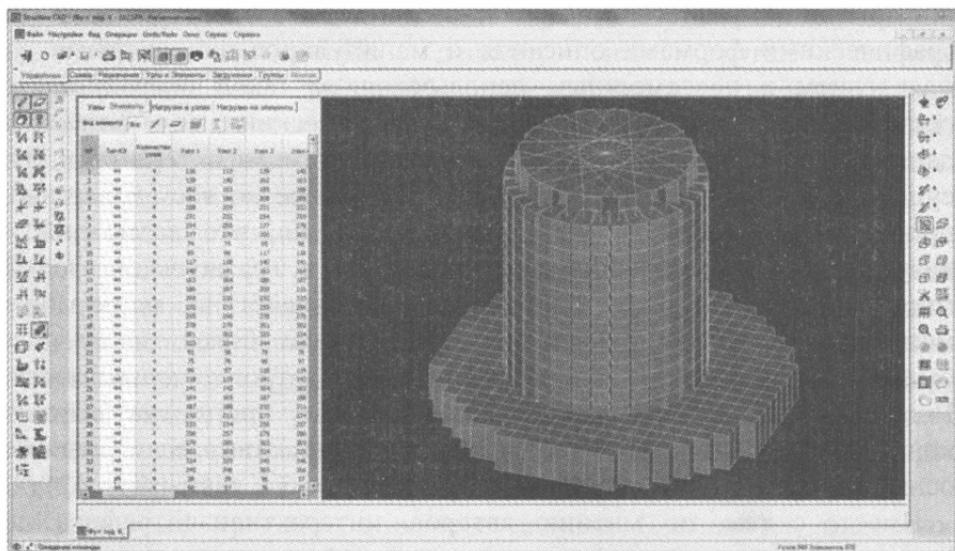


Рис. 2.11. Таблично-графический ввод данных

Кроме формы описания данных существенное значение имеет возможность задания различных *режимов ввода* данных. Таковыми режимами могут быть:

- режим добавления — ADD
- режим удаления — DELETE
- режим изменения — CHANGE

Основным режимом, активизируемым по умолчанию при запуске программы, является режим добавления данных, который становится текущим до момента выдачи команды о смене режима. Смена текущего режима осуществляется вводом команды, в которой

указывается имя очередного режима, принимающего статус текущего, причем для пользователя удобно, если смена режимов ввода может осуществляться в сеансе работы пользователя за экраном монитора неоднократно<sup>2</sup>. Режимы удаления данных и изменения данных эффективны, например, при многократных расчетах конструкции, связанных с ее модификацией или с модификацией внешних воздействий.

Следующим инструментом описания и ввода данных пользователем, которым уместно оснастить программный комплекс, является возможность задания статуса данных с помощью *активации* и *деактивации* отдельных данных и целых групп данных. И опять-таки, по умолчанию, все данные считаются активными, то есть присутствующими в расчетной схеме. Если какие то данные, скажем, группа стержней и узлов, деактивированы, то они фактически выключены из расчетной схемы. Эти возможности особенно полезны при проведении расчетов конструкций с модифицируемыми расчетными схемами, возникающими в процессе возведения или монтажа конструкции. Активируя и деактивируя группы данных в различных нагружениях системы, можно затем проводить комбинации нагружений по элементам, относящимся в разных нагружениях к разным расчетным схемам.

Вот еще одна, казалось бы, мелочь, но такая, привыкнув к которой, в дальнейшем трудно от нее отказаться. Речь идет об идентификаторах (именах) узлов, стержней, конечных элементов, нагружений и вообще любых объектов расчетной схемы. Номера (скажем для определенности, номера узлов) — не самый общий, а следовательно, и не самый лучший способ идентификации. Простая, но полезная идея, реализованная в **GTSTRUDL**, состоит в том, что имя узла может содержать буквенный или буквенно-цифровой префикс, за которым может следовать номер, причем никаких ограничений на нумерацию не накладывает. Нумерация может идти с пропусками, начинаться не обязательно с единицы и т.д. Номерной же суффикс в имени может быть использован для организации повторителей. Наконец, контроль данных и понимание расчетной схемы инженером, осуществляющим проверку данных, существенно упрощаются, если имена подобраны удачно и интуитивно понятны, а этого при некотором опыте всегда можно добиться.

---

<sup>2</sup> Весьма полезно в так называемой строке состояний, обычно размещаемой в нижней части экрана, отображать текущий режим ввода.

## 2.4. Параметризация расчетной модели<sup>3</sup>

При проектировании строительных конструкций, а тем более при проведении научных исследований, инженерам и учёным редко приходится оперировать только одной расчётной моделью. Инженер, на основании расчётных данных, должен выбрать один из нескольких вариантов конструкции, в то время как учёный изучает поведение расчётной схемы в различных условиях. Каждое принятое ими решение должно отвечать требованиям надёжности, экономичности и функциональности. Но даже простой перебор небольшого числа вариантов проектных решений во многом ограничен временными рамками. Поэтому зачастую отсутствует возможность рассмотреть достаточное количество вариантов конструкции. Кроме того, в процессе проведения проектных работ, постоянного происходит уточнение данных, исходных предпосылок и параметров самой конструкции, что так же может потребовать заново выполнить расчёт, который может занимать существенное количество времени и отодвигать сроки выдачи проектной документации.

Для эффективного сокращения времени на выполнение расчётов и принятие проектных решений, можно использовать автоматизацию самого процесса создания и обработки расчётных моделей. В частности, очень полезным, но редко используемым приёмом повышения производительности инженерного и научного труда при использовании коммерческих программных разработок, является *параметризация расчётных моделей.*

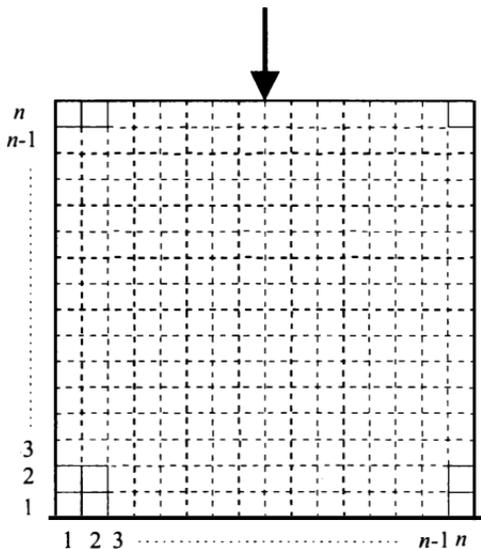
Для того чтобы пояснить, что же такое параметризация, и зачем она нужна, рассмотрим небольшой пример, поясняющий сущность проблемы.

Расчётная модель прямоугольной пластины, разбитой на  $n \times n$  конечных элементов (рис. 2.12) при описании в тексте может содержать до  $10n^2$  числовых значений, зависящих от параметра  $n$ , преимущественно в неявной форме.

При использовании развитого командного языка, позволяющего генерировать несколько объектов за одну команду, количество зависимых величин может быть сокращено до двух десятков. Тем не менее, сгущение или разряжение сетки, т.е. модификация расчётной схемы, по своим трудозатратам сопоставима с созданием новой расчётной модели. В практических расчётных схемах количество параметров может измеряться десятками, а зависимых от них величин сотнями и тысячами. К тому же некоторые параметры, могут

<sup>3</sup> Этот параграф написан при участии Д.А. Маслова.

вычисляться по порой достаточно сложным математическим выражениям, или даже требовать применения некоего алгоритмического вычислительного процесса. Таким образом, любая модификация расчётной схемы требует значительных временных затрат на подготовку, ввод и проверку правильности исходных данных.



**Рис. 2.12.** Пластина с сеткой  $n \times n$  конечных элементов

Можно сказать, что любые изменения, вносимые в любую расчётную модель, пусть даже полностью отлаженную и протестированную, могут спровоцировать появление массы ошибок, поскольку люди не роботы и подвержены утомляемости и потери внимания, особенно при выполнении монотонных и однотипных операций, таких как вычисление и замена чисел в расчётной схеме.

Вот лишь некоторые, наиболее распространённые причины возникновения необходимости вносить изменения в расчётную модель:

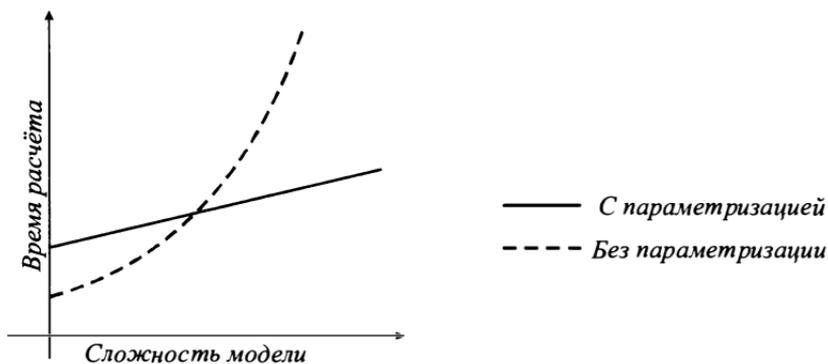
- неудовлетворительные результаты расчёта, требующие уточнения исходных данных и расчётной схемы;
- изменения параметров, точные значения которых не могут быть определены на начальных этапах проектирования;
- модификация самой конструкции, вызванная изменением условий проектирования
- последовательный пересчёт различных монтажных стадий конструкции

При работе с новой расчётной моделью некорректные или слишком отличающиеся от предыдущих результаты, это

единственный признак наличия ошибок в исходных данных. Зачастую неправильные результаты, или не очевидны, или не имеют величин для сравнения, а следовательно, необходимо всё время быть уверенным в правильности расчётной схемы.

Параметризация, а именно замена числовых констант в расчётной схеме на математические выражения, по которым вычисляются необходимые величины, позволяет не только сократить время внесения изменений, но и уменьшить вероятности появления ошибок в расчётной схеме, за счёт того, что контролируется меньшее число величин. Так, в приведенном выше примере, используя параметрическую модель, для получения новой сетки достаточно лишь указать новое значение  $n$ , вместо того, чтобы вводить множество новых чисел, зависящих от этого единственного параметра.

Конечно, подготовка и отладка параметризованной расчётной модели требует куда более значительного времени, чем непараметризованной. Но скорость и лёгкость внесения изменений быстро компенсируют эти временные затраты, поскольку вместо ручной замены большого объёма данных, достаточно лишь указать новые значения входных параметров. Чем более сложную конструкцию приходится рассчитывать, тем больше времени позволяет сократить параметризация (рис. 2.13).



**Рис. 2.13.** Сравнение времени расчета с параметризацией и без нее при увеличении сложности расчетной схемы

Некоторые программные системы обладают мастерами (wizards) – подпрограммами, автоматически генерирующими расчётные схемы на основании указанных пользователем параметров. Типичным примером может служить мастер создания схем стропильных ферм комплекса SCAD (рис. 2.14). Вместе с тем набор мастеров обобщает опыт разработчика, но не пользователя. Он зачастую ограничен лишь простейшими моделями и не подвержен модификации, а,

следовательно, неприменим при выполнении расчётов нетиповых и уникальных конструкций.

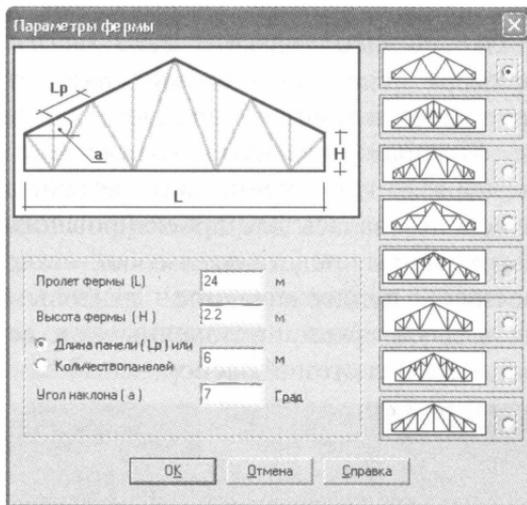


Рис. 2.14. Мастер создания схем стропильных ферм

Здесь пользователям, имеющим достаточный опыт создания расчётных моделей, можно посоветовать пожертвовать наглядностью «современных» графических режимов задания исходной информации и обратить внимание на считающиеся «устаревшими» командно-текстовые возможности некоторых программных комплексов.

В чём же заключаются преимущества текстового ввода? Первое – возможность воздействия на расчётную модель даже тогда, когда она не попросту не помещается на экран в приемлемом масштабе. Впрочем, это остаётся доступным и при помощи реализованного во многих программных комплексах табличном режиме ввода. Второе, и самое главное, преимущество текстового режима заключается в том, что исходный текст может быть не только «набит» вручную, но и подготовлен при помощи любого другого инструмента, позволяющего создавать простейшие программы, сохраняющие результаты своей работы в текстовый файл, который и будет потом использован в качестве исходных данных расчётной модели.

Какой же программой можно воспользоваться для создания параметрических моделей? Ответ – любой, от макросов **Microsoft Office**, до таких систем как **MathCAD** или **MathLab**, и вплоть до интегрированных сред разработки **Visual Studio** или **Delphi**, которые могут использоваться как напрямую, так и для разработки собственных средств параметризации. Конечно, в этом случае инженер должен стать программистом. Но, как уже неоднократно утверждалось, хотя

бы начальными навыками написания программ в наше время должен обладать всякий технический специалист. Кроме того, элементарные приёмы программирования теперь рассматриваются в школьном курсе информатики.

В качестве примера использования идей параметризации можно указать на опыт проектирования арочного пролетного строения моста через реку Большая Охта на кольцевой автодороге в Санкт-Петербурге (рис. 2.15), где специально разработанные средства параметризации использовались для проектирования и оптимизации конструкции. Конструкция представляет собой сталежелезобетонное пролетное строение, поддерживаемое вантовыми подвесками, прикрепленными к двум аркам наклоненными к середине моста и связанными между собой системой распорок.



**Рис. 2.15.** Арочный мост через р. Охта в Санкт-Петербурге

Расчетный пролет арочного пролетного строения составил 160 м. Расчет по прочности на стадии сооружения и эксплуатации выполнялся в расчетном комплексе **GTSTRUDL**. Применение вспомогательной программы позволило быстро изменять параметры конструкции, пересчитывать расчетную схему и получать результаты расчета, на основе которых производилось оценка конструктивных решений и оперативно вносились изменения в конструкцию.

Дополнительно для этого моста выполнялся расчёт общей устойчивости конструкции пролётного строения в программе SCAD. В схеме из 2711 узлов и 3234 элементов при потребовался анализ нескольких расчётных схем с различными очертанием и наклоном арки. Каждая новая расчётная схема генерировалась лишь изменением двух параметров – стрелки арки и угла наклона к горизонтальной плоскости. Это позволило в сжатые сроки подобрать оптимальное соотношение параметров для обеспечения наибольшего коэффициента запаса по устойчивости.

При проектировании вантового моста через Неву в Санкт-Петербурге (рис. 2.16), на начальных этапах работы значения многих параметров моста, даже таких как длины пролётов, высота пилонов, количество вант) не были окончательно установлены.



**Рис. 2.16.** Сооружение вантового моста через Неву в Санкт-Петербурге

А некоторые величины, например, такие как начальные длины заготовок и сечения вантовых элементов, вообще должны быть подобраны на основании результатов предварительных расчётов. Использование параметризованной расчётной модели моста значительно упростило все расчёты, что обеспечило сдачу проекта в жёстко установленные сроки (первую очередь моста планировалось

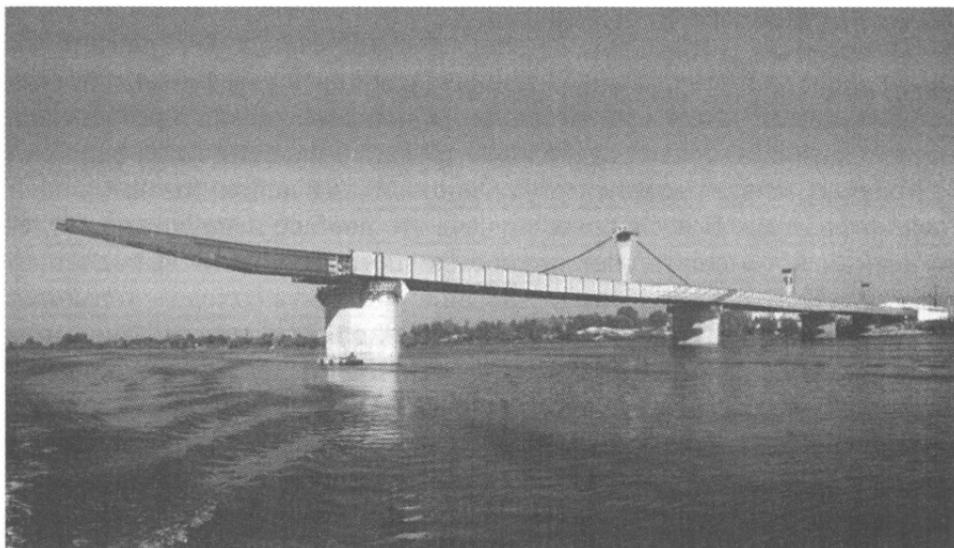
сдать к 300-летию Петербурга в мае 2003 года, тогда так работа над проектом началась лишь весной 2001).

Когда выяснялись новые значения исходных параметров, для внесения изменений в расчётную схему требовалось несколько минут, в то время как изменения в тексте непараметризованной расчётной схемы, состоящем из десятков страниц, занимали бы несколько дней. Тем более, подобная работа, выполняемая в графическом режиме, требовала куда как более значительных временных затрат.

Созданная с самого начала проектирования параметризованная расчётная схема оказалась весьма кстати и при расчёте монтажных состояний моста, где требовалось выяснять проектное положение конструкции после каждой операции, будь то прикрепление очередного блока или натяжение ванта. Модификация всего двух параметров – номера монтируемого блока и номера натягиваемого ванта позволили выполнить расчёт около сорока монтажных стадий менее чем за неделю (включая отладку параметризованной расчётной схемы). При этом расчёт монтажных состояний, выполненный ранее с ручной заменой числовых величин в схеме, занял один месяц и сопровождался постоянным и утомительным поиском неизбежных смысловых ошибок в составе исходных данных.

Особо следует отметить выгоду от применения параметризации при расчётах надвигки пролётных строений. Когда приходится иметь дело со стандартной трёхпролётной неразрезной балкой, надвигаемой с аванбеком и временными опорами, все критические и близкие к ним состояния известны заранее и можно довольствоваться анализом лишь некоторых состояний надвигаемого пролётного строения. В случае же уникального моста, тем более надвигаемого при помощи нелинейно работающего шпренгеля, заранее предсказать, где возможно достижение предельного состояния весьма и весьма затруднительно. Из этого вытекает необходимость расчёта всех возможных положений пролётного строения на стадии надвигки с как можно меньшим шагом. Что же делать, когда таких состояний доходит до тысячи? А если после расчёта придётся усиливать отдельные элементы конструкции и повторять расчёт или, по каким бы то ни было причинам, изменится положение или отметки опор, профиль накатного пути, будет принята новая схема конвейерно-тыловой сборки, изменён аванбек, устройство шпренгеля? Подобная ситуация, например, возникла при проектировании моста через р. Даугава в Риге, Латвия (рис. 2.17). Здесь смело можно сказать, что без применения параметризации расчёты невозможно было выполнить в разумные сроки. Имея параметризованную расчётную

схему, в которой на основании значений лишь нескольких определяющих параметров, вычисляются координаты сотен узлов, взаимное расположение опор и пролётного строения и прочие необходимые для расчёта величины, пользователь может не только в предельно сжатые сроки выполнить расчёт надвижки, но и уже непосредственно при производстве работ оперативно контролировать расхождения между теоретическим положением конструкции и данными геодезической съёмки.



**Рис. 2.17.** Надвижка пролётного строения моста в Риге

В целом применение параметризации позволяет быстро вносить изменения в расчётные схемы, помогает существенно увеличить продуктивность инженерного труда за счёт ускорения и упрощения процесса выполнения расчётов и уменьшения вероятности внесения ошибок (чисто «механического» характера) в исходные данные.

Так же важным аспектом в деле сокращения времени расчётов является возможность автоматической обработки результатов расчётов. Большинство программных комплексов либо просто сохраняют полученные усилия, напряжения, перемещения и прочие данные в той или иной форме, предоставляя пользователю самостоятельно разбираться во всём объёме информации, либо дополнительно позволяют произвести простейшие проверки согласно действующим нормативным документам. Но что делать, когда результаты предыдущих расчётов необходимо использовать в качестве исходных данных для последующих? Типичным примером, когда возникает такая проблема, является подбор усилий в вантовых

элементах, требующий вычисления коэффициентов разрешающей системы уравнений (или неравенств-ограничений) из результатов расчёта для единичных воздействий. В некоторых программах подобные действия запрограммированы заранее как функция поиска неизвестных коэффициентов к нагрузкам, но в большинстве же случаев пользователям придётся выполнять все расчёты, включая копирование данных, вручную, что опять же приведёт к появлению множества ошибок. Когда же расчётная модель, по сути, представляет собой программу, или скрипт, автоматически генерирующий исходные данные, запускающий расчёт и анализирующий результаты, позволяя выполнить указанные действия неоднократно, это существенно облегчает жизнь расчётчика, позволяя избежать непродуктивного труда и большего числа ошибок.

Конечно, не все расчёты могут выполняться с использованием идеи параметризации. В некоторых случаях это вообще невозможно, а где-то она может мешать или полностью препятствовать выполнению работы. К тому же, использование этого подхода повышает требования к расчётчику, который должен описать конструкцию не в виде картинка, а, пользуясь абстрактным мышлением, составить последовательность команд, да ещё и решить, какие именно параметры могут измениться в процессе работы над расчётной схемой. Впрочем, необходимые навыки приобретаются достаточно быстро и прочно входят в набор обычных приёмов работы.

## 2.5. Некоторые приемы

Из-за вычислительных погрешностей, связанных, главным образом, с округлением данных, на стадии формирования коэффициентов и свободных членов системы разрешающих уравнений они будут получены с некоторым приближением. Это обстоятельство, а также округления в процессе решения системы уравнений приводят к тому, что решение будет несколько отличаться от точного. Решение системы уравнений называется устойчивым, а матрица коэффициентов этих уравнений — хорошо обусловленной, если малое отклонение коэффициентов системы приводит к малым же изменениям компонентов решения.

В большинстве случаев заранее неизвестно, будет ли матрица коэффициентов разрешающей системы уравнений хорошо обусловленной или нет. Вычисление различных мер (чисел) обусловленности, в идеале определяющих скорость изменения

решения по отношению к изменениям в коэффициентах, не всегда решает проблему, поскольку эти числа чаще всего дают относительную, а не абсолютную характеристику этой скорости, т.е. указывают на то, что матрица **A** является лучше обусловленной, чем матрица **B**. Имеются методы понижения числа обусловленности или повышения точности решения системы уравнений на основе идеи *регуляризации*; применительно к решению задач строительной механики они достаточно хорошо описаны в работе [Шулькин, 1984]. Здесь же представляется полезным рассмотреть проблему с несколько иной точки зрения, а именно: какими могут быть некоторые причины появления плохой обусловленности и как эти причины могут быть истолкованы средствами механики, а также когда такое явление свидетельствует о неудачно выбранной расчетной модели.

Широко известно, что плохо обусловленные матрицы жесткости часто появляются в тех случаях, когда в одном узле конечно-элементной модели сопрягаются элементы с резко отличными жесткостными параметрами. Покажем на простом примере, как можно интерпретировать такую ситуацию в терминах механики. Оказывается, что плохая обусловленность присуща *«почти изменяемым»* конструкциям.

Действительно, изменяемой системе соответствует вырожденная матрица жесткости **K**, и это вырождение свидетельствует о том, что существует некоторый вектор перемещений  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , такой, что удовлетворяется однородная система разрешающих уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

т.е. перемещения совместны с отсутствием деформаций элементов, что соответствует нулевой нагрузке.

На рис. 2.18 представлена формально неизменяемая система, матрица жесткости которой имеет вид

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 + \alpha & -1 \\ -1 & 1 + \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Собственные числа этой матрицы  $\lambda_1 = \alpha$ ;  $\lambda_2 = 2 + \alpha$ , а число обусловленности

$$H = \lambda_2 / \lambda_1 = 1 + 2/\alpha.$$

При большой жесткости средней пружины по сравнению с жесткостью крайних пружин параметр  $\alpha$  мал и число  $H$  становится большим, что говорит о плохой обусловленности и возможной потере точности при решении уравнений с такой матрицей.

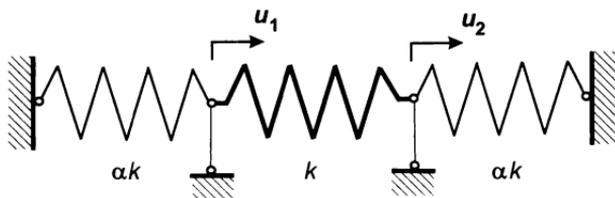


Рис. 2.18. Схема с плохо обусловленной матрицей жесткости

Нетрудно заметить, что механическое поведение рассматриваемой конструкции приближается к поведению изменяемой системы. Действительно, возможно перемещение средней пружинки как жесткого тела при пренебрежимо малом сопротивлении крайних пружин. Их реакция ввиду приведенного соотношения жесткостей вызывает ничтожную деформацию средней компоненты системы. Если же изменить соотношение жесткостей на обратное, то матрица жесткости будет иметь число обусловленности  $H \approx 1$ . В узле снова сходятся элементы с резко отличными жесткостями, но матрица жесткости хорошо обусловлена и соответствует теперь упругой конструкции (средней пружинке) присоединенной к земле практически недеформируемыми связями.

Классическое определение изменяемости как свойства системы иметь перемещения узлов, не вызывающие деформаций ее элементов (перемещения как жесткого механизма), было обобщено Ю.Б. Шулькиным [1977] и заменено следующим:

*система считается изменяемой, если она допускает малые ненулевые перемещения, при которых деформации элементов, если и отличны от нуля, то являются малыми более высокого порядка.*

Таким образом, логика кинематической классификации перестала быть черно-белой и обогатилась на основе сопоставления порядков малости перемещений и деформаций.

Стоит заметить, что отыскание «почти изменяемости», основанной на сопоставлении порядков возможных деформаций может свидетельствовать как о некотором пороке конструкции, так и о порочности ее моделирования. Не останавливаясь на анализе первого случая, когда, по-видимому, конструктор должен изменить систему, заметим, что для второго случая часто удается найти достаточно простой выход из положения, когда элемент с резко завышенной жесткостью объявляется абсолютно жестким, и это свойство учитывается на уровне составления системы разрешающих уравнений путем введения соответствующих связей [Перельмутер, Сливкер,

1979]. При расчете стержневых систем часто возникает необходимость учесть эксцентricность стыковки элементов в узлах (рис. 2.19,а).

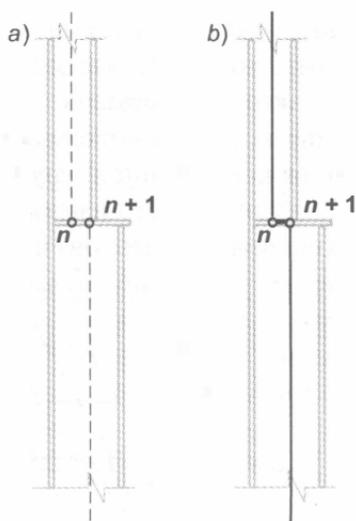


Рис. 2.19. Ступенчатый стык

Вставка между узлами  $n$  и  $n+1$  стержня с очень большой, но конечной жесткостью, как это представляется интуитивно возможным, приводит, как это было показано выше, к резкой потере точности вычислений за счет ухудшения обусловленности матрицы жесткости. Для обхода этой вычислительной трудности в расчетных комплексах предусматривается возможность использовать *бесконечно жесткие вставки* по концам стержневых элементов. Тогда расчетная схема имеет только один узел, занимающий произвольное положение на прямой между узлом  $n$  и узлом  $n+1$ , и концевые сечения соседних элементов присоединяются к этому узлу через жесткие вставки. Потеря точности в этом случае не наблюдается<sup>4</sup>.

Проще всего можно поступить, если этот единственный узел  $N$  совместить с узлом  $n$  или  $n+1$ , тогда абсолютно жесткая вставка появится только у одного из элементов. Платой за это упрощение является то, что внутренние силы будут определены лишь на упругой части стержня.

<sup>4</sup> Полезно заметить, что при вставке между узлами  $n$  и  $n+1$  стержня с очень малой жесткостью, потери обусловленности не происходит. Разумеется, что это верно в том случае, когда при нулевой жесткости вставки система сохраняет геометрическую неизменяемость.

Использование абсолютно жестких вставок широко практикуется в тех случаях, когда рассматривается плита или оболочка, подкрепленная ребрами, эксцентрично расположенными по отношению к срединной поверхности. Если эти ребра моделируются стержневыми элементами, то учесть эксцентриситет легко и удобно, используя абсолютно жесткие вставки (рис. 2.20). Необходимо отметить, что эксцентricность расположения ребер сказывается на результатах, относящихся к мембранной группе усилий, поэтому учет эксцентриситета в конструкции чисто изгибаемого типа (и набранной из соответствующих конечных элементов) ничего не дает.

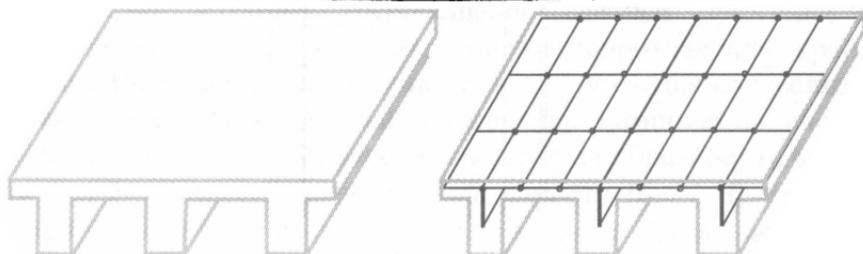


Рис. 2.20. Ребристая плита

Надо сказать, что при описании геометрии жестких вставок, размещаемых на концах стержней, во входной информации программных комплексов обычно задаются проекциями жестких вставок на оси глобальной координатной системы ( $X, Y, Z$ ). Между тем, для пользователя это не всегда удобно. Например, при расчете ребренных оболочечных конструкций, когда ребра моделируются стержнями с эксцентричным присоединением этих стержней к узлам, жесткие вставки, как правило, располагаются вдоль главных осей инерции поперечного сечения стержня.

В этом случае расчетчик может непосредственно снять с чертежа величины проекций жестких вставок на оси местной системы координат ( $\xi, \eta, \zeta$ ), связанной со стержнем, и ввести их в состав исходных данных к расчету конструкции. Однако, такой более удобный для пользователя способ задания жестких вставок редко допускается в программных комплексах. Дело в том, что несмотря на кажущуюся простоту в постановке чисто геометрической задачи о взаимной ориентации глобальной и местной систем координат, при определенных соотношениях параметров ее решение может и не существовать, а при существовании решения может отсутствовать единственность. Полный анализ возникающих при этом коллизий, детальный алгоритм и соответствующая процедура опубликованы в [Минькович, Сливкер, 1990].

Здесь же полезно указать, на то, что при использовании этого приема необходимо проявлять определенную осторожность, что явствует из следующего примера. При расчете стержневых систем обычно рассматриваются конструкции, у которых высота сечения не превышает  $1/8 \dots 1/10$  расстояния между узлами. Но встречаются конструкции, когда это отношение доходит до  $1/5$  или даже  $1/3$  (некоторые виды фундаментов под турбоагрегаты, диафрагмы зданий, гидротехнические сооружения и др.). В этом случае стержневая расчетная схема с точечными узлами, расположенными на пересечениях осей элементов, становится некорректной. Широко распространено предложение учитывать при этом реальные размеры «узлов», используя для этих целей стержневые элементы с бесконечно жесткими вставками. Пример подобной схемы, построенный в соответствии с такими рекомендациями представлен на рис. 2.21.

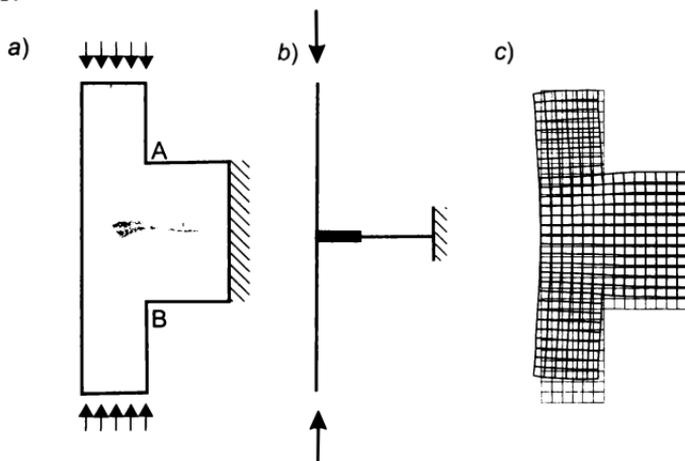


Рис. 2.21. К анализу работы узла конечных размеров

Этот прием настолько давно используется, что расчетчики практически никогда не задаются вопросом о правомерности использования гипотезы «недеформируемости узла». Вместе с тем, он далеко не лишен смысла, что видно из рассмотрения результатов расчета модельной задачи (рис. 2.21,а). В ее стержневой модели (рис. 2.21,б) горизонтальные перемещения отсутствуют, и вертикальный стержень не изгибается. Более детальная расчетная схема указывает на наличие горизонтальных перемещений (рис. 2.21,с), которые возникают вследствие стеснения деформаций сжатия по линии сопряжения АВ. Поскольку на противоположной стороне «стойки» этого стеснения нет, то возникает неравномерность распределения напряжений, эквивалентная изгибу.

Другим широко распространенным приемом, используемым при построении расчетных моделей, является объединение перемещений различных узлов схемы, т.е. принудительное навязывание значений перемещений одного узла другому. Этот прием используется чаще всего для того, чтобы промоделировать пренебрежение некоторыми деформациями системы. Так, например, если объединить горизонтальные перемещения узлов в местах примыкания ригеля к колоннам одноэтажной рамы, то это будет эквивалентно использованию гипотезы об абсолютной жесткости ригеля по отношению к деформациям растяжения-сжатия.

Для многоэтажного пространственного каркаса часто можно пренебречь податливостью перекрытий, считая их абсолютно жесткими дисками. Если в такой схеме объединить горизонтальные компоненты перемещений всех узлов каждого перекрытия, то идея абсолютно жесткого диска будет реализована. Однако следует обратить внимание на то, что при этом окажутся невозможными и закручивания перекрытий, которые смогут получать только поступательные перемещения. Такой эффект может оказаться неприятной неожиданностью для расчетчика, особенно в случае рассмотрения здания несимметричной структуры. Выходом из этого положения было бы применение абсолютно жесткого тела, моделирующего влияние перекрытий на работу каркаса.

Полезно обратить внимание еще на одно достаточно распространенное заблуждение, которое проще всего проиллюстрировать практическим примером. Так, при попытке учесть роль ядра жесткости в работе фундаментной плиты на симметричную относительно оси  $X$  нагрузку (рис. 2.22) была использована схема объединения перемещений в узлах примыкания ядра жесткости к плите, при этом объединялись линейные перемещения по оси  $Z$  (прогибы плиты) и углы поворота  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . В результате расчета оказалось, что в пределах ядра жесткости отсутствуют поперечные силы  $Q_x$ , но силы  $Q_y$  не равны нулю, что свидетельствовало о наличии изгиба плиты.

Объяснение этого результата связано с тем, что не учитывается разница между наложением связи (запретом перемещения) и объединением перемещений различных узлов. При объединенных линейных перемещениях вдоль оси  $Z$  соответствующая часть плиты может перемещаться только вертикально и создается впечатление, что и все углы поворота будут отсутствовать. Однако даже их объединение не может гарантировать равенство углов поворота нулю.

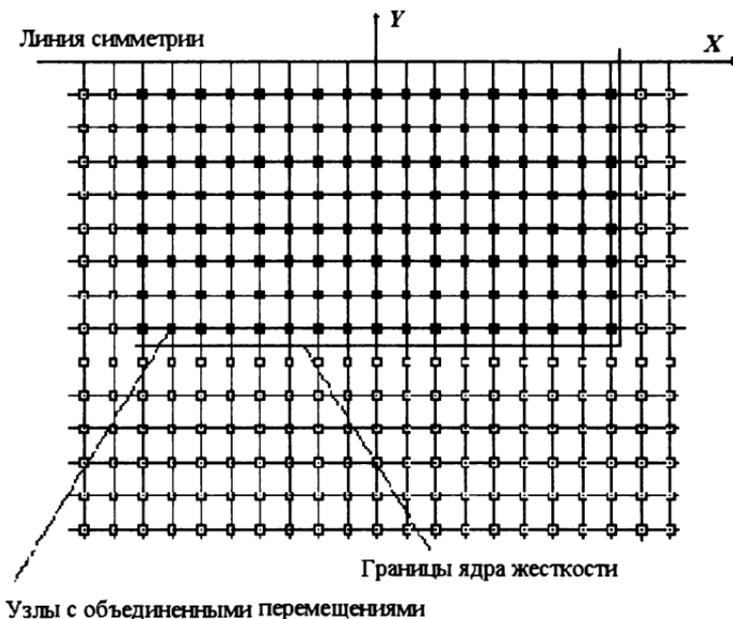


Рис. 2.22. Фрагмент фундаментной плиты

Это иллюстрируется простой схемой на рис. 2.23, где узлы 1, 2, 3 ... имеют одинаковое перемещение и *одинаковые, но не равные нулю* углы поворота.

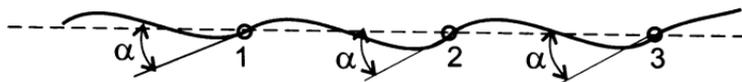


Рис. 2.23. Объединение углов поворота

В задаче по рис. 2.22 более правильным было бы задать в зоне расположения ядра жесткости абсолютно жесткое тело, гарантирующее не только равенство поворотов всех узлов ядра жесткости относительно соответствующих осей, но и сохранение условий размещения этих узлов в одной плоскости в деформированном состоянии конструкции.

Если в задаче по рис. 2.22 ось  $Y$  также является осью симметрии конструкции и нагрузки, и эта ось проходит через ядро жесткости, то тогда можно обойтись и без применения абсолютно жесткого тела. Действительно, в рассматриваемой ситуации достаточно наложить связи на узлы ядра жесткости, препятствующие поворотам  $\theta_x$  и  $\theta_y$ , и объединить линейные перемещения вдоль оси  $Z$ .

Жесткое тело можно использовать в качестве приема моделирования таких кинематических гипотез, как гипотеза прямых нормалей Кирхгоффа-Лява в теории пластин или оболочек, или гипотеза плоских сечений в теории стержней. Если, например, по каким-то причинам стержень понадобилось промоделировать набором более мелких конечных элементов, дающих решение не в стиле сопротивления материалов, а в стиле задач теории упругости, то, введя соответствующие связи, осуществляемые жестким телом, можно попытаться восстановить сопряженный подход. К такой идее неоднократно возвращался профессор Н.Н. Шапошников, декларируя ее дидактическую ценность. Она была реализована им в специальном обучающем комплексе программ «Моделирование работы несущих конструкций», ориентированном на обучение студентов по специальности САПР в Московском институте инженеров железнодорожного транспорта.

Возможность объединения не всех, а только части перемещений может использоваться для формирования некоторых специальных типов граничных условий в конструкциях нестержневого типа. Так, например, если возникает необходимость описать конструкцию опертой по контуру плиты ABCD, две половины которой шарнирно соединены по линии EF (рис. 2.24), то для этого достаточно, чтобы вдоль этой линии имелось две системы узлов (... , 6, 10, 42, ... и ... , 7, 11, 43, ...), к которым примыкают левая (ABEF) и правая (FECD) половины конструкции, и для смежных пар узлов объединить все перемещения, кроме поворота вокруг оси Y.

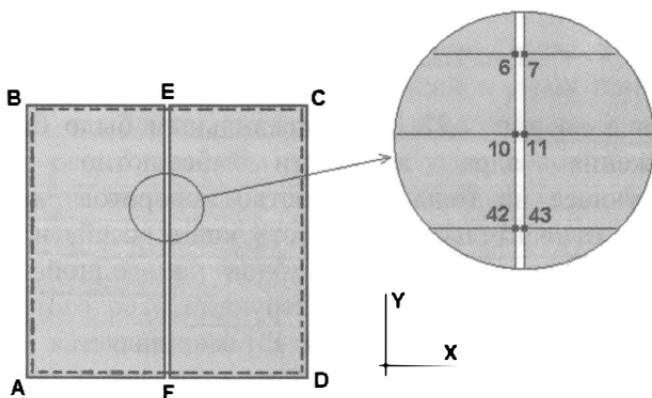


Рис. 2.24. Плита с цилиндрическим шарниром

Иной, более прямой способ решения этой же задачи основан на снятии связей в местах присоединения конечных элементов к соответствующим узлам [Париков, Сливкер, 1983], что не требует искусственного введения отмеченных выше двух систем узлов вдоль

линии шарнирного сопряжения плит. К сожалению, однако, большинство действующих программных комплексов почему-то не предусматривает возможности снятия связей в присоединении к узлам конечных элементов, отличных от стержневых.

Конечно, такое построение расчетной схемы можно использовать в тех случаях, когда количество рассматриваемых полосовых шарниров относительно невелико или же они расположены нерегулярно. Если же конструкция такова, что указанные шарниры располагаются параллельно друг другу и достаточно часто, как это, например, бывает при расчете шпунтовых стенок, то имеет смысл перейти к идеализации другого рода, а именно рассмотреть пластину с «размазанными» шарнирами, не воспринимающую изгиба в одном из направлений (конструктивно полубезмоментную, по определению [Гейзен, 1974]). Это легко реализуется при использовании конечных элементов из неизотропного материала, где отказ от работы на изгиб осуществляется заданием нулевого значения для соответствующего модуля упругости<sup>5</sup>. Полезно заметить, что переход от реальной составной системы к полубезмоментной почти не искажает напряженно-деформированного состояния, в то время как континуализация пластины с часто расположенными ребрами и ее представление в виде ортотропной системы связана со значительными искажениями поля напряжений за счет потери пиков моментов в окрестности ребер.

---

<sup>5</sup> Только не нужно думать, что это бесспорная рекомендация на все случаи жизни. Если речь идет об оболочке, то нужно быть уверенным, что используемая программа правильно отреагирует на искусственно введенную анизотропию и не распространит ее на физический закон для связи цепных (тангенциальных) напряжений и деформаций, что будет ошибкой. Кроме того, нужно убедиться, что задание нулевого значения некоторых компонент тензора анизотропии не приводит к вырождению задачи. Например, если речь идет о полубезмоментной пластине, покоящейся на упругом основании (скажем, моделирующей шпунтовое ограждение), то система разрешающих уравнений МКЭ окажется вырожденной — полубезмоментная пластина не оказывает сопротивления поворотам узлов относительно одной из координатных осей. Уход от вырожденности с помощью напращиваемой техники «штрафа» (задание отличного от нуля, но малого по величине соответствующего элемента тензора анизотропии) приводит к плохо обусловленной системе уравнений — возможен эффект почти вырожденной задачи. В безопасной проводке между Сциллой искажения в постановке задачи со штрафом и Харибдой вырождения при ее численном решении стоит полагаться только на опытных лоцманов расчетной инженерии.

## 2.6. Моносвязи и полисвязи в расчетной схеме

Теперь настало самое время посмотреть на описанные в предыдущем параграфе приемы с более общих позиций строительной механики.

Среди совокупностей самых различных данных, характеризующих расчетную схему, особая и ответственная роль принадлежит описанию связей.

Пусть вектор  $\mathbf{u}$  с компонентами в количестве  $n$  представляет собой искомый вектор неизвестных перемещений узлов дискретной системы. Понятно, что не все перемещения узлов независимы, часть из них заранее предопределена граничными условиями или, скажем, условиями симметрии. Возможны и другие, более сложные линейные зависимости между компонентами вектора  $\mathbf{u}$ , на механическом уровне представляющие собой связи, наложенные на перемещения системы.

Математически уравнения связей записываются в виде линейных однородных уравнений (абсолютно жесткие несмещаемые связи)

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} u_j = 0 \quad (i = 1, \dots, p), \quad (2.3)$$

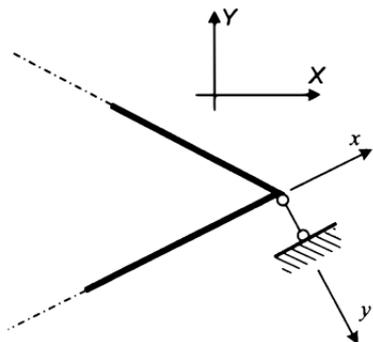
где  $p$  — количество связей.

Следуя [Перельмутер, Сливкер, 1976], введем в рассмотрение следующую классификацию связей, а именно, будем считать, что на систему наложена *моносвязь*, если уравнение этой связи содержит один и только один отличный от нуля коэффициент, в противном случае будем говорить о наличии *полисвязи* в системе.

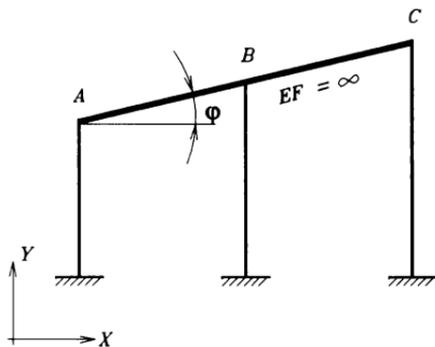
Понятно, что такая классификация отражает не механическое представление связи, а ее формально математическое определение, зависящее, к тому же, от выбора совокупности обобщенных координат системы (обобщенных перемещений), и продиктована лишь соображениями, связанными с описанием связей и реализацией соответствующих алгоритмов их учета в программах по расчету конструкций.

Дело в том, что и описание, и реализация алгоритмических операций с моносвязями выполняются намного проще, чем соответствующие операции с полисвязями. Поэтому, если путем выбора удобной системы координат можно перевести некоторую полисвязь в моносвязь, то это всегда рекомендуется делать. В этом заключена одна из причин, почему в наиболее продвинутых программах по расчету конструкций пользователю предоставляется возможность вводить локальную систему координат  $(x, y, z)$ , связанную

с конкретным узлом. Действительно, запрещение перемещений некоторого узла в определенном направлении будет представлять из себя моносвязь, если обобщенные координаты, связанные со степенями свободы этого узла, суть компоненты его перемещений относительно осей, одна из которых совпадает с направлением запрещения перемещений (рис. 2.25).



**Рис. 2.25.** Перевод полисвязи в моносвязь с помощью введения локальной системы координат в узле



**Рис. 2.26.** Полисвязь, образуемая нерастяжимым ригелем рамы

Понятно, что в исходной информации целесообразно считать по умолчанию, что локальная система координат  $(x, y, z)$  для произвольного узла системы совпадает с глобальной координатной системой  $(X, Y, Z)$ , если противное не оговорено явно. Собственно этим малым и ограничиваются возможности пользователя по переводу полисвязи в моносвязь. Читатель, без сомнения, заметит, что в терминологии, принятой в строительной механике, моносвязи ассоциируются теперь с *внешними* жесткими связями, накладываемыми на перемещения узлов системы.

Завершая разговор о моносвязях, коснемся применяемых способов их описания во входной информации к программам. Наиболее распространен вариант указания прикрепленных к «земле» узлов с перечислением степеней свободы, по которым запрещены перемещения (такой вариант применен, например, в комплексе SCAD, а также в таких, например, комплексах, как ANSYS и COSMOS). Но есть и альтернативный, хотя и менее распространенный подход, когда сначала создается список всех узлов, имеющих хотя бы одно закрепление и которым приписывается статус опорных узлов, а затем в этом списке у части (или у всех) опорных узлов снимаются частично связи между этими узлами и «землей» (в качестве представителя этого варианта укажем на

комплекс **GTSTRUDL**). Какую альтернативу предпочтет пользователь: «разрешено все, что не запрещено», или наоборот «все запрещено, кроме разрешенного»? Хотя авторам представляется, что первое удобнее, все же более гибкой была бы возможность предоставления пользователю самому выбирать концепцию этого «законодательства».

Полисвязи обладают большим разнообразием механического представления, а их наличие в системе часто обусловлено введением в расчетную схему абсолютно жестких элементов, хотя это и не единственный источник образования полисвязей. Рассмотрим некоторые примеры.

На рис. 2.26 изображена плоская рама с наклонным и нерастяжимым ригелем. Соответствующие уравнения полисвязей можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} u_A \cos\varphi + v_A \sin\varphi - u_B \cos\varphi - v_B \sin\varphi &= 0, \\ u_B \cos\varphi + v_B \sin\varphi - u_C \cos\varphi - v_C \sin\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $u$  и  $v$  — линейные перемещения соответствующих узлов вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

На рис. 2.27 представлены две группы стержней с жестким соединением стержней в группе, тогда как между собой эти группы объединены шарнирно.

Полагая, что в расчетной схеме имеются два самостоятельных, но совпадающих по пространственному расположению узла  $A$  и  $B$ , приходим к двум полисвязям, уравнения которых имеют вид

$$u_A - u_B = 0, \quad v_A - v_B = 0. \quad (2.5)$$

Кстати сказать, мы уже знаем, что этот (и аналогичные ему) случаи введения в расчетную схему полисвязей предусмотрены в таких программах как **SCAD** и **GTSTRUDL**, где они могут быть определены как объединение перемещений (точнее, части перемещений) узлов  $A$  и  $B$ .

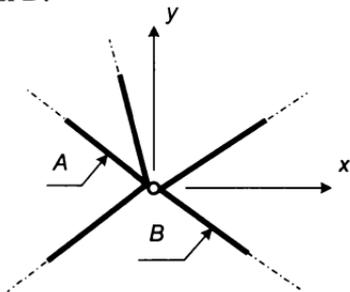


Рис. 2.27. Шарнирное сочленение двух узлов

Откладывая на некоторое время более подробное обсуждение преимуществ и недостатков четырехугольных и треугольных конечных элементов (скажем, в плоской задаче теории упругости), отметим здесь, что опытный пользователь расчетных программ при прочих равных условиях всегда предпочтет четырехугольник треугольнику по соображениям точности расчета. С другой стороны, треугольники хороши тем, что позволяют легко сгущать сетку конечных элементов в местах ожидаемых высоких градиентов напряженного состояния конструкции. Так вот, полисвязи и здесь могут помочь, позволяя и сгустить сетку, и не обращаться за помощью к треугольникам.

На рис. 2.28 изображен пример такого, казалось бы, недопустимого, сгущения сетки. Если для определенности считать, что используются классические конечные элементы с билинейной аппроксимацией перемещений, то для перемещений узла В, размещенного, например, в средней точке стороны АС, для сохранения совместности перемещений вдоль общих границ у инцидентных этому узлу В элементов, достаточно потребовать выполнения условий полисвязей следующего вида

$$u_B - 0,5(u_A + u_C) = 0, \quad v_B - 0,5(v_A + v_C) = 0 \quad (2.6)$$

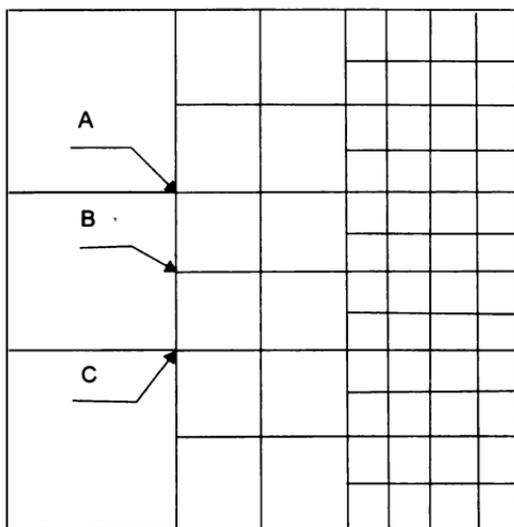


Рис. 2.28. Сгущение сетки конечных

Читатель легко обобщит этот случай на иные аналогичные ситуации. Этот последний пример показывает, в частности, что в идеале разработчики предусмотрят реализацию не только отдельных, хотя и безусловно важных частных случаев формирования

полисвязей вроде объединения перемещений или абсолютно жестких тел (о которых речь впереди), но и самый общий случай формирования и обработки полисвязей.

Если говорить о форме задания полисвязи в общем случае, то она могла бы представлять из себя декларативную команду, в которой в качестве параметров последовательно указываются:

- идентификатор узла,
- имя локальной степени свободы,
- коэффициент в уравнении полисвязи,
- ...
- признак окончания записи команды, например, «;»

Так, для первой из полисвязей, указанных в (2.6), такая команда могла бы выглядеть следующим образом

POLY	B U 1.0,	A U -0.5,	C U -0.5;
------	----------	-----------	-----------

Конечно же, это только один из возможных вариантов определения полисвязи общего вида, и мы ни в коей мере не претендуем на то, что это лучший из возможных вариантов.

До сих пор мы говорили о несмещаемых полисвязях, подразумевая под этим использование однородных уравнений полисвязей (2.3). Случай неоднородных уравнений полисвязей, записываемых в виде

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} u_j = d_i \quad (i = 1, \dots, p), \quad (2.7)$$

соответствует заданным в полисвязях дислокационным смещениям  $d_i$ . Естественно, что во входной информации к задаче описание этих величин логично отделить от описания полисвязей и отнести их к воздействиям, тем более, что в разных нагружениях правые части в (2.7) могут быть различными. Техническим источником дислокаций  $d_i$  могут быть неточности изготовления или монтажа конструкции, а также сознательно создаваемое конструктором с помощью полисвязей состояние самонапряжения системы — предварительное напряжение. Расчетным задачам, возникающим при анализе монтажных и эксплуатационных состояний конструкции с учетом предварительного напряжения посвящен отдельный раздел книги.

## 2.7. Абсолютно жесткие тела как типы конечных элементов

Как уже было сказано, абсолютно жесткое тело является важнейшим источником, связанным с введением полисвязей в расчетную схему конструкции. Нам представляется, что с пользовательской точки зрения абсолютно жесткое тело наиболее уместно рассматривать как некоторый специфический тип конечного элемента. С конечным элементом его роднит хотя бы то, что абсолютно жесткое тело объединяет инцидентные этому телу узлы. Грубо говоря, абсолютно жесткое тело может рассматриваться как предельный случай некоторого конечного элемента при устремлении жесткостных характеристик этого элемента к бесконечности.

Сначала договоримся о некоторых обозначениях и терминологии. Применительно к абсолютно жестким телам здесь и далее будем считать, что количество узлов, объединяемых одним жестким телом, равно  $r+1$ . Договоримся также, что по отношению к самому жесткому телу его узлы получают последовательную нумерацию от 0 до  $r$ . Далее, один из узлов жесткого тела (пусть это будет узел с местным номером 0) будем называть *ведущим* узлом или, если угодно, «*хозяином*» жесткого тела (*Master node*), все остальные инцидентные этому жесткому телу узлы назовем *ведомыми* узлами или «*рабами*» (*Slave nodes*). Таким образом  $r$  — число рабов в абсолютно жестком теле.

Введем местную правоориентированную декартову систему координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , связанную с жестким телом так, что начало этой системы координат совмещено с ведущим узлом, а в остальном выбор этой системы почти произволен и оставляется на усмотрение пользователя (как обычно, должен действовать и принцип умолчания, по которому местная система координат для трехмерного абсолютно жесткого тела образуется из глобальной координатной системы параллельным переносом ее начала в ведущий узел).

Компоненты вектора линейных перемещений узлов жесткого тела относительно местной системы координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  будем обозначать соответственно  $u, v, w$ . Компоненты вектора поворота тех же узлов (вектора вращений) относительно той же координатной системы обозначим  $\theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta$ . Наконец, обозначим буквами  $a_i, b_i, c_i$  координаты  $i$ -го ведомого узла в местной координатной системе абсолютно жесткого тела. Теперь попытаемся классифицировать абсолютно жесткие тела по *максимальной* геометрической размерности пространства узлов, объединяемых жестким телом.

### 2.7.1. Одномерные абсолютно жесткие тела

Все одномерные абсолютно жесткие тела связывают узлы, лежащие на одной прямой и объединяют одномерные перемещения.

Для одномерного жесткого тела определена только ось  $\xi$  местной системы координат (рис. 2.29), берущая начало в ведущем узле 0 (на то он и хозяин) и проходящая через все ведомые узлы.

Мы будем различать три подтипа одномерных жестких тел. Для первого подтипа условия полисвязей, накладываемые на перемещения его узлов записываются в виде

$$u_i = u_0 \quad (i = 1, \dots, r), \quad (2.8)$$

причем такие уравнения полисвязей формируются для всех ведомых узлов, то есть образуется ровно  $r$  уравнений полисвязей. На механическом уровне абсолютно жесткое одномерное тело этого подтипа объединяет линейные перемещения всех узлов этого тела в направлении оси тела. Жесткое тело этого подтипа можно представить себе как предельный случай вытянутых в цепочку вдоль оси  $\xi$  стержней фермы при устремлении жесткости этих стержней к бесконечности.

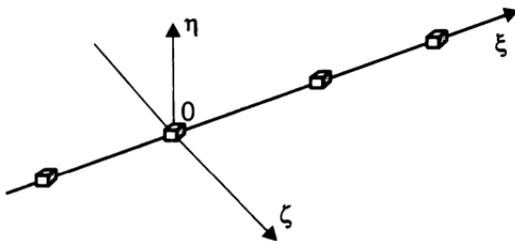


Рис. 2.29. Одномерное абсолютно жесткое тело

Представители одномерных абсолютно жестких тел второго подтипа объединяют повороты всех принадлежащих им узлов относительно оси  $\xi$ . Таким образом, для второго подтипа одномерного абсолютно жесткого тела уравнения полисвязей записываются в виде

$$\theta_{\xi i} = \theta_{\xi 0} \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.9)$$

Понятно, что этим подтипом моделируется предельный случай цепочки соосных валов, жесткость которых на закручивание бесконечно велика. Наконец, третий подтип одномерного абсолютно жесткого тела представляет собой объединение первых двух подтипов, с формированием полисвязей (2.8) и (2.9) общим количеством  $2r$ .

### 2.7.2. Двумерные абсолютно жесткие тела

Все узлы двумерного абсолютно жесткого тела по своему пространственному положению должны находиться в одной плоскости, причем оси  $(\xi, \eta)$  местной системы координат располагаются в этой же плоскости с началом в ведущем узле абсолютно жесткого тела (рис. 2.30).

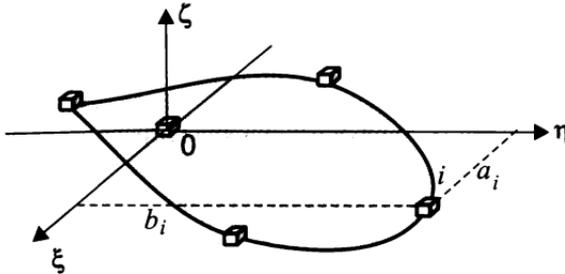


Рис. 2.30. Двумерное абсолютно жесткое тело

Будем различать два подтипа двумерных абсолютно жестких тел. Первый подтип перевязывает перемещения узлов жесткого тела в плоскости самого тела, то есть в плоскости  $(\xi, \eta)$ , следующими тремя уравнениями полисвязей для каждого из ведомых узлов (рабы, как и положено рабам, перемещаются вслед за хозяином по заранее предписанным правилам)

$$u_i = u_0 - b_i \theta_{\zeta 0}, \quad v_i = v_0 + a_i \theta_{\zeta 0}, \quad \theta_{\zeta i} = \theta_{\zeta 0} \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.10)$$

Абсолютно жесткое тело этого подтипа на механическом уровне можно интерпретировать как плоскую раму, жестко присоединенную ко всем своим узлам, в предельном случае бесконечной жесткости всех стержней рамы<sup>6</sup>. Второй подтип двумерного абсолютно жесткого тела связывает перемещения принадлежащих ему узлов при выходе их из плоскости жесткого тела. Уравнения полисвязей записываются для этого подтипа следующим образом

$$w_i = w_0 + b_i \theta_{\xi 0} - a_i \theta_{\eta 0}, \quad \theta_{\xi i} = \theta_{\xi 0}, \quad \theta_{\eta i} = \theta_{\eta 0} \quad (i = 1, \dots, r) \quad (2.11)$$

Для наглядности можно представить себе работающую из своей плоскости ростверковую раму, топологически копирующую плоскую раму в предельной модели первого подтипа и снабженную,

<sup>6</sup> Внимание! Для корректности предельного перехода эта рама должна быть внутренне статически определимой. Объяснение этому требованию — чуть позже. Удобно представлять себе эту раму в виде «паука» с телом в хозяйском узле и  $r$  лапами, идущими от тела к каждому из рабов.

естественно, абсолютно жесткими стержнями. Объединять эти два подтипа двумерного абсолютно жесткого тела в общий подтип не имеет смысла, поскольку образующееся в результате такого слияния жесткое тело ведет себя точно так же, как трехмерное абсолютно жесткое тело, рассматриваемое ниже. Итак, двумерное абсолютно жесткое тело образует  $3r$  уравнений полисвязей.

### 2.7.3. Трехмерные абсолютно жесткие тела

Трехмерное абсолютно жесткое тело (рис. 2.31) создает наиболее стеснительные условия рабам своего хозяина, лишая их всех степеней свободы за счет следующей совокупности полисвязей

$$\begin{aligned} u_i &= u_0 + c_i\theta_{\eta_0} - b_i\theta_{\zeta_0}, & \theta_{\xi_i} &= \theta_{\xi_0}, \\ v_i &= v_0 - c_i\theta_{\xi_0} + a_i\theta_{\zeta_0}, & \theta_{\eta_i} &= \theta_{\eta_0}, \\ w_i &= w_0 + b_i\theta_{\xi_0} - a_i\theta_{\eta_0}, & \theta_{\zeta_i} &= \theta_{\zeta_0} \quad (i = 1, \dots, r). \end{aligned} \quad (2.12)$$

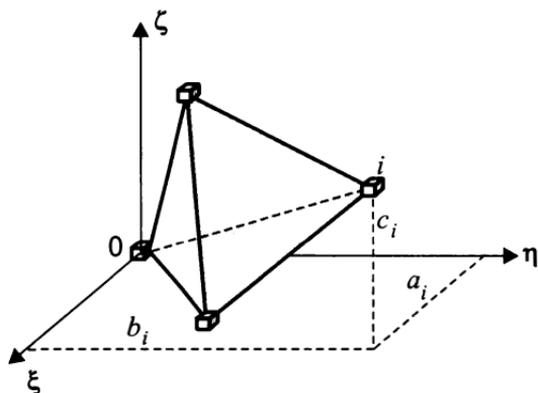


Рис. 2.31. Трехмерное абсолютно жесткое тело

В формулах (2.10), (2.11) и (2.12) использовано правило знаков для поворотов, согласно которому положительные вектора вращения  $\theta_{\xi}$ ,  $\theta_{\eta}$ , и  $\theta_{\zeta}$  формируются по правилу правого винта для соответствующих осей.

Итак, всего предлагается рассматривать 6 типов абсолютно жестких тел, из которых: 3 одномерных типа, 2 двумерных типа и один трехмерный тип.

Приведем несколько общих положений, относящихся к «законодательству» о взаимоотношениях рабов и хозяев в составе абсолютно жестких тел:

1. Минимальное число узлов в любом абсолютно жестком теле равно двум — у хозяина должен быть хотя бы один раб.
2. Некоторым (или даже всем) своим рабам хозяин имеет право дать частичную свободу. Этот (безусловно гуманный) акт закрепляется в исходной информации к расчетной схеме снятием соответствующих связей в месте прикрепления жесткого тела к ведомому узлу (узлам). Так например, если у двумерного абсолютно жесткого тела первого подтипа снять связи, препятствующие независимым поворотам рабов относительно оси  $\zeta$ , то для каждого из ведомых узлов из трех уравнений полисвязей (2.10) останутся законными только первые два, то есть

$$u_i = u_0 - b_i \theta_{\zeta 0}, \quad v_i = v_0 + a_i \theta_{\zeta 0} \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.13)$$

Понятно, что этот вариант полисвязей соответствует шарнирному прикреплению жесткого плоского тела ко всем своим ведомым узлам и может быть использован, например, для моделирования неподатливого перекрытия многоэтажного здания, о котором говорилось в разделе 2.4.

3. При снятии связей следует иметь в виду, что ведущий узел не может быть откреплен от жесткого тела даже частично. В каком-то смысле бремя хозяина жестче бремени раба.
4. Законодательство не запрещает хозяину иметь два или более поместий с различным набором рабов в каждом из своих поместий. Иными словами, один и тот же ведущий узел может участвовать в формировании нескольких абсолютно жестких тел.
5. Раб служит только одному хозяину и только в одном из его поместий! (Карло Гольдони попробовал посмотреть, что вытекает из ситуации со слугой двух господ — получилась комедия).
6. Моносвязи также запрещается накладывать на ведомые узлы — рабы должны быть максимально послушны хозяину, а упрямый раб — это уже не раб.
7. Не знаем, как это было у римлян, но во времена крепостного права на Руси существовал знаменитый Юрьев день — нечто вроде отпуска для крепостных. Так и в нашем случае пользователь имеет право для избранных им загружений деактивировать абсолютно жесткое тело, и тогда все рабы в этих загружениях становятся узлами, свободными от полисвязей.

Этот список можно было бы продолжить, но мы ограничимся приведенными замечаниями, поскольку конкретные реализации могут потребовать различных ограничений на применение абсолютно жестких тел — должны же различаться законы в разных странах.

Например, если одно из законодательств допускает существование вассала вассалов, то другое может этого и не разрешать. Понятно также, что вышеприведенный свод законов возник в головах авторов не из стремления оставить след в законотворчестве, да еще применительно к ушедшему в прошлое рабовладельческому строю, а из необходимости четко сформулировать совокупность ограничений на применение абсолютно жестких тел в расчетных схемах, нарушение которых приведет (или может привести) расчетную программу в тупиковое состояние. Впрочем, подчеркнем еще раз, что многое зависит от конкретной реализации — чем меньше ограничительных статей в своде законов о рабах и хозяевах, тем привлекательней программа для потребителя.

Мы еще не фиксировали каких либо правил, касающихся выбора ведущего узла в абсолютно жестком теле, так что пора поговорить и об этом. В принципе, мыслимы две возможности:

- программа самостоятельно из списка узлов жесткого тела выделяет подходящую кандидатуру на роль «хозяина» и, следуя предписанному кодексу, объявляет «рабами» все остальные узлы абсолютно жесткого тела;
- «хозяина» назначает хозяин в лице пользователя.

Само собой разумеется, что первая возможность принимается по умолчанию.

Далее, ведущий узел абсолютно жесткого тела может быть одним из узлов конструкции, а может и не принадлежать ей, становясь изолированным узлом при отсутствии абсолютно жесткого тела. Вариант с изолированным от конструкции хозяином может потребоваться, когда абсолютно жесткое тело присоединено к узлам конструкции с частично снятыми связями, а тогда неизолированный хозяин нарушал бы пункт 3 приведенного выше свода законов.

Надо сказать, что, с одной стороны, жесткие тела (да и вообще полисвязи) представляют из себя исключительно мощный инструмент формирования расчетных схем, позволяющий пользователю проявлять свою индивидуальную изобретательность в самых нестандартных ситуациях. С другой стороны, это и небезопасный инструмент — даже опытные расчетчики могут попасть в хорошо закамуфлированную и потому трудную для обнаружения ловушку. Вот почему применение сложных схем полисвязей следует отнести к исключительной прерогативе экспертов (см. табл. 2.1).

А вот и одна из таких ловушек: все уравнения полисвязей в системе должны быть линейно независимы. На механическом уровне

это означает, что расчетная схема не должна содержать статически неопределимую подсистему, целиком состоящую из абсолютно жестких элементов. В противном случае распределение усилий в системе не единственно [Рабинович, 1929]. Математически это условие может быть сформулировано через ранг матрицы  $C$ , составленной из коэффициентов  $c_{ij}$  системы уравнений (2.3), определяющей совокупность всех связей, наложенных на перемещения узлов системы

$$C = |[c_{ij}]| (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n), \quad \text{rank } C = p. \quad (2.14)$$

Если условие (2.14) нарушается и  $\text{rank } C < p$ , то это говорит о том, что связи наложены некорректно, и в процессе решения задачи возникнут неприятности. Хорошо организованная программа должна отслеживать эту ситуацию, выдавая пользователю не только предупреждающие сообщения, но и адресно информируя его о возможных ошибках в исходных данных.

И наконец, все, что было сказано здесь о полисвязях, представляет собой мнение авторов книги о желательном наборе возможностей оперирования с полисвязями того гипотетического программного продукта, которым они сами хотели бы располагать. В лучших из существующих комплексов эти пожелания реализованы лишь частично.

#### 2.7.4. Примеры использования абсолютно жестких тел

Одним из наиболее часто встречающихся случаев использования абсолютно жестких тел для описания свойств расчетной модели является случай, когда с их помощью моделируется работа некоторой части конструкции в условиях применимости гипотезы плоских сечений. На рис. 2.32 показан пример конструкции мощной плиты, подкрепленной широкими ребрами. Для такой конструкции использование приема, показанного на рис. 2.20, приведет к тому, что изгиб плиты в пролете между подкрепляющими ребрами будет заметно большим, чем в том случае, когда учитывается сокращение пролета плиты за счет ширины ребра.

Если использовать модель, показанную на рис. 2.32, где абсолютно жесткое тело условно ограничено пунктирной линией, то кроме того, что стержень, представляющий собой ребро (показан толстой линией) оказывается прикрепленным с нужным эксцентриситетом к узлам на срединной поверхности пластины, еще обеспечивается и неискажаемость в месте соединения с пластиной, что исключает ее

изгиб на этом участке. Заметим, что в данном случае уместно использовать пространственное жесткое тело, несмотря на то, что все его узлы лежат в одной плоскости.

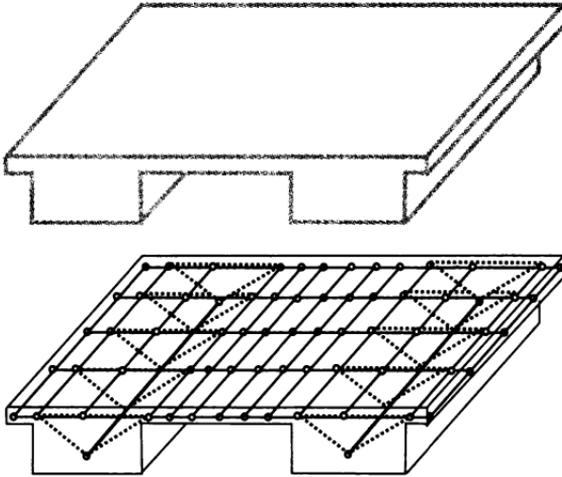


Рис. 2.32. Моделирование широкого ребра абсолютно жесткими телами

Неискажаемость контура поперечного сечения в схемах, составленных из тонкостенных стержней, часто реализуется за счет устройства диафрагм или аналогичных им элементов жесткости. Если такие элементы не нагружены и их напряженное состояние расчетчика не интересует, то чтобы не вводить в схему лишние степени свободы можно моделировать диафрагмы абсолютно жесткими только в своей плоскости телами (дисками).

Еще одним характерным примером может служить случай сопряжения пластин разной толщины с выравниванием одной из плоскостей, когда имеется скачкообразное смещение различных участков срединной поверхности пластины. Здесь целесообразно использовать абсолютно жесткое тело, содержащее расположенные вдоль линии изменения толщины пары узлов различных срединных поверхностей (рис. 2.33).

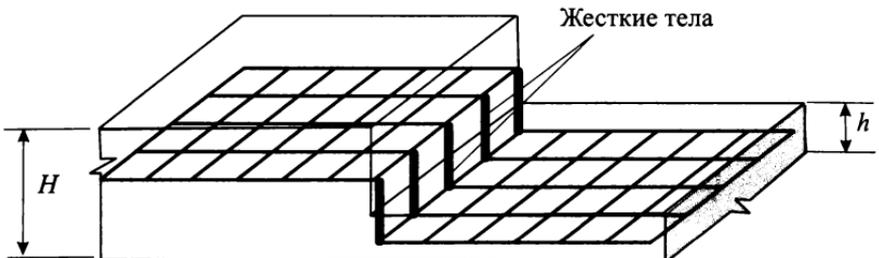


Рис. 2.33. Моделирование несоосного скачка толщин

Заметим, что если просто воспользоваться объединением перемещений верхних и нижних узлов, то не всегда удастся правильно описать особенности работы такого сопряжения, поскольку тангенциальное перемещение верхнего узла определяется не только тангенциальным перемещением нижнего узла, но и его углом поворота.

## 2.8. О нелинейных расчетах

Задачи расчета несущих конструкций, ориентированные на уточненное предсказание особенностей поведения системы на всех этапах ее работы, включая и этапы, предшествующие разрушению, чаще всего не могут быть решены методами линейной строительной механики. Отклонение от закона Гука (физическая нелинейность), отказ от рассмотрения условий равновесия в геометрических терминах недеформированного состояния (геометрическая нелинейность), учет возможного изменения расчетной схемы в процессе деформирования (конструктивная нелинейность) составляют обычный «набор нелинейностей», к которому апеллирует большинство исследователей [Новожилов, 1958], [Лукаш, 1978] и учебная литература [Рудых и др., 1998].

Этот набор далеко не полон. Он не включает рассмотрение эффектов, возникающих при протекании реологических процессов в материале (например, ползучесть) и нелинейные эффекты сопротивления движению типа сухого трения или другой природы, кроме того он опускает нелинейности, связанные с накоплением напряжений и деформаций в процессе изменения конструкции при ее создании (генетическую нелинейность). Последний тип нелинейности, конечно можно рассматривать, как вариант конструктивной нелинейности<sup>7</sup>, поскольку рассматриваются системы с меняющейся расчетной схемой, но здесь изменения происходят не в результате действия нагрузки, а целенаправленно, по замыслу проектировщика, что дает основания для ее отдельного рассмотрения и наименования.

Авторы прекрасно понимают, что даже первоначальное рассмотрение всех этих проблем, потребовало бы написания новой и большой книги (возможно, она когда-нибудь будет написана) и те фрагменты нелинейного анализа, которые представлены ниже, являются именно фрагментами.

<sup>7</sup> Этой точки зрения придерживаются авторы учебного пособия [Рудых и др., 1998].

Однако, не останавливаясь на подробностях, хотелось бы сформулировать хотя бы некоторые предостережения общего плана по проблематике нелинейного расчета. В частности, полезно привести здесь перечень вопросов из [Becker, 2001], которые должен задать себе пользователь программной системы перед попыткой решения нелинейной задачи:

- Насколько точны свойства материала?
- Чувствительно ли решение к точности задания данных о материале?
- Если да, то нужно ли выполнять экспериментальные испытания, чтобы получить надежный набор данных о свойствах материала?
- Влияет ли на результат начальное напряженно-деформированное состояние, например, имеющиеся в системе остаточные напряжения?
- Если да, как оно может быть определено?
- Имеется ли возможность существования неоднозначности решения, например различные пути в проблемах выпучивания или больше чем одно послекритическое состояние?
- Если да, то возможно понадобится создать некоторые искусственные начальные несовершенства, с помощью которых будет достигаться только одно интересующее пользователя решения?
- Влияет ли на поведение конструкции история нагружения?
- Будет ли поведение материала одинаковым при нагружении и разгрузке?
- При больших смещениях или больших поворотах будет ли оставаться постоянным направление действия нагрузки или оно будет следовать за искажением формы? ←
- Соответствуют ли предположения, которые используются в нелинейной модели, ожидаемой точности решения?
- Должен ли использоваться большой коэффициент запаса для компенсации возможной погрешности или неуверенности в адекватности решения?
- Каким образом будут проверяться решения?

Эти вопросы возникают вследствие целого ряда особенностей нелинейных задач, многие из которых непривычны для специалистов, чье становление происходило под влиянием линейных решений. Некоторые (далеко не все) из указанных особенностей представлены в табл.2.4.

Таблица 2.4.

Особенность	Линейные задачи	Нелинейные задачи
Зависимость смещений от нагрузки	Смещения линейно зависят от приложенной нагрузки	Зависимость смещения от нагрузки нелинейная
Связь между напряжением и деформацией	Принимается линейная зависимость между напряжением и деформацией	В задачах, где рассматривается физическая нелинейность, зависимость "напряжение-деформация" может являться нелинейной функцией напряжения, деформации и/или времени
Величина смещения	Изменение в геометрии благодаря смещению считается малым, и игнорируются при проверке равновесия	Смещения могут быть не малыми, для проверки равновесия необходимо использовать деформированное состояние
Свойства материала	Линейные упругие свойства материала обычно просто определяются.	Нелинейные свойства материала часто неизвестны, что может потребовать проведения дополнительного экспериментального исследования
Обратимость	Все деформации полностью обратимы и исчезают при разгрузке системы	После снятия нагрузки состояние системы может отличаться от исходного
Граничные условия	Граничные условия в течение расчета остаются неизменными	Граничные условия могут изменяться, например, меняются площади контакта.
Последовательность приложения нагрузок	Последовательность приложения нагрузок не важна, заключительное состояние от нее не зависит	Состояние конструкции может зависеть от последовательности приложения нагрузок
Время выполнения вычислений	Время выполнения вычислений намного меньше, чем при нелинейном расчете	Приращение нагрузки и итерации, требуют значительного времени, особенно, если указана высокая степень точности
Устойчивость вычислительного процесса	Решение чаще всего может быть получено без вмешательства пользователя	В трудных нелинейных задачах решение может сходиться недостаточно быстро, что иногда требует некоторого взаимодействия с пользователем
Использование результатов	Результаты расчета на разные нагрузки допускают сложение или умножение на некоторые коэффициенты, с целью объединения расчетных состояний	Разложение задачи на составляющие воздействия и последующее объединение результатов невозможно
Исходное напряженно-деформированное состояние	Исходное напряженно-деформированное состояние несущественно	Исходное напряженно-деформированное состояние обычно требуется задать, в особенности для нелинейности, связанной с поведением материала

В особенности следует предостеречь пользователя программных разработок, где представлена «физическая нелинейность». Дело в том, что во многих из них рассматривается задача, отличающаяся от линейной только тем, что функциональная линейная зависимость между напряжениями и деформациями заменена некоторой нелинейной функцией.

При этом такая функция принимается однозначной и одинаковой для нагружения и разгрузки. Однако такие нелинейно-упругие материалы в природе почти не встречаются, а отклонение от закона Гука у большинства конструкционных материалов связаны с явлениями пластичности. Но какой же пластический материал после разгрузки не дает остаточных деформаций?

Приведенное выше замечание часто парируется ссылкой на то, что будут рассматриваться только такие истории поведения конструкции, когда все нагрузки только возрастают. Но дело в том, что рост нагрузок не гарантирует роста напряжений во всех точках тела, поэтому, даже приняв такое самоограничение, нельзя себя застраховать от ошибки.

## 2.9. Одновременное использование нескольких схем

Практически любой объект проектирования, за исключением простейших, в процессе расчета рассматривается с различных точек зрения, и при этом вполне естественным было бы поставить в соответствие такому объекту не одну, а множество расчетных схем [Феодосьев, 1975], [Городецкий и др., 1989]. Каждая из таких схем вносит свой вклад в понимание работы сооружения, и лишь их совокупность дает более или менее адекватное представление о действительном характере его несущей способности. Кроме того, совпадение решений по разным (независимым) схемам резко повышает оценку достоверности результата.

Заметим, что возможность манипулирования спектром расчетных схем является действенным средством борьбы с чрезмерным усложнением расчетов. Ведь сверхдетализация системы часто является реакцией *неопытного* расчетчика на его потребность в точных данных по экстремальным результатам при отсутствии предварительной информации о месте появления такого результата. Тогда, на всякий случай, применяется детализированная расчетная схема, в надежде, что она не пропустит требуемый результат. Но этот результат может быть упущен из-за трудности осмысления и анализа

резко увеличивающегося потока информации, исходящего из сложной расчетной модели. Дело в том, что, начиная с некоторого уровня сложности системы, способность человека формулировать осмысленные и точные утверждения о поведении системы начинает резко падать. Здесь имеет место некоторый весьма отдаленный аналог принципа неопределенности Гейзенберга в отношении детальности и информативности результатов расчета, которые выступают в роли альтернирующих параметров. Отсюда стремление опытного расчетчика к использованию достаточно простой модели, а поскольку, в силу своей простоты, она не может охватить все стороны явления, то возникает необходимость создать несколько различных расчетных моделей.

До относительно недавнего времени и опытные расчетчики не слишком широко использовали приемы работы с набором расчетных моделей. Это было связано с достаточно большой трудоемкостью подготовки и проверки расчетной схемы, для выполнения которой требовалось зачастую затратить несколько человеко-дней, а календарные сроки такой работы растягивались на недели. Тогда предпочитали сделать достаточно универсальную подробную модель, выверка которой выполнялась только один раз. Сейчас, когда такая работа существенно облегчена современными средствами диагностирования, и работа в интерактивном режиме исчисляется максимум часами, указанное соображение во многом теряет свою силу.

Следует учитывать, что ряд простых расчетных моделей может дать более точное знание, чем одна сложная (переусложненная) расчетная схема, результаты расчета которой достаточно трудно осмыслить. На эту сторону проблемы указывал академик В.В.Новожилов, отмечая, что анализ результатов расчета по сложной модели напоминает обобщение и осмысление большого массива экспериментальных данных, а оценка явления в целом (с помощью простых расчетных моделей) позволяет с большим пониманием подойти как к построению, так и к анализу уточненной модели [Новожилов, 1979].

К сожалению, большинство современных программных систем мало приспособлены к такому режиму работы. Они не имеют ни понятийного, ни функционального инструментария для обмена информацией между несколькими параллельными расчетными моделями одного и того же объекта, они также не могут обмениваться результатами расчета таких моделей. Этот инструментарий еще предстоит создать.

В хорошей программной системе необходимо предусмотреть возможность сопоставления результатов расчета по различным схемам. Такие оценки должны выполняться по разным типам

результатирующих данных как локально (поиск наибольших различий с указанием элементов или узлов системы, где они реализуются), так и «в среднем по области» (для схемы в целом, для фрагмента или подсхемы).

Представляется возможным сконструировать усредненную оценку различия сопоставляемых расчетных моделей путем сравнения упругих потенциалов для системы в целом и любой ее части. Поскольку полный перебор любых частей расчетной схемы может оказаться слишком сложным (а для континуальных систем попросту невозможным), то предлагается ограничиться некоторой выборкой таких подсхем.

По-видимому, элементы выборки можно определять как набор конечных элементов, целиком попадающих в некую случайно назначаемую связную область пространства, занимаемого конструкцией. В такую область будут попадать различные для разных моделей части расчетной схемы, но при достаточно большом числе попыток «ошибка дискретизации подсхем», скорее всего, должна играть небольшую роль.

В качестве меры несходства  $dK_{rs}$  сопоставляемых подсхем  $r$  и  $s$  примем величину относительной разности их упругих потенциалов  $E_r$  и  $E_s$

$$dK_{rs} = 2(E_r - E_s)/(E_r + E_s). \quad (2.15)$$

Из-за случайности выбора подсхем и результаты сравнения  $dK_{rs}$  будут величинами случайными. Поэтому, в качестве критерия сопоставления для схемы в целом можно принять такую характеристику как взвешенное среднее по всем выборкам значение  $dK_{rs}$ . Весовой коэффициент  $\omega$  произвольной выборки берется как относительный объем рассматриваемой случайной области. Мы предполагаем, что при проведении достаточно длинной серии сопоставлений значение среднего должно постепенно стабилизироваться и, начиная с некоторого момента, трудно ожидать существенного изменения результата при увеличении размера выборки. Заметим, что при случайных выборках не исключена вероятность выпадения очень малой подобласти пространства, в которую попадет незначительная (возможно, нулевая) часть расчетной модели, и, в силу этого, будет невелико изменение ранее накопленных характеристик сопоставления. Поэтому, при выработке правила остановки нельзя полагаться на оценку текущего приращения среднего значения, а следует применять правила, аналогичные тем, что используются в алгоритмах случайного поиска.

Если эта гипотеза верна, то применительно к сопоставлению двух схем  $r$  и  $s$  алгоритм вычислений будет иметь следующий вид:

**Этап 0 (подготовительный):**

$$j = 1;$$

Вычисляются упругий потенциал  $E_{all,r}$  всей расчетной схемы  $r$  и упругий потенциал  $E_{all,s}$  всей расчетной схемы  $s$ ;

Определяются исходные значения для среднего и среднеквадратичного уклонения:

$$K_{rs} = 2|(E_{all,r} - E_{all,s})/(E_{all,r} + E_{all,s})|;$$

Определяется диаметр гиперсферы  $D$ , которой принадлежит конструкция.

*/\* Далее идет цикл по выборкам,  $j$  — номер пробы \*/*

$$M: j = j + 1;$$

**Этап 1:**

Выбирается подобласть со случайным центром и случайным диаметром  $d_j$  (положение центра равномерно распределено в области гиперсферы, описанной вокруг конструкции, диаметр равномерно распределен на интервале значений от нуля до  $D/2$ );

Определяется весовой коэффициент  $\omega_j = d_j/D$ .

**Этап 2:**

Определяются части расчетных схем, попавшие в подобласть.

**Этап 3:**

Для каждой из сопоставляемых пар расчетных схем вычисляется упругий потенциал подобласти ( $E_r(j)$  и  $E_s(j)$ );

**Этап 4:**

Вычисляется очередной член в ряду случайных сопоставлений:

$$dK_{rs}(j) = 2\omega_j(E_r(j) - E_s(j))/(E_r(j) + E_s(j));$$

**Этап 5:**

Уточняются значения среднего и среднеквадратичного уклонения:

$$K_{rs} = [(j - 1) * E_{rs}(j-1) + dK_{rs}(j)]/j;$$

**Этап 6:**

Проверка на окончание цикла:

Если условия окончания не выполнены, то переход на

метку  $M$ ;

Проиллюстрируем предложенный выше способ достаточно простым примером. Рассмотрим две расчетные схемы, представленные на рис. 2.34, *a* и 2.34, *b*.

Первая расчетная схема представляет собой ферменную конструкцию, для которой упругий потенциал  $E_a$  любой подсхемы, построенной на интервале  $[x_B, x_E]$  со случайно выбранными границами выражается суммой слагаемых типа  $N_i^2 L_i / EA_i$ , где  $N_i$  — усилие,  $L_i$  — длина,  $EA_i$  — жесткость на растяжение-сжатие, а суммирование распространяется на все элементы подсхемы (рис. 2.34,с). Если ввести переменные-индикаторы  $z_i$ , равные единице в том случае, когда стержень целиком принадлежит интервалу  $[x_B, x_E]$ , и нулю в противном случае, то можно записать

$$E_a = \sum_{i=1}^n z_i N_i^2 L_i / EA_i \quad (2.16)$$

здесь  $n = 24$  — общее число стержней.

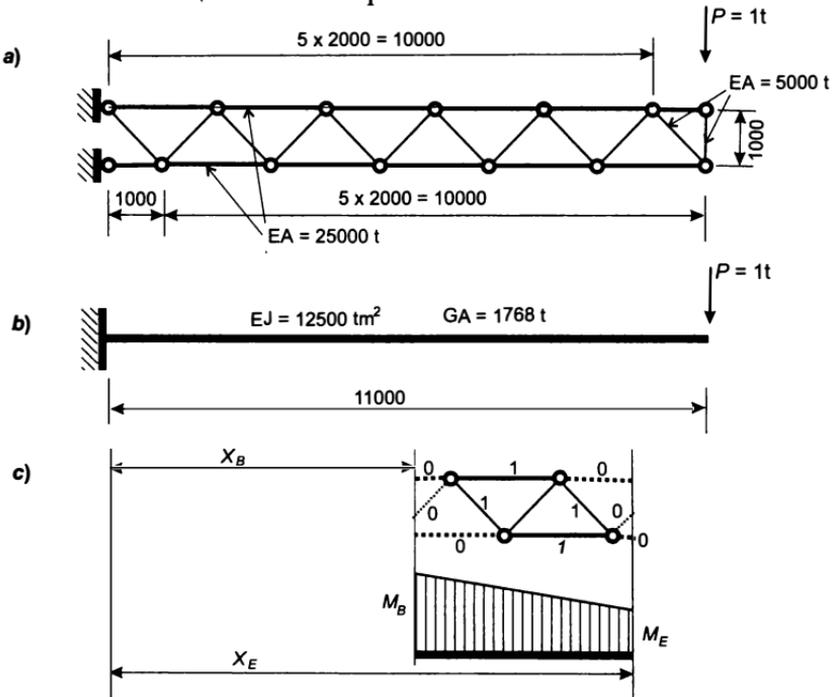


Рис. 2.34. Пример сопоставления расчетных моделей

Для второй расчетной схемы, представленной в виде стержня Тимошенко с изгибной и сдвиговой жесткостью, соответствующей жесткости поясов фермы [MacLeod, 1995], упругий потенциал

$$E = \int_L [M^2(x)/EI + Q^2(x)/GA] dx, \quad (2.17)$$

где интегрирование ведется по всей длине стержня  $L$ .

Все вычисления приведены в табл. 2.5 для всей схемы в целом (проба 1) и следующих четырех последовательно выбранных подсхем, границы которых установлены на основании работы датчика случайных чисел.

Таблица 2.5.

	Продольная сила, Т	Упругий потенциал, Тм	Переменные-индикаторы $z_i$ для пробы:					
			1	2	3	4	5	
Верхний пояс:								
1	10,000	0,00800	0	0	0	0	0	
2	8,000	0,00512	0	1	0	0	0	
3	6,000	0,00288	0	1	0	1	0	
4	4,000	0,00128	0	1	0	1	0	
5	2,000	0,00032	0	1	0	0	0	
6	0,000	0,00000	0	0	0	0	0	
Нижний пояс:								
1	-11,000	0,00484	0	0	0	0	0	
2	-9,000	0,00648	0	0	1	0	0	
3	-7,000	0,00392	0	1	0	0	0	
4	-5,000	0,00200	0	1	0	1	0	
5	-3,000	0,00072	0	1	0	1	0	
6	-1,000	0,00008	0	0	0	0	0	
Раскосы:								
1	1,414	0,00057	0	0	0	0	0	
2	1,414	0,00057	0	0	1	0	0	
3	1,414	0,00057	0	1	1	0	0	
4	1,414	0,00057	0	1	0	0	0	
5	1,414	0,00057	1	1	0	1	0	
6	1,414	0,00057	0	1	0	1	0	
7	1,414	0,00057	0	1	0	1	1	
8	1,414	0,00057	0	1	0	1	0	
9	1,414	0,00057	0	1	0	1	0	
10	1,414	0,00057	0	1	0	0	0	
11	1,414	0,00057	0	0	0	0	0	
Стойка:	- 1,000	0,00020	0	0	0	0	0	
Начало области, м		0,00	3,31	1,56	0,26	3,72	5,14	
Конец области, м		11,00	5,45	10,57	3,92	9,29	7,74	
$E_a \times 100$		4,211	0,057	2,08	0,762	0,973	0,057	
$E_b \times 100$		4,171	0,877	2,747	2,562	1,328	0,590	
$dK_{rs} \times 100$		0,010	-0,342	-0,227	-0,360	-0,156	-0,389	
Накопленное $K_{rs}$		0,010	-0,166	-0,186	-0,230	-0,215	-0,244	

На рис. 2.35 показан график изменения среднего значения величины оценки  $K_{rs}$  для первых пятисот проб. Из графика видно, что

оценка стабилизируется в окрестности значения  $K_{rs} = -0,185$ , что подтверждает высказанную выше гипотезу (по крайней мере, в рамках рассмотренного примера).

Введенная мера несовпадения расчетных схем  $K_{rs}$  ничего не говорит о том, какая из сопоставляемых схем лучше, а какая хуже соответствуют расчетной ситуации, да она и не предназначалась для этих целей. Эту меру можно использовать лишь для отбора более близких друг к другу возможных моделей, хотя для суждения о связи получаемых значений со степенью близости расчетных схем понадобится накопить определенный опыт. В частности, найденная в рассмотренном выше примере величина  $K_{rs} = -0,185$ , по-видимому, принадлежит к диапазону значений, характеризующих достаточно тесную связь расчетных схем. Это следует из того, что в инженерной практике переход от моделей по рис. 2.34,*a* к моделям по рис. 2.34,*b* используется очень широко, и, насколько это известно, к неприятным последствиям не приводил ни разу.

Еще одним измерителем тесноты связи между расчетными схемами мог бы послужить коэффициент корреляции между последовательностями значений упругих потенциалов  $E_{r(j)}$  и  $E_{s(j)}$ , которые вычисляются на случайно генерируемых подсхемах. Для рассмотренного выше примера этот коэффициент оказался равным 0,928, что свидетельствует о высокой степени стохастической связи рассматриваемых последовательностей.

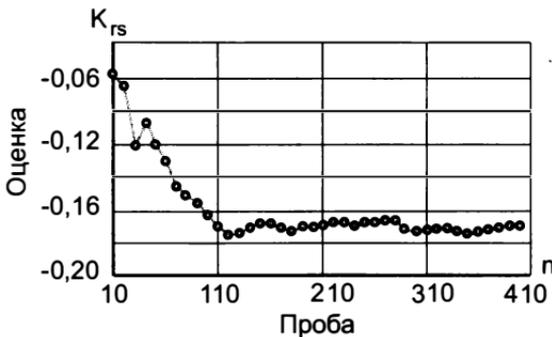


Рис. 2.35. Изменение результатов сопоставления

Заметим, что все сопоставления производятся при вполне определенном виде нагружения на систему и близость расчетных схем, установленная при одном нагружении, может не подтвердиться при другом.

## 2.10. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных

О необходимости экспериментального обоснования правильности используемых расчетных моделей писалось и говорилось бесчисленное число раз (см., например, [Гольденблат, Бажанов, 1970], [Мастаченко, 1971], [Подольский, 1973]). Но, несмотря на это, такого рода работы выполняются не очень часто, а их методологическое обеспечение оставляет желать лучшего. Интерпретация результатов эксперимента чаще всего сводится к выборочному сопоставлению некоторых измерений с результатами расчета и выводам типа «...наблюдается хорошее соответствие», «...данные качественно совпадают» или же, в лучшем случае, «... расхождение не превышает столько-то процентов».

Имеются многочисленные предложения по использованию метода наименьших квадратов, идеология которого стала господствующей и создала традицию применять в качестве меры близости сумму квадратов разностей между компонентами вектора экспериментальных данных  $y_i^e$  и их расчетных значений  $y_i$

$$S_0 = \sum_{k=1}^n (y_k^e - y_k)^2 . \quad (2.18)$$

Если в эксперименте измеряются разнородные величины (например, перемещения, углы поворота, относительные деформации и т.п.), то в функционал (2.18) вводятся весовые коэффициенты  $\omega_k$ , определяющие не только степень доверия к различным измерениям, как это обычно делается при использовании взвешенных сумм, но и нормирующие их к однородному массиву данных.

С другой стороны, абсолютные разности типа  $(y_k^e - y_k)$  редко используются практиками при оценке точности измерений. Чаще применяется относительная погрешность

$$\delta_k = (y_k^e - y_k) / y_k^e , \quad (2.19)$$

называемая «конструктивной поправкой» [Мастаченко, 1971]<sup>8</sup>. С ее помощью можно построить функционал

<sup>8</sup> Экспериментаторы обычно предполагают, что разница между единицей и средним значением конструктивных поправок определяет систематическую погрешность, а разброс их значений — случайную. Но это оказывается справедливым только для «хорошо запроектированных конструкций» и в природе подтверждается далеко не всегда, особенно в тех случаях, когда проверки выполняются для резко отличающихся друг от друга вариантов нагружений.

$$S_{\delta} = \sum_{k=1}^n (y_k^e - y_k)^2 / (y_k^e)^2, \quad (2.20)$$

в котором роль весовых коэффициентов играют величины  $1/(y_k^e)^2$ , а однородность обеспечивается в силу безразмерности величин  $\delta_k$ . Разницу между экспериментальными и расчетными значениями в большей мере оттеняют максимальные относительные отклонения

$$\Delta_k = \frac{y_k^e - y_k}{\min(|y_k^e|, |y_k|)}. \quad (2.21)$$

Если проведено по  $d$  измерений каждой из исследуемых величин и найдены экспериментальные средние

$$\bar{y}_k^e = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d y_{kj}^e, \quad (2.22)$$

то мерой расхождения этих средних с расчетными данными будет величина

$$S_{ad}^2 = \frac{d}{n-1} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\bar{y}_k^e - y_k}{\min(|\bar{y}_k^e|, |y_k|)} \right]^2, \quad (2.23)$$

называемая дисперсией адекватности.

Для выработки обоснованных суждений о величине дисперсии адекватности (2.23) следует иметь некоторый масштаб сопоставления, характерный для исследуемой конструкции. В качестве такого масштаба предлагается принять меру разброса результатов повторных измерений. Если этот разброс велик, то физическая модель сама по себе является достаточно неустойчивой по отношению к тем случайным условиям, которые реализуются при каждом повторении эксперимента. В этих условиях требование хорошего совпадения расчетных и экспериментальных данных перестает быть корректным. Иными словами, чем более стохастично поведение конструкции, тем труднее его точно предсказать.

Измерителем разброса экспериментальных данных является так называемая дисперсия воспроизводимости

$$S_{cp}^2 = \frac{1}{n(d-1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \left[ \frac{y_{kj}^e - \bar{y}_k^e}{\bar{y}_k^e} \right]^2. \quad (2.24)$$

При обычно используемых предположениях о распределении ошибок [Адлер и др., 1976] проверка адекватности может быть выполнена по критерию

$$F_e = \frac{S_{ad}^2}{S_{cp}^2} \leq F(v_1, v_2, \alpha), \quad (2.25)$$

где  $F(v_1, v_2, \alpha)$  — табличное значение критерия Фишера, определяемое в зависимости от числа степеней свободы числителя  $v_1 = n - 1$  и числа степеней свободы знаменателя  $v_2 = n(d - 1)$  при уровне значимости  $\alpha$ .

Заметим, что использование относительных ошибок  $\delta_k$ , например, при уточнении параметров расчетной модели по методу наименьших квадратов, по-видимому, наиболее эффективно в тех случаях, когда в числе компонент  $y_k$  имеются несколько величин с большими по модулю абсолютными отклонениями ( $y_k^e - y_k$ ), резко выделяющимися на среднем уровне.

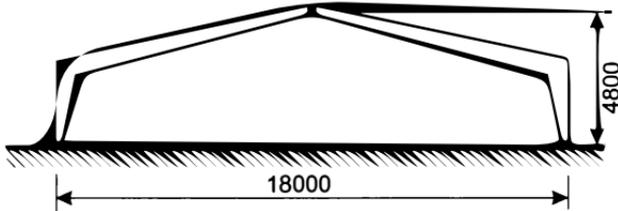
Таблица 2.6.

Значения напряжений в различных точках системы, кг/см <sup>2</sup>				
Расчетные	Экспериментальные			
	Опыт 1	Опыт 2	Опыт 3	Опыт 4
-170	-241	-273	-315	-389
-170	-147	-241	-115	-186
-170	-357	-144	42	-170
-170	-116	-205	-220	-99
-822	-777	-756	-633	-435
379	405	158	505	321
-469	-807	-722	-920	-247
2208	2121	2247	1459	1365
-166	168	189	-431	-483
-166	-142	-142	-326	-410
-157	-462	-283	-168	-142
-157	-120	-241	-126	-168
1474	1045	1303	1292	1382
-871	-344	-323	-071	-040
1477	1580	920	1208	929
-871	-323	-981	-428	-386
1477	1525	1378	1219	1819
-939	-984	-784	-462	-941
-833	-462	-662	-568	-357
-155	-225	-101	-251	-272
-155	-168	-126	-378	-347

Давая наибольший вклад в функционал (2.18), именно эти величины будут приближаться наилучшим образом, в то время как основная масса экспериментальных данных окажется приближенной хуже. При этом снижение точности в области малых по модулю значений ошибки может для уточняемой расчетной модели изменить знак расчетной величины и привести к потере физического смысла.

Использование относительных ошибок лишено этого недостатка. Что касается больших абсолютных отклонений, приближение которых ухудшается, то при их наличии чаще всего корректировке подлежат не параметры, а структура расчетной модели.

В качестве примера рассмотрим представленные в табл. 2.6 результаты испытаний рамной конструкции (рис. 2.36) из развитых двутавров, которые были выполнены в Киевском национальном университете строительства и архитектуры.



**Рис. 2.36.** Схема экспериментальной рамы

Вычисления по формулам (2.23) и (2.24) дают значения дисперсии адекватности  $S_{ad}^2 = 0,60667$  и дисперсии воспроизводимости  $S_{cp}^2 = 0,48021$ . Отношение  $F_e = 1,253$ , в то время как критерий Фишера для  $\nu_1 = 20$  и  $\nu_2 = 21 \times 3 = 63$  при уровне значимости  $\alpha = 0,95$  равен 1,65.

Поскольку  $F_e < 1,65$ , совпадение расчета с экспериментом можно считать удовлетворительным.

### 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

*Разделяй и властвуй*

**Латинское изречение.**

*Эта простая идея — разделить тело и властвовать над отдельными областями — оказалась чрезвычайно плодотворной, она обогнала по эффективности многие глубокие и тонкие идеи, попросту отменила ряд признанных ранее методов и похоронила для практики некоторые красивые теоретические построения аналитиков.*

**Рейтман М.И.** Залог прочности.

Многие факты, излагаемые в этом разделе, хорошо известны и, казалось бы, что о них не стоит писать. Но нам представляется интересной идея выявления определенной взаимосвязи этих фактов, которая не очень часто излагается таким же способом.

#### 3.1. Разрешающие уравнения

Мы будем пока что предполагать, что рассматривается система, содержащая некоторое вполне определенное количество узлов, к которым примыкают упругие элементы. Напряженно-деформированное состояние элементов описывается конечным набором статических и кинематических параметров. Пока что в этом (и только в этом) смысле система является конечноэлементной, следовательно здесь используется представление об известной процедуре конечноэлементного анализа (методе конечных элементов) не столько как о способе сведения континуальных задач к конечномерным, сколько как о методе исследования систем с конечным числом степеней свободы. Такой подход изложен, например, в известной монографии Л.А. Розина [1975]. Рассмотрение «внутреннего устройства» конечных элементов мы пока что отложим.

Если, как было сказано, не вникать в подробности, то всякий конечный элемент может характеризоваться некоторым набором

внутренних перемещений (или, если угодно, деформаций)  $\Delta_e$  и соответствующих им внутренних сил (усилий)  $s_e$ . Здесь и далее нижний индекс  $e$  подчеркивает принадлежность индексируемой величины отдельному конечному элементу. Под внутренним перемещением пока что понимается некоторая характерная для рассматриваемого элемента величина, например такая, как удлинение простого стержня, а упомянутое соответствие понимается в обычном смысле энергетической сопряженности, используемом в строительной механике, когда скалярное произведение векторов  $\Delta_e$  и  $s_e$  дает работу  $A_e = \Delta_e^T s_e$ . Векторы  $\Delta_e$  и  $s_e$  в рассматриваемом здесь случае линейно-упругой системы связаны друг с другом законом состояния (физическим законом), выражаемым равенством

$$s_e = F_e \Delta_e \quad (3.1)$$

с симметричной положительно определенной (следовательно, невырожденной) матрицей  $F_e$ . Последнее предполагает, что любой, отличный от нулевого, вектор внутренних перемещений  $\Delta_e$  вызывает деформирование конечного элемента (изменение его формы и/или размеров), сопровождающееся накоплением строго положительной внутренней энергии в элементе. Это означает, в частности, что вектор  $\Delta_e$  не содержит форм перемещений конечного элемента как жесткого тела. Именно поэтому терминологически допустимо отождествлять, как это сделано выше, внутренние перемещения с деформациями конечного элемента.

Идея использования деформаций  $\Delta_e$  и внутренних сил  $s_e$ , связанных друг с другом невырожденной матрицей  $F_e$  восходит к старому предложению Дж. Аргирова [1968] о *нормальной (или естественной) форме* метода конечных элементов. Такое определение деформаций и усилий в рамках метода конечных элементов имеет некоторые методологические, а в нелинейных задачах и вычислительные преимущества [Аргирис, 1979], хотя физическая трактовка деформаций  $\Delta_e$  и усилий  $s_e$  иногда оказывается непривычной. Так, например, для треугольного элемента плоской задачи теории упругости в качестве нормальных координат  $\Delta_e$  принимаются относительные удлинения сторон треугольника, а соответствующие им обобщенными внутренними силами будут напряжения вдоль этих же сторон (рис. 3.1). Поле напряжений, построенное в таких компонентах, окажется достаточно причудливым, поэтому, если нормальная форма МКЭ используется при вычислениях, следует предусматривать «выравнивание» полей напряжений и приведение их к более удобному, привычному для инженера виду.

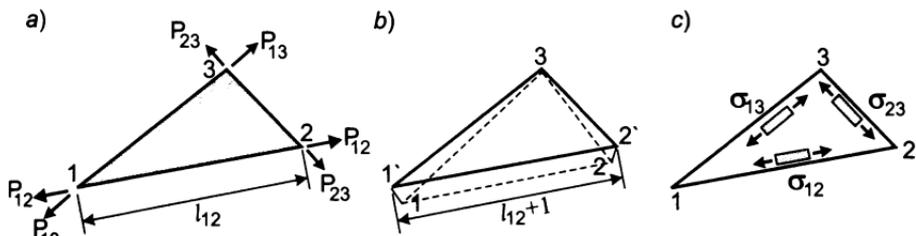


Рис. 3.1. Кинематические неизвестные естественной формы МКЭ

Внутренние перемещения элемента  $\Delta_e$  связаны с внешними для элемента перемещениями узлов примыкания  $u_e$  условиями совместности деформаций

$$\Delta_e = Q_e^T u_e + d_e, \tag{3.2}$$

а усилия  $s_e$  удовлетворяют условиям равновесия

$$Q_e s_e = p_e, \tag{3.3}$$

где  $d_e$  и  $p_e$  — векторы дислокационных (на элементах) и силовых (приведенных к узлам) воздействий соответственно<sup>1</sup>. То, что матрицы преобразований в (3.2) и (3.3) являются взаимно транспонированными, вытекает из сопряженности уравнений совместности деформаций (3.2) и уравнений равновесия (3.3), что, в свою очередь, следует из принципа возможных перемещений.

В результате стандартной операции *ассемблирования* конечных элементов, составляющих расчетную схему, получается полная система уравнений, а именно:

$$\begin{aligned} \text{уравнения равновесия} & \dots\dots\dots Qs = p, \\ \text{геометрические уравнения} & \dots\dots\dots \Delta = Q^T u + d, \\ \text{физические уравнения} & \dots\dots\dots s = F\Delta \end{aligned} \tag{3.4}$$

относительно неизвестных  $s$ ,  $\Delta$  и  $u$ .

Преобразования

$$\Delta_e = \Gamma_1 \Delta, \quad d_e = \Gamma_1 d, \quad u_e = \Gamma_2 u, \quad p_e = \Gamma_2 p, \quad s_e = \Gamma_3 s \tag{3.5}$$

реализуются матрицами, состоящими из единиц и нулей и (с точностью до деталей нумерации) определяемых матрицей инциденций «узлы-элементы» [Филин и др., 1983].

<sup>1</sup> Напомним, что под *дислокациями* понимаются начальные деформации, заданные в качестве независимых воздействий на систему.

Размерности векторов  $\mathbf{s}$ ,  $\Delta$ ,  $\mathbf{d}$  одинаковы и равны суммарному по системе числу  $m$  — количеству *внутренних* неизвестных сил. Размерности векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}$  также одинаковы и равны общему числу *внешних* узловых неизвестных перемещений  $n$ . Матрица уравнений равновесия  $\mathbf{Q}$  имеет размерность  $n \times m$ . Квадратная симметрическая матрица  $\mathbf{F}$  порядка  $m$  имеет блочно-диагональную структуру, число ее блоков равно количеству элементов, размер каждого блока — количеству внутренних неизвестных соответствующего элемента. В частности, для ферм матрица  $\mathbf{F}$  будет диагональной.

Поскольку, в силу физических уравнений в (3.4),  $\mathbf{F}$  является матричным коэффициентом при внутренних перемещениях  $\Delta$  в выражении для внутренних сил  $\mathbf{s}$ , А.Р. Ржаницын логично предложил называть эту матрицу матрицей *внутренней жесткости*. Естественно, что обратная к  $\mathbf{F}$  матрица немедленно получает имя матрицы *внутренней податливости*.

### 3.1.1. Метод перемещений

Если, как это принято в *методе перемещений*, в качестве основных неизвестных определить узловые перемещения  $\mathbf{u}$ , то, исключая из (3.4) векторы  $\mathbf{s}$  и  $\Delta$ , легко получить

$$\mathbf{QFQ}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{QFd}. \quad (3.6)$$

Число неизвестных компонент  $n$  вектора перемещений  $\mathbf{u}$  в строительной механике называют *степенью кинематической неопределимости системы*.

Предполагая, что матрица жесткости<sup>2</sup> системы

$$\mathbf{K} = \mathbf{QFQ}^T \quad (3.7)$$

является невырожденной (более того, положительно определенной), что гарантируется в том случае, когда ранг  $r$  матрицы  $\mathbf{Q}$  равен числу ее строк  $n$  (а это, как будет показано ниже, соответствует случаю геометрически неизменяемой системы), получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{QFd}). \quad (3.8)$$

<sup>2</sup> А.Р. Ржаницын [1982] предложил называть эту матрицу *матрицей внешней жесткости*. Соответственно обратную матрицу  $\mathbf{K}^{-1}$  Ржаницын называет *матрицей внешней податливости*. Такое уточнение названий матриц жесткости и податливости определениями «внешние» и «внутренние» позволяет избежать терминологической путаницы, возникающей иногда в силу перегруженности самих понятий «жесткость» и «податливость».

Усилия в элементах вычисляются как

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d}) = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{F} \mathbf{d}, \quad (3.9)$$

и этим завершается определение параметров напряженно-деформированного состояния системы.

Возвращаясь к формуле (3.7), отметим, что этой формулой устанавливается зависимость матрицы внешней жесткости  $\mathbf{K}$  от матрицы внутренней жесткости  $\mathbf{F}$ .

Следуя Ржаницыну<sup>3</sup>, попытаемся построить и обратную зависимость, выразив матрицу внутренней податливости  $\mathbf{F}^{-1}$  через матрицу внешней податливости  $\mathbf{K}^{-1}$ . С этой целью подставим в геометрические уравнения группы (3.4) выражение для  $\mathbf{u}$  из (3.8), заменив там  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{s}$  с помощью уравнений равновесия. В результате получим

$$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{s} + (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{F}) \mathbf{d}. \quad (3.10)$$

Если теперь  $\Delta$  в левой части формулы (3.10) заменить на  $\mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}$ , то после элементарных преобразований эта формула переписется в виде

$$(\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q})(\mathbf{s} - \mathbf{F} \mathbf{d}) = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Казалось бы, что из (3.11) следует искомая зависимость

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}. \quad (??)$$

Именно в такой форме устанавливает А.Р. Ржаницын выражение для матрицы внутренней податливости через матрицу внешней податливости. Однако, мы недаром занумеровали эту формулу вопросительными знаками, поскольку в общем случае она ошибочна! Чтобы убедиться в этом, положим

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \quad (3.12)$$

и рассмотрим случай геометрически неизменяемой статически неопределимой системы, для которой обязано будет выполняться строгое неравенство  $m > n$ . Но тогда квадратная матрица  $\mathbf{H}$  порядка  $m$  будет вырожденной матрицей (ранг произведения матриц не превышает ранга любого из сомножителей), тогда как матрица  $\mathbf{F}^{-1}$  положительно определена и равенство (??) невозможно.

Ошибка заключена в переходе от (3.11) к (??) и связана с тем, что (3.11) выполняется не для произвольных векторов  $\mathbf{s}$ , а только для таких из них, которые являются *кинематически возможными*, то есть

<sup>3</sup> См. [Ржаницын, 1982], стр. 64–66

удовлетворяют условиям совместности деформаций, записанным в усилиях.

Если же рассматриваемая система статически определима, то любой набор внутренних сил, как известно, является кинематически допустимым, а значит из (3.11) действительно будет следовать равенство  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{H}$ .

Справедливости ради, следует отметить, что эта тонкая, хотя и досадная, ошибка не повлекла за собой ошибочных результатов при последующем изложении строительной механики в цитируемом здесь учебнике [Ржаницын, 1982], поскольку, как справедливо отмечает и сам Ржаницын, в практических расчетах матрицы внутренней податливости  $\mathbf{F}^{-1}$  и внутренней жесткости  $\mathbf{F}$  «удаётся получить без особых затруднений», а для определения матрицы внешней жесткости можно воспользоваться формулой (3.7).

Матрица  $\mathbf{H}$  в дальнейших построениях будет играть важную роль, а ее свойства во многом, хотя и не во всем, наследуются из свойств матрицы внутренней податливости  $\mathbf{F}^{-1}$ . Так, например, компоненты матрицы  $\mathbf{H}$ , так же как и компоненты матрицы  $\mathbf{F}^{-1}$ , обратно пропорциональны модулю упругости материала конструкции. Учитывая родственность и различия этих двух матриц, мы будем называть  $\mathbf{H}$  *матрицей псевдоподатливости*. Можно показать, что дефект матрицы псевдоподатливости равен степени статической неопределимости системы.

После введения понятия псевдоподатливости формула (3.9) для усилий  $\mathbf{s}$  переписется в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{FH}) \mathbf{F} \mathbf{d}. \quad (3.13)$$

Из этой формулы немедленно следует вывод (на механическом уровне очевидный) о том, что для статически определимых систем дислокации не вызывают внутренних сил, поскольку для этих систем матрицы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно обратны.

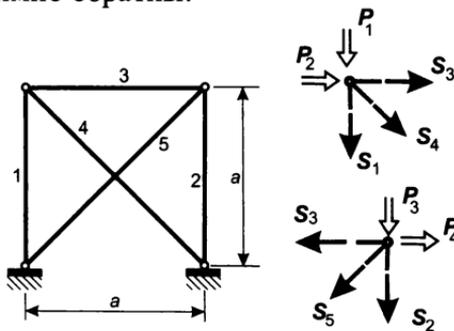


Рис. 3.2. К примеру составления разрешающих уравнений

Проиллюстрируем все сказанное примером простейшей системы, схема которой показана на рис. 3.2. (см. [Ржаницын, 1982], стр.106). Матрица  $Q$  уравнений равновесия для этой конструкции имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0,7071 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,7071 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}.$$

Если жесткости всех элементов  $EF_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) считать одинаковыми, то

$$F = (EF/a) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7071 \end{bmatrix}.$$

Матрица внешней жесткости, вычисленная в соответствии с (3.7) будет равна

$$K = (EF/a) \times \begin{bmatrix} 1,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0,3536 & 1,3536 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1,3536 & -0,3536 \\ 0 & -1 & -0,3536 & 1,3536 \end{bmatrix}.$$

Обращая эту матрицу и используя (3.8), получим вектор узловых перемещений в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = (a/EF) \times \begin{bmatrix} 0,8845 & -0,5578 & -0,1155 & -0,4422 \\ -0,5578 & 2,1356 & 0,4422 & 1,6933 \\ -0,1155 & 0,4422 & 0,8845 & 0,5578 \\ -0,4422 & 1,6933 & 0,5578 & 2,1356 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор внутренних сил  $s$  получим из (3.9) в виде

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = (EF/a) \times \begin{bmatrix} -0,8845 & 0,5578 & 0,1155 & 0,4422 \\ 0,1155 & -0,4422 & -0,8845 & -0,5578 \\ 0,1155 & -0,4422 & 0,1155 & 0,4422 \\ -0,1633 & -0,7887 & -0,1633 & -0,6253 \\ -0,1633 & 0,6253 & -0,1633 & 0,7887 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись (3.12), найдем матрицу псевдоподатливости  $H$

$$H = (a/EF) \times \begin{bmatrix} 0,8845 & -0,1156 & -0,1156 & 0,2310 & 0,2310 \\ -0,1156 & 0,8845 & -0,1156 & 0,2310 & 0,2310 \\ -0,1156 & -0,1156 & 0,8845 & 0,2310 & 0,2310 \\ 0,2310 & 0,2310 & 0,2310 & 0,9523 & -0,4622 \\ 0,2310 & 0,2310 & 0,2310 & -0,4622 & 0,9523 \end{bmatrix},$$

и ясно, что  $\mathbf{H}$  не совпадает с матрицей внутренней податливости  $\mathbf{F}^{-1}$ , которая является диагональной.

Рассмотрим теперь статически определимую систему, образуемую из изображенной на рис. 3.2 системы удалением верхнего горизонтального стержня. Матрица равновесия  $\mathbf{Q}$  для этой системы получается из аналогичной матрицы для ранее рассмотренной статически неопределимой системы вычеркиванием третьего столбца. Матрица внутренней жесткости  $\mathbf{F}$  образуется из предыдущей матрицы  $\mathbf{F}$  вычеркиванием третьего столбца и третьей строки. В результате применения необходимых матричных операций получим матрицу  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = (EF/a) \times \begin{bmatrix} 1,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0,3536 & 0,3536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3536 & -0,3536 \\ 0 & 0 & -0,3536 & 0,3536 \end{bmatrix},$$

обращая которую, находим матрицу внешней податливости

$$\mathbf{K}^{-1} = (a/EF) \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3,8280 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3,8280 \end{bmatrix}.$$

Если теперь вычислить матрицу псевдоподатливости  $\mathbf{H}$  по (3.12), то получим

$$\mathbf{H} = (a/EF) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4141 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,4141 \end{bmatrix},$$

которая, как и следовало ожидать, тождественна матрице внутренней податливости  $\mathbf{F}^{-1}$ .

Формулами (3.7), (3.8), (3.12) и (3.13) определяется решение задачи (3.4) на основе метода перемещений применительно к конечномерной механической системе.

### 3.1.2. Метод сил

Возможен и второй путь решения — на основе *метода сил*. Здесь важную роль играют такие целочисленные характеристики, как уже упоминавшийся ранг  $r$  матрицы равновесия  $\mathbf{Q}$  и *степень статической неопределимости системы*  $k$ , связанные следующим соотношением

$$r = \text{rank } \mathbf{Q}, \quad k = m - r. \quad (3.14)$$

В соответствии с процедурой метода сил общее решение уравнений равновесия  $\mathbf{Q}\mathbf{s} = \mathbf{p}$  представляется в форме

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{p}, \quad (3.15)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  размерами  $m \times k$  — матрица усилий в основной системе метода сил от действия единичных значений неизвестных  $\mathbf{x}$  в количестве  $k$ .

На математическом уровне первое слагаемое в правой части (3.15) представляет собой общее решение соответствующих однородных уравнений равновесия, а второе слагаемое — частное решение неоднородных уравнений. Все столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  линейно независимы, образуя так называемую *фундаментальную* систему решений однородных уравнений с матрицей  $\mathbf{Q}$ ; таким образом, ранг  $\mathbf{A}$  равен  $k$  — степени статической неопределимости системы. Матрица  $\mathbf{B}$  размерами  $m \times n$  — матрица усилий в основной системе от единичных значений узловых нагрузок. Эти две матрицы таковы, что

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{B} = \mathbf{I}. \quad (3.16)$$

где  $\mathbf{0}$  — прямоугольная нулевая матрица размерами  $n \times k$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица порядка  $n$ .<sup>4</sup>

Если вновь обратиться к примеру однократно статически неопределимой системы по рис. 3.2, то для нее можно принять

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1,4142 \\ -1,4142 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,4142 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что условия (3.16) выполняются для этих матриц, что подтверждает правильность их построения.

Исключая из геометрических уравнений группы (3.4) деформации  $\Delta$  с помощью физических уравнений, получим связь между вектором внутренних сил  $\mathbf{s}$  и вектором внешних перемещений  $\mathbf{u}$  в форме

<sup>4</sup> Нас интересуют здесь только свойства матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , поэтому мы не задерживаемся на обсуждении алгоритмических аспектов построения этих матриц, что связано с выбором основной системы метода сил. Этому вопросу посвящены многие работы, из которых отметим уже упоминавшиеся [Розин, 1975], [Филин, 1983], а также работу В.Г. Бусыгина и Л.А. Розина [1976], в которой использована техника псевдообратных матриц.

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d}, \quad (3.17)$$

откуда после подстановки (3.15) получаем

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{d} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (3.18)$$

Умножая это равенство слева на  $\mathbf{A}^T$ , получаем

$$\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (3.19)$$

В силу первого из условий (3.16), аннулируется второй член в левой части (3.19), и после обращения невырожденной матрицы податливости  $\mathbf{D}$  (невырожденность матрицы податливости  $\mathbf{D}$  как раз и следует из условия равенства ранга матрицы  $\mathbf{A}$  числу ее столбцов  $k$ )<sup>5</sup>

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}, \quad (3.20)$$

получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{d} - \mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}). \quad (3.21)$$

Внутренние усилия вычисляются после подстановки (3.21) в (3.15), что дает

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{F}^{-1})\mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (3.22)$$

По аналогии с матрицей псевдоподатливости  $\mathbf{H}$ , введем в рассмотрение матрицу *псевдожесткости*  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}^T. \quad (3.23)$$

Матрица псевдожесткости  $\mathbf{G}$  имеет порядок  $m$ , ее ранг равен степени статической неопределимости системы  $k$ , а дефект равен  $r$ . Эта матрица совпадает с матрицей внешней жесткости  $\mathbf{F}$  только тогда, когда  $k = m$ , то есть в вырожденном случае системы, у которой все узлы закреплены и, следовательно,  $n = 0$ . В терминологии, принятой в строительной механике, этот случай соответствует системе со *степенью кинематической неопределимости*, равной нулю, то есть кинематически определенной системе.

<sup>5</sup> Матрицу  $\mathbf{D}$  уместно называть *матрицей податливости основной системы метода сил*. Такое название, хотя и длинное, но подчеркивает зависимость состава матрицы  $\mathbf{D}$  от выбора основной системы метода сил, а на формально математическом уровне — от конкретного представления матрицы фундаментальных решений  $\mathbf{A}$ . В тех случаях, когда это не будет приводить к неоднозначности, мы будем пользоваться укороченным термином *матрица податливости*  $\mathbf{D}$ .

В результате использования (3.23), решение (3.22) переписывается в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{d} + (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1})\mathbf{V}\mathbf{p} . \quad (3.24)$$

### 3.1.3. Дуализм метода перемещений и метода сил. Проекторы

Дуализм или двойственность методов сил и перемещений в строительной механике хорошо известны и неоднократно обсуждались в научно-технической литературе. Согласно этой двойственности (проявляющейся, в частности, в статико-геометрической аналогии) любое понятие или любая формула, относящиеся, скажем, к методу перемещений, находят свой симметричный аналог в методе сил, и наоборот. Здесь мы покажем лишь, как эта симметрия распространяется на введенные нами понятия матриц псевдожесткости  $\mathbf{G}$  и псевдоподатливости  $\mathbf{H}$ .

Итак, мы имеем два матричных выражения для вектора внутренних сил  $\mathbf{s}$ : одно, полученное по методу перемещений и доставляемое формулой (3.13), и другое, полученное по методу сил и определяемое формулой (3.24). Приравняв эти два выражения, получаем

$$[\mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}^{-1} - (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1})\mathbf{V}]\mathbf{p} = [\mathbf{G} - (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{H})\mathbf{F}]\mathbf{d} . \quad (3.25)$$

В квадратных скобках левой части этого равенства стоит прямоугольная матрица размерами  $m \times n$ , а в правой части — квадратная матрица порядка  $m$ . Поскольку векторы силовых и дислокационных воздействий  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{d}$  абсолютно независимы и могут принимать произвольные значения, то равенство (3.25) может выполняться тогда и только тогда, когда каждая из двух квадратных скобок представляет из себя нулевую матрицу соответствующих размеров.

Приравнявая нулю левую часть из (3.25), получим попутно контрольную формулу для матрицы  $\mathbf{V}$ , а именно

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1})\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}^{-1} . \quad (3.26)$$

На первый взгляд может показаться, что из формулы (3.26) немедленно вытекает способ формального построения матрицы  $\mathbf{V}$ , если известна матрица псевдожесткости  $\mathbf{G}$ . Однако это не так, и (3.26) является всего лишь контрольной формулой для матрицы  $\mathbf{V}$ . Действительно, как это мы чуть позже увидим, квадратная матрица  $(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{F}^{-1})$  порядка  $m$ , являющаяся левым множителем перед  $\mathbf{V}$  в

уравнении (3.26), является вырожденной матрицей, что и не дает возможности однозначного определения  $\mathbf{B}$  из (3.26)<sup>6</sup>.

Наиболее интересный результат получается после приравнивания нулю выражения, стоящего в правой части равенства (3.25). В этом случае приходим к важному тождеству

$$\mathbf{FH} + \mathbf{GF}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (3.27)$$

указывающему на тесную связь матриц псевдожесткости и псевдоподатливости, а также на известную симметрию между методом перемещений и методом сил.

Тождество (3.27), с учетом невырожденности  $\mathbf{F}$ , позволяет упростить формулу (3.26) до

$$\mathbf{HB} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1}, \quad (3.28)$$

а поскольку матрица псевдоподатливости  $\mathbf{H}$  для любой статически неопределимой системы, как мы уже знаем, вырождена, то отсюда следует и невозможность получения матрицы  $\mathbf{B}$  из (3.28), а значит и использования для этой же цели (3.26).

Умножая обе части равенства (3.28) справа на матрицу  $\mathbf{Q}$ , получим еще одно интересное тождество

$$(\mathbf{FH})(\mathbf{BQ}) = \mathbf{FH}. \quad (3.29)$$

Чтобы замкнуть решение задачи по методу сил, требуется также определить вектор внешних перемещений  $\mathbf{u}$ . Из геометрических и физических уравнений группы (3.4) находим  $\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{d}$ , и домножая это равенство слева на  $\mathbf{B}^T$ , получим с учетом (3.16)

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^T (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{s} - \mathbf{d}), \quad (3.30)$$

что после подстановки вместо вектора  $\mathbf{s}$  его выражения по (3.24) и проведения необходимых преобразований приводит к следующей формуле для  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}^T \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{GF}^{-1}) (\mathbf{Bp} - \mathbf{Fd}). \quad (3.31)$$

Итак, формулами (3.20), (3.23), (3.24) и (3.31) полностью определяется напряженное и деформированное состояния конечномерной системы при расчете ее по методу сил.

И вновь, как и для вектора  $\mathbf{s}$ , можно приравнять выражения для вектора внешних перемещений  $\mathbf{u}$ , полученные по методу

<sup>6</sup> Что касается возможности формального построения частных решений уравнений равновесия, то есть матрицы  $\mathbf{B}$ , то можно воспользоваться формулой  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^{-1}$ , справедливость которой проверяется непосредственно подстановкой во второе из уравнений (3.16).

перемещений и по методу сил, то есть по формулам (3.8) и (3.31). Если все это проделать и при этом учесть тождество (3.27), то придем к следующему соотношению

$$(\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{V}) \mathbf{p} = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{V}^T \mathbf{H}) \mathbf{F} \mathbf{d} . \quad (3.32)$$

Приравнявая матричный множитель при  $\mathbf{p}$  в левой части (3.32) нулю, приходим еще к одному тождеству, связывающему матрицу  $\mathbf{V}$  с матрицей внешней податливости  $\mathbf{K}^{-1}$  и матрицей псевдоподатливости  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{H} \mathbf{V} . \quad (3.33)$$

Из рассмотрения правой части в (3.32) получаем

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{V}^T \mathbf{H} , \quad (3.34)$$

что совпадает с формулой (3.28), если в последней протранспонировать обе части равенства.

Необходимо отметить, что выбор обобщенных внутренних неизвестных сил  $\mathbf{s}$  и деформаций  $\Delta$  связан с определенным произволом. Действительно, переходя к иной совокупности обобщенных внутренних неизвестных  $\mathbf{s}^*$  и  $\Delta^*$

$$\mathbf{s} = \mathbf{L} \mathbf{s}^* , \quad \Delta = (\mathbf{L}^{-1})^T \Delta^* \quad (3.35)$$

с произвольной обратимой квадратной матрицей  $\mathbf{L}$  порядка  $m$ , мы, с одной стороны, сохраним без изменения выражение для работы в форме скалярного произведения вектора внутренних сил  $\mathbf{s}^*$  на вектор деформаций  $\Delta^*$ , а с другой — заменим разрешающую систему уравнений (3.4) на систему

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{s}^* = \mathbf{p} , \quad \Delta^* = \mathbf{Q}^{*T} \mathbf{u} + \mathbf{d}^* , \quad \mathbf{s}^* = \mathbf{F}^* \Delta^* , \quad (3.36)$$

где

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \mathbf{L} , \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{L}^{-1})^T , \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{L}^T \mathbf{d} , \quad (3.37)$$

при этом матрица внешней жесткости  $\mathbf{K}$  не изменится, поскольку

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{Q}^* \mathbf{F}^* \mathbf{Q}^{*T} = \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{L}^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{K} . \quad (3.38)$$

В силу положительной определенности матрицы  $\mathbf{F}$ , можно, в частности, положить  $\mathbf{L} = \mathbf{F}^{1/2}$ , что очень близко к преобразованию Робинсона-Хаггенмахера [Робинсон и др., 1974], и тогда вместо (3.4) будем иметь

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{s}^* = \mathbf{p} , \quad \Delta^* = \mathbf{Q}^{*T} \mathbf{u} + \mathbf{d}^* , \quad \mathbf{s}^* = \Delta^* , \quad (3.39)$$

где

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{F}^{-1/2} \mathbf{s}, \quad \Delta^* = \mathbf{F}^{1/2} \Delta, \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{F}^{1/2} \mathbf{d}, \quad (3.40)$$

и при этом

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}^{1/2}, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{F}^{1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{F}^{1/2},$$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{F}^{-1/2} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{F}^{-1/2} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D}, \quad \mathbf{G}^* = \mathbf{F}^{-1/2} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1/2}.$$

Основное тождество (3.27) приобретает при этом вид

$$\mathbf{L}^T \mathbf{H} \mathbf{L} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{L}^{-1})^T = \mathbf{I} \quad (3.41)$$

с симметричными слагаемыми в левой части. Каждое из них является матрицей ортогонального проектирования [Стренг, 1980]

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \mathbf{H} \mathbf{L} = \mathbf{L}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{L}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{L}^{-1})^T = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{L}^{-1})^T \quad (3.42)$$

В справедливости условий идемпотентности  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N}$ , характеризующих совместно с условиями симметрии матрицу-проектор [Лоусон, Хенсон, 1986] легко убедиться прямой подстановкой.

В терминах проекторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  основное тождество (3.27) принимает особенно простой вид

$$\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{I}. \quad (3.43)$$

Обращаясь вновь к примеру системы по рис. 3.2, мы получим

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}^{1/2} = (EF/a)^{1/2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8409 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8409 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}^{-1} = (a/EF)^{1/2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,1892 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,1892 \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T = (EF/a) \times \begin{bmatrix} 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1634 & -0,1634 \\ 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1634 & -0,1634 \\ 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1634 & -0,1634 \\ -0,1634 & -0,1634 & -0,1634 & 0,2310 & 0,2310 \\ -0,1634 & -0,1634 & -0,1634 & 0,2310 & 0,2310 \end{bmatrix}$$

дает возможность вычислить матрицу-проектор  $\mathbf{N}$  по второй из формул (3.42), что приводит к результату

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1943 & -0,1943 \\ 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1943 & -0,1943 \\ 0,1155 & 0,1155 & 0,1155 & -0,1943 & -0,1943 \\ -0,1943 & -0,1943 & -0,1943 & 0,3267 & 0,3267 \\ -0,1943 & -0,1943 & -0,1943 & 0,3267 & 0,3267 \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  являются ортогональными (симметричными) проекторами, их сферическая норма равна единице, а кубическая и октаэдрическая нормы не превосходят  $n^{1/2}$  для  $\mathbf{M}$  и  $(m-n)^{1/2}$  для  $\mathbf{N}$ . А для косых проекторов эти нормы не ограничены и подходящим изменением  $\mathbf{L}$  их можно сделать сколь угодно большими. Кроме того, для компонент  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , которые будем обозначать  $\mu_{ij}$  и  $\nu_{ij}$ , справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_{ii} + \nu_{ii} &= 1, & 0 \leq \mu_{ii} \leq 1 & \quad 0 \leq \nu_{ii} \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \\ \mu_{ij} &= -\nu_{ij}, & |\mu_{ij}|, |\nu_{ij}| &\leq 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j); \end{aligned} \quad (3.44)$$

а сами проекторы подчинены условиям ортогональности

$$\mathbf{MN} = \mathbf{NM} = \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

что вытекает из тождества (3.43) и идемпотентности матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ . Между прочим, из ортогональности проекторов, в свою очередь, следует еще одно любопытное соотношение между матрицами псевдожесткости и псевдоподатливости, а именно:

$$\mathbf{HG} = \mathbf{GH} = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

то есть матрица псевдожесткости и матрица псевдоподатливости взаимно ортогональны.

Ранг  $\mathbf{M}$  равен рангу  $\mathbf{Q}$ , а ранг  $\mathbf{N}$  — рангу  $\mathbf{A}$ , т.е. степени статической неопределимости системы, что можно записать в виде

$$\text{rank } \mathbf{M} = r, \quad \text{rank } \mathbf{N} = k \quad (3.47)$$

Из теории матриц известно (см., например, [Беллман, 1969]), что ранг симметричной идемпотентной матрицы равен ее следу, то есть сумме всех диагональных элементов. Поскольку порядок рассматриваемых матриц-проекторов равен  $m$ , то отсюда, с учетом основного тождества (3.43), получаем полезное для статико-кинематического анализа системы соотношение

$$m = \text{trace } \mathbf{M} + \text{trace } \mathbf{N} = r + k. \quad (3.48)$$

Использование проекторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  весьма эффективно при анализе таких свойств системы, как реакция на изменения жесткостных характеристик системы [Виноградов, 1957], [Перельмутер, 1974], или свойств живучести [Перельмутер, 1995] и др.

В задачах статического расчета явное построение проекторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  вряд ли целесообразно с вычислительной точки зрения, но в задачах оптимизации, где матрица  $\mathbf{Q}$  фиксирована, а  $\mathbf{F}$  является произвольной блочно-диагональной матрицей, затраты на получение значений  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  могут окупиться.

### 3.2. Статико-кинематический анализ

Статико-кинематический анализ дает характеристики системы, инвариантные относительно вида нагружения, и поэтому этот анализ проводится для однородных уравнений равновесия и совместности деформаций. Когда деформации  $\Delta$  и дислокационные воздействия  $\mathbf{d}$  отсутствуют, однородная система уравнений совместности деформаций

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

допускает только нулевое решение  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , если и только если ранг  $r$  матрицы  $\mathbf{Q}$  равен числу внешних неизвестных  $n$ , и конструкция в этом случае не допускает узловых перемещений без деформации элементов. Если же  $r < n$ , то уравнение (3.49) допускает ненулевое решение, и конструкция будет изменяемой, в отличие от неизменяемой конструкции при  $r = n$ .

В тех случаях, когда число внутренних усилий и перемещений  $m$  превышает число внешних неизвестных  $n$ , система уравнений равновесия, которая при отсутствии внешних нагрузок  $\mathbf{p}$  имеет вид

$$\mathbf{Q}\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (3.50)$$

допускает нетривиальное решение

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.51)$$

с произвольным  $(m - r)$ -мерным столбцом  $\mathbf{x}$ .

Формулой (3.51) определяется пространство самоуравновешенных усилий  $\mathbf{s}_0$ , мерность которого  $k = (m - r)$  равна степени статической неопределимости системы. Усилия, найденные по (3.51), определяют самоуравновешенное напряженное состояние при произвольном векторе  $\mathbf{x}$ , в том числе и при значениях  $\mathbf{x}$ , вычисленных через внешние воздействия, например, по формуле (3.21). Таким образом, кроме напряжений, вызванных внешней нагрузкой, в системе могут существовать также *самонапряжения*, не связанные с нагрузками на систему и не исчезающие после удаления нагрузок. Такие

напряжения являются начальными (преднапряжения) и возникают чаще всего в процессе создания конструкции.

Известно [Лоусон, Хенсон, 1986], что связанная с матрицей полного ранга  $\mathbf{Q}$  матрица-проектор  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^{-1}\mathbf{Q} \quad (3.52)$$

переводит любой вектор  $\mathbf{d}_0$  в вектор  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{R}\mathbf{d}_0$ , принадлежащий ядру матрицы  $\mathbf{Q}$ , т.е. удовлетворяющий однородным уравнениям (3.50)<sup>7</sup>. Но это значит, что вектор усилий преднапряжения  $\mathbf{s}_0$  получается с помощью  $\mathbf{d}_0$ , который может трактоваться как вектор произвольных дислокационных возмущений (например, удлинений стержней для ферм), вызывающих усилия преднапряжения  $\mathbf{s}_0$ .

Нетрудно видеть, что проектор  $\mathbf{R}$  совпадает с  $\mathbf{N}$ , если положить  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ , а это вполне допустимо, если интересоваться только статико-кинематическими свойствами системы, а не ее фактическим напряженно-деформированным состоянием. Равенство  $\mathbf{R} = \mathbf{N}$  в отмеченных условиях  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  легко проверяется соответствующими подстановками и фактически сводится к тождеству (3.27). Преимущество проектора  $\mathbf{R}$  по сравнению с проектором  $\mathbf{N}$  заключается в том, что первый инвариантен по отношению к жесткостным характеристикам системы (лишь бы они были отличны от нуля), тогда как второй этим качеством не обладает<sup>8</sup>. Именно поэтому проектор  $\mathbf{R}$  является более удобным инструментом анализа статико-кинематических свойств системы. Кстати говоря, кроме формулы (3.52), для построения  $\mathbf{R}$  можно воспользоваться и формулой

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T, \quad (3.53)$$

являющейся частным случаем основного тождества в форме (3.43).

Для элементов конструкции, являющихся *безусловно необходимыми*, т.е. таких, что их удаление из системы ведет к потере геометрической неизменяемости [Рабинович, 1929], предварительное напряжение невозможно при любом возмущении  $\mathbf{d}_0$ . Действительно, по определению, такой элемент обязательно входит в основную систему метода сил и, следовательно, усилие в нем не может рассматриваться как компонента вектора неизвестных  $\mathbf{x}$ . Но это

<sup>7</sup> Между прочим, обращаясь к формуле, приведенной в сноске <sup>6</sup>), можно получить и следующее простое выражение для проектора  $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{Q}$ .

<sup>8</sup> Случай перехода к нулевой жесткости меняет статико-кинематические характеристики системы, поскольку фактически свидетельствует об изъятии соответствующего элемента из системы, изменяя тем самым целочисленный параметр  $m$ .

значит, что в матрице  $\mathbf{R}$  (и, соответственно, в  $\mathbf{N}$ ) такому элементу должны соответствовать столбец и строка, все компоненты которых состоят только из нулей. Заметим, что достаточно проверить на совпадение с нулем только лишь диагональный элемент матрицы  $\mathbf{R}$  (или  $\mathbf{N}$ ). Такая возможность вытекает из другого известного свойства симметричных идемпотентных матриц, а именно: если диагональный элемент некоторой симметричной идемпотентной матрицы равен нулю, то равны нулю и все элементы соответствующего столбца и соответствующей строки ([Беллман, 1969], стр. 94).

Справедливо и обратное утверждение — *условно необходимому* элементу (в отличие от безусловно необходимого, условно необходимый элемент можно удалить из системы без потери ею геометрической неизменяемости) в матрице-проекторе соответствуют строки и столбцы, в которых обязательно есть ненулевые элементы, и при этом на главной диагонали имеется ненулевая компонента.

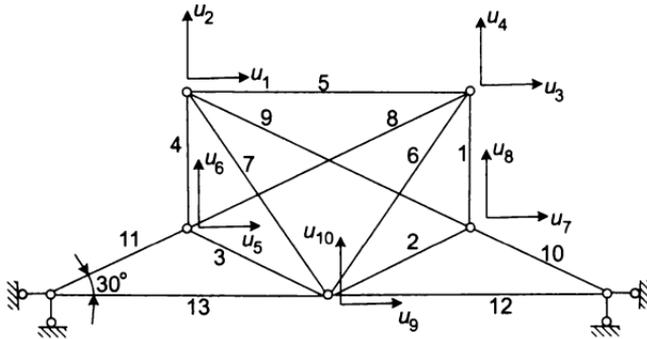


Рис. 3.3. К примеру построения матрицы-проектора

В качестве примера рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 3.3, и будем для простоты полагать все ее жесткостные параметры единичными.

Для построения проектора  $\mathbf{R}$  воспользуемся формулой (3.53).  
Имеем

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 5/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 5/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Вычисления дают:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
 5/24 & 5/24 & 1/24 & 1/24 & \sqrt{3}/12 & -\sqrt{3}/8 & \sqrt{3}/24 & -1/24 & -5/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5/24 & 5/24 & 1/24 & 1/24 & \sqrt{3}/12 & -\sqrt{3}/8 & \sqrt{3}/24 & -1/24 & -5/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/24 & 1/24 & 5/24 & 5/24 & \sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/24 & -\sqrt{3}/8 & -5/24 & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/24 & 1/24 & 5/24 & 5/24 & \sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/24 & -\sqrt{3}/8 & -5/24 & -1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/12 & 1/6 & -1/12 & -1/12 & -\sqrt{3}/12 & -\sqrt{3}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/8 & \sqrt{3}/24 & \sqrt{3}/24 & -1/12 & 7/24 & -5/24 & -\sqrt{3}/24 & \sqrt{3}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sqrt{3}/24 & \sqrt{3}/24 & -\sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/8 & -1/12 & -5/24 & 7/24 & \sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1/24 & -1/24 & -5/24 & -5/24 & -\sqrt{3}/12 & -\sqrt{3}/24 & \sqrt{3}/8 & 5/24 & 1/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -5/24 & -5/24 & -1/24 & -1/24 & -\sqrt{3}/12 & \sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/24 & 1/24 & 5/24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2
 \end{bmatrix}$$

Если рассмотреть проектор  $\mathbf{R}$ , то видно, что 10-й и 11-й стержни являются безусловно необходимыми, поскольку им соответствуют нулевые строка и столбец. Действительно, эти стержни не задействованы ни в одном из состояний самонапряжения (см. рис. 3.4), а удаление хотя бы одного из этих стержней из системы обращает ее в мгновенно изменяемую.

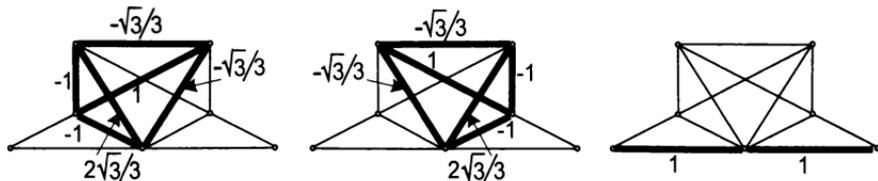


Рис. 3.4. Самонапряжения в системе по рис. 3.3

Вычислив для контроля след матрицы  $\mathbf{R}$ , получим  $\text{trac} \mathbf{R} = 3$ , что совпадает со степенью статической неопределимости системы, как и следовало ожидать в силу (3.47).

То, что с помощью проектора  $\mathbf{R}$  можно анализировать кинематические свойства системы, может быть использовано при решении вопроса об изменении статико-кинематического класса конструкции при удалении того или иного элемента системы. Если из системы исключается  $k$ -й элемент, то необходимо, чтобы при любых воздействиях (в том числе и произвольных дислокациях  $\mathbf{d}_0$ )  $k$ -я компонента вектора  $\mathbf{s}_0$  была равна нулю, поскольку нет усилия в отсутствующем элементе. Чтобы достичь этого, из системы  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{R}\mathbf{d}_0$  необходимо исключить переменную  $s_{0,k}$ , для чего ее сперва необходимо сделать независимой, поскольку только тогда ее

значение можно менять и, в частности, задавать равным нулю. Для этого необходимо сделать шаг жордановых исключений [Зуховицкий, Авдеева, 1967] (см. также Приложение А) с разрешающим элементом  $R_{kk}$ , после чего система  $s_0 = \mathbf{R}d_0$  приобретет вид

$$s_{0,i} = \sum_{j=1}^{k-1} R_{ij}^* d_{0,j} + R_{ik}^* s_{0,k} + \sum_{j=k+1}^m R_{ij}^* d_{0,j} \quad (i = 1, \dots, k-1),$$

$$d_{0,k} = \sum_{j=1}^{k-1} R_{kj}^* d_{0,j} + R_{kk}^* s_{0,k} + \sum_{j=k+1}^m R_{kj}^* d_{0,j},$$

$$s_{0,i} = \sum_{j=1}^{k-1} R_{ij}^* d_{0,j} + R_{ik}^* s_{0,k} + \sum_{j=k+1}^m R_{ij}^* d_{0,j} \quad (i = k+1, \dots, m), \quad (3.54)$$

где звездочкой сверху помечены элементы преобразованной матрицы. Условие  $s_{0,k} = 0$  позволяет вычеркнуть  $k$ -й столбец, а в  $k$ -й строке оказывается записанным не интересующее нас выражение для определения дислокации (например, сближения узлов, соединявшихся ранее удаленным элементом), а значит и  $k$ -ю строку можно также вычеркнуть.

Новая матрица  $\mathbf{R}^*$  порядка  $(m-1)$  также является проектором, но уже для конструкции с исключенным  $k$ -м элементом. Если теперь в  $\mathbf{R}^*$  найдутся новые строки и столбцы, полностью состоящие из нулей, то это будет означать, что соответствующие элементы приобрели статус безусловно необходимых уже после удаления  $k$ -го элемента (и именно вследствие этого удаления)!

Из (3.13) видно, что компоненты матрицы-проектора  $\mathbf{N}$  имеют физический смысл усилий в элементах системы от единичных значений дислокационных воздействий. Отсюда следует и простой рецепт построения  $\mathbf{N}$  или  $\mathbf{R}$  — необходимо с помощью любой МКЭ-программы рассчитать конструкцию на  $m$  вариантов дислокационных единичных воздействий (для ферм — на единичное удлинение стержня) и вектор усилий в элементах, соответствующий  $j$ -му варианту нагружения, образует  $j$ -й столбец соответствующей матрицы. Такой метод вычислений может оказаться намного экономичнее, чем прямая реализация матричных равенств (3.42).

Последнее рассуждение весьма примечательно, поскольку оно показывает, как анализ механического смысла некоторой формально построенной матрицы дает возможность фактически выполнять вычисления, не используя формальные матричные операции. В свое время неоднократно утверждалось, что матричная символика идеально приспособлена к вычислениям на ЭВМ. Это верно лишь с точностью до приведенного выше замечания. Матричная символика

дает возможность достаточно наглядно получить необходимые зависимости, а что касается собственно вычислений, то здесь нет необходимости оперировать с полными матрицами, резервируя дополнительную память компьютера для сохранения и последующего манипулирования содержащимися в матрицах нулями, поскольку другой путь может оказаться более привлекательным.

### 3.2.1. Замечание о дислокациях

Вообще, дислокационные воздействия являются исключительно полезным инструментом расчетчика, используемым им в различных целях. Кроме рассмотренной выше возможности проведения статико-кинематического анализа конструкции на основе построения проекторов, дислокации могут быть заданы и непосредственно как воздействия, будучи вызванными отклонениями реальных размеров элементов конструкции от их проектных размеров (сознательно — в целях создания преднапряжения или из за неточностей изготовления и монтажа). Еще один весьма важный источник полезного применения дислокационных воздействий связан с возможностью построения линий и поверхностей влияния внутренних сил как перемещений от сопряженных этим усилиям единичных дислокаций, то есть с использованием известного кинематического метода построения линий влияния. Однако, не все программные комплексы в составе исходной информации допускают возможность задания произвольных дислокаций. Отсюда может возникнуть потребность смоделировать дислокационные воздействия силовыми. При этом формально задача может ставиться следующим образом.

Пусть в разрешающих уравнениях (3.4) в качестве воздействий на механическую систему заданы только дислокации  $\mathbf{d}$ . Попробуем подобрать эквивалентное силовое воздействие в виде вектора внешних сил  $\mathbf{p}$ , которое создает напряженное и деформированное состояния системы, полностью совпадающие с аналогичным ее состоянием, но при дислокационном воздействии. Обратившись к формулам (3.8) и (3.13), приравняем соответствующие поля при двух видах воздействий.

Из условия совпадения внешних перемещений  $\mathbf{u}$  получим

$$\mathbf{p} = -\mathbf{QF}\mathbf{d}. \quad (3.55)$$

Внутренние силы в элементах системы, вызванные этими внешними силами, будут равны

$$\mathbf{s} = -\mathbf{FHFd}, \quad (3.56)$$

тогда как усилия от заданных дислокационных воздействий

$$\mathbf{s} = -\mathbf{FHFd} + \mathbf{Fd} \quad (3.57)$$

отличаются от (3.56) на величину  $\mathbf{Fd}$ . Поэтому при моделировании дислокаций внешними силами поля перемещений получаются точными, а все усилия оказываются сдвинутыми на вектор  $\mathbf{Fd}$ . Конечно, этот вектор можно добавить вручную к результатам расчета программы, но все же это ложится дополнительным бременем на расчетчика, а кроме того, мешает и постпроцессорной обработке результатов расчета. Вот почему в «хорошей» программе предусмотрены все возможные виды дислокаций в качестве воздействий на конструкцию.

Если говорить о произвольных стержневых элементах (не обязательно стержнях ферменного типа), то очень полезно иметь возможность задания сосредоточенных дислокаций по стержням не только в местах примыкания их к узлам, но и в произвольных (пролетных) сечениях. Стоит это в реализации недорого, а польза может быть большая.

В заключение этого раздела отметим, что возможность проведения статико-кинематического анализа системы является весьма важным показателем доброкачественности коммерческого программного продукта. В этой связи возникает проблема разумного выбора средств отображения статико-кинематического класса конструкции. Так, например, в случае изменяемой системы пользователю не достаточно выдачи соответствующего текстового сообщения, поскольку в этом случае на самого пользователя ложится бремя поиска причин, превративших анализируемую им конструкцию в механизм.

На наш взгляд, удачное решение, реализованное в **SCAD**, **GTSTRUDL** и в некоторых других современных программах, заключается в применении анимационных картин, отображающих замедленное движение конструкции как механизма, то есть без каких-либо деформаций. Наш опыт показывает, что одного лишь взгляда на форму перемещений этой конструкции как жесткого тела достаточно для быстрого обнаружения искомых причин с целью последующей корректировки расчетной схемы.

### 3.3. Снова о полисвязях. Вариационная формулировка

Разрешающая система уравнений метода перемещений (3.6), которую мы представим в форме

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{q} \quad (3.58)$$

с вектором правых частей  $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{QFd}$ , может интерпретироваться как условие минимума функционала, равного разности потенциальной энергии деформации  $E$  и потенциала активных воздействий  $\Pi$

$$L = E - \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{Ku} - \mathbf{q}^T \mathbf{u} . \quad (3.59)$$

Этот функционал называется функционалом Лагранжа или полной потенциальной энергией системы<sup>9</sup>, а условие (3.58) реализует *необходимое* условие минимума полной энергии  $L$ . В левой части (3.59), строго говоря, надо было бы записать и функциональный аргумент, в данном случае в виде  $L(\mathbf{u})$ , указывающий на ту переменную, относительно которой и отыскивается минимум. Однако, следуя сложившейся традиции и в целях сокращения записи, мы будем опускать этот аргумент, если из контекста понятен набор величин, варьируемых при поиске минимума функционала.

Задача отыскания решения уравнения (3.58) эквивалентна задаче поиска точки минимума функционала  $L$ . Здесь, правда, есть одна тонкость, связанная с тем, что мы пока что ничего не сказали о том множестве значений функционального аргумента  $\mathbf{u}$ , на котором этот минимум разрешено отыскивать. Просто в данном случае молчаливо предполагалось, что все компоненты вектора  $\mathbf{u}$  могут принимать независимые значения, то есть речь идет о безусловном минимуме функционала  $L$ .

Вспоминая введенную в разделе 2.5 классификацию связей с разделением таковых на моносвязи и полисвязи, несложно заметить, что в этой главе до сих пор рассматривался класс механических систем, перемещения узлов которых могли быть стеснены только моносвязями, причем наличие моносвязей в системе учтено уже в исходных уравнениях (3.4) за счет исключения из числа компонент вектора  $\mathbf{u}$  тех из них, которым соответствуют перемещения, запрещенные наложенными моносвязями. Именно по этой причине в примере, изображенном на рис. 3.2, в состав вектора внешних перемещений  $\mathbf{u}$  не включены перемещения нижних опорных узлов. Кстати говоря, это — одна из причин, почему рекомендуется вводить

<sup>9</sup> Употребляется также такое название, как *лагранжиан*.

локальные системы координат в узлах, закрепленных от линейных перемещений и/или поворотов в произвольных направлениях, переводя этот частный случай полисвязи в моносвязь.

Что же касается полисвязей, то, как уже было отмечено выше, до сих пор молчаливо предполагалось отсутствие таких в системе. Теперь настало время рассмотреть и этот случай связей, увязав его с вариационной постановкой задачи. Итак, пусть на рассматриваемую систему наложено  $p$  полисвязей, записываемых в матричной форме в виде

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.60)$$

где матрица  $\mathbf{C}$  размерами  $p \times n$  — матрица полисвязей со всеми линейно независимыми строками<sup>10</sup>, что требует выполнения условий

$$\text{rank } \mathbf{C} = p, \quad p \leq n. \quad (3.61)$$

С учетом полисвязей, степень кинематической неопределимости системы  $l$  вычисляется как

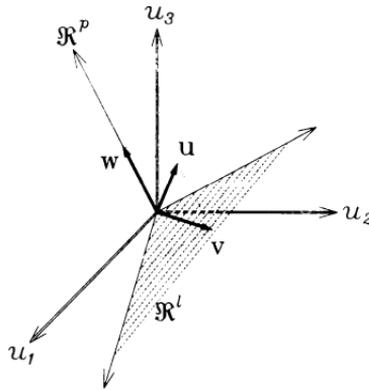
$$l = n - p, \quad (3.62)$$

причем вырожденный случай  $p = n$  возвращает к кинематически определенной системе — результирующий вектор перемещений  $\mathbf{u}$  будет равен нулю.

Если вернуться к вариационной постановке задачи, то само выражение для минимизируемого функционала  $L$  по (3.59) не изменится. Меняется лишь множество возможных (кинематически допустимых) значений вектора  $\mathbf{u}$ , на котором ищется точка минимума  $L$ .

В геометрической интерпретации это множество является сужением исходного  $n$ -мерного пространства  $\mathcal{R}^n$  до его подпространства  $\mathcal{R}^l$  размерности  $l$ , которое уместно назвать *пространством кинематически допустимых перемещений*, все элементы которого удовлетворяют условиям полисвязей. Ортогональное подпространству кинематически допустимых перемещений подпространство  $\mathcal{R}^p$  размерности  $p$  назовем *пространством полисвязей* (рис. 3.5).

<sup>10</sup> Действительно, все строки матрицы  $\mathbf{C}$  должны быть линейно независимы. Если среди строк матрицы  $\mathbf{C}$  найдется хотя бы одна строка, являющаяся линейной комбинацией остальных строк, то на механическом уровне это обстоятельство можно интерпретировать как наличие в составе исходной системы статически неопределимой подсистемы, целиком состоящей из недеформируемых элементов. Этот случай мы сознательно исключаем из рассмотрения, поскольку он приводит к неединственному распределению внутренних сил.



**Рис. 3.5.** Геометрическая интерпретация разложения исходного пространства  $\mathcal{R}^n$  на сумму пространства кинематически допустимых перемещений  $\mathcal{R}^l$  и пространства связей  $\mathcal{R}^p$

Любой вектор  $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^l$  может быть представлен в базисе  $\mathcal{R}^l$ , и тогда он будет иметь ровно  $l$  компонент, и все они будут независимы, или альтернативно — в базисе исходного пространства  $\mathcal{R}^n$ , и тогда он будет представлен  $n$  компонентами и в этом представлении удовлетворять матричному равенству  $\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Но нас в дальнейшем будет интересовать третий способ представления вектора  $\mathbf{v}$ , а именно в базисе исходного пространства  $\mathcal{R}^n$ , но имеющий только  $l$  компонент относительно  $l$  избранных базисных векторов исходного пространства  $\mathcal{R}^n$ , причем все эти компоненты независимы. Как это сделать, объясним чуть позже, а сейчас скажем несколько слов о том, зачем это нужно.

Дело в том, что компоненты любого вектора в базисе исходного пространства имеют четкий физический и геометрический смысл — они являются перемещениями узлов рассматриваемой механической системы относительно локальных (по узлам) координат. Если же вводить собственный базис в  $\mathcal{R}^l$ , то эта физическая прозрачность будет утеряна, что с пользовательской точки зрения будет расценено только как недостаток расчетной системы.

В вариационной форме задача формулируется теперь как поиск точки минимума  $L$  на подпространстве  $\mathcal{R}^l$ .

Рассмотрим два конкурирующих способа учета полисвязей на работу механической системы.

**Первый способ.** Здесь минимум функционала ищется на суженном пространстве  $\mathcal{R}^l$  за счет перестройки самого функционала к виду

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K}^* \mathbf{v} - \mathbf{q}^{*T} \mathbf{v}, \quad (3.63)$$

где вектор перемещений  $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^l$ , хотя и представлен в базисе исходного пространства  $\mathcal{R}^n$ , но имеет всего лишь  $l$  компонент, и все они независимы. Матрица  $\mathbf{K}^*$  представляет из себя перестроенную<sup>11</sup> матрицу внешней жесткости системы порядка  $l$ . Вектор  $\mathbf{q}^*$  — перестроенный вектор активных воздействий на систему.

В силу (3.61), в матрице полисвязей  $\mathbf{C}$  обязательно найдутся  $p$  линейно независимых столбцов. Пусть это будут столбцы с номерами  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ , которые мы назовем *базисными* столбцами матрицы полисвязей.

Образуем два вектора перемещений  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , первый из которых имеет размерность  $l$ , а второй  $p$ . Компоненты вектора  $\mathbf{w}$  представляют собой выборку из полного вектора перемещений  $\mathbf{u}$  тех компонент, которым соответствуют базисные столбцы матрицы полисвязей, иначе говоря

$$\mathbf{w}^T = [u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_p}], \quad (3.64)$$

а вектор  $\mathbf{v}$ , напротив, образуется из вектора  $\mathbf{u}$  вычеркиванием как раз тех компонент, которые уже попали в вектор  $\mathbf{w}$ .

Вектор  $\mathbf{v}$  будем называть вектором *свободных перемещений*, тогда как вектор  $\mathbf{w}$  — вектором *зависимых перемещений*. В матричной форме связь между тремя векторами — полным  $\mathbf{u}$ , свободным  $\mathbf{v}$  и зависимым  $\mathbf{w}$  — может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}_v \mathbf{u}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{P}_w \mathbf{u}, \quad (3.65)$$

где матрицы  $\mathbf{P}_v$  размерами  $l \times n$  и  $\mathbf{P}_w$  размерами  $p \times n$  как раз и осуществляют необходимую выборку. Эти две матрицы, в свою очередь, представляют собой такую же выборку строк единичной матрицы порядка  $n$ . В матрицу  $\mathbf{P}_w$  входят строки единичной матрицы с номерами  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ , в матрицу  $\mathbf{P}_v$  — остальные строки.

Пусть, например,  $n = 5$ ,  $p = 2$ ,  $l = 3$ , и матрица полисвязей  $\mathbf{C}$  имеет вид

$$\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \end{array} \right],$$

<sup>11</sup> На самом деле, в программной реализации нет нужды сначала формировать матрицу внешней жесткости  $\mathbf{K}$  и вектор  $\mathbf{q}$  порядка  $n$ , а затем перестраивать их до  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{q}^*$  пониженного порядка  $l$ . Понижение порядка системы уравнений до  $l$  учитывается уже в процессе ассемблирования (сборки) окончательной матрицы жесткости и окончательного грузового вектора (векторов, при нескольких нагружениях). Именно так поступают разработчики большинства программных комплексов, допускающих учет частных случаев полисвязей, например, в форме объединения перемещений разных узлов.

причем второй и четвертый столбцы в этой матрице линейно независимы. Тогда, в соответствии с принятым соглашением, будем иметь

$$\mathbf{P}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 u_2 u_3 u_4 u_5], \quad \mathbf{v}^T = [u_1 u_3 u_5], \quad \mathbf{w}^T = [u_2 u_4].$$

Понятно, что матрицы выборки  $\mathbf{P}_v$  и  $\mathbf{P}_w$  позволяют осуществить и обратный переход к полному вектору перемещений  $\mathbf{u}$  от вектора свободных перемещений  $\mathbf{v}$  и вектора зависимых перемещений  $\mathbf{w}$ , а именно

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}_v^T \mathbf{v} + \mathbf{P}_w^T \mathbf{w}. \quad (3.66)$$

Кроме того, эти матрицы позволяют переписать условия полисвязей (3.60) в другом, более удобном для наших целей виде  $\mathbf{C}(\mathbf{P}_v^T \mathbf{v} + \mathbf{P}_w^T \mathbf{w}) = \mathbf{0}$  или

$$\mathbf{C}_v \mathbf{v} + \mathbf{C}_w \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_v = \mathbf{C} \mathbf{P}_v^T, \quad \mathbf{C}_w = \mathbf{C} \mathbf{P}_w^T, \quad (3.67)$$

откуда

$$\mathbf{w} = -\mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{C}_v \mathbf{v}. \quad (3.68)$$

Уравнения полисвязей, записанные в форме линейных комбинаций свободных компонент вектора перемещений и представляющие собой выражения для зависимых компонент, то есть в форме (3.68), будем называть *нормализованными* уравнениями полисвязей.

Заметим, что операция обращения в (3.68) при проведении нормализации допустима, так как матрица  $\mathbf{C}_w$  состоит из базисных столбцов матрицы полисвязей (в приведенном выше примере базисные столбцы для лучшего восприятия затемнены).

Теперь становится понятным и смысл разделения полного вектора перемещений на вектор свободных и вектор зависимых перемещений, поскольку компоненты вектора  $\mathbf{v}$  могут варьироваться независимо, тогда как компоненты вектора  $\mathbf{w}$  этой возможности лишены условиями полисвязей (3.68).

После подстановки (3.68) в (3.66) получим выражение для компонент полного вектора перемещений  $\mathbf{u}$  через компоненты только свободного вектора  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_v^T - \mathbf{P}_w^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{C}_v, \quad (3.69)$$

где матрица  $\mathbf{P}$  имеет размеры  $n \times l$ .

Первая из формул в (3.69) может трактоваться и как переход между двумя представлениями одного и того же вектора, осуществляемый с помощью матрицы  $\mathbf{P}$ , причем  $\mathbf{u}$  — это тот же самый вектор  $\mathbf{v}$ , но с компонентами в полном базисе исходного пространства  $\mathfrak{R}^n$ , и значит,  $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Что это действительно так, легко проверяется непосредственно из (3.69).

Подставляя теперь (3.69) в (3.59), получим

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{v} - \mathbf{q}^T \mathbf{P} \mathbf{v}, \quad (3.70)$$

что после сопоставления с (3.63) дает

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}, \quad \mathbf{q}^* = \mathbf{P}^T \mathbf{q}. \quad (3.71)$$

В этом месте стоит обратить внимание на то, что для частного, но очень важного случая полисвязей, реализуемого абсолютно жестким телом, уравнения полисвязей, приведенные в разделе 2.6, заранее представлены в нормализованном виде — формулы (2.8) – (2.12). Разумеется, что перемещения хозяйских узлов относятся при этом к вектору свободных перемещений  $\mathbf{v}$ , тогда как нераскрепощенные степени свободы рабов образуют вектор зависимых перемещений  $\mathbf{w}$  — никаких нарушений законодательства!

Однако, в общем случае произвольных полисвязей придется предварительно решать вспомогательную задачу по выделению линейно независимых столбцов матрицы полисвязей  $\mathbf{C}$ .

**Второй способ**, напротив, основан не на сужении исходного пространства, а на его расширении до размерности  $n + p$ . Согласно правилу множителей Лагранжа, задача на условный экстремум функционала (3.59) со связями (3.60) сводится к задаче поиска точки стационарности вспомогательного функционала

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{L} + \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{C} \mathbf{u}, \quad (3.72)$$

где  $\boldsymbol{\rho}$  — вектор лагранжевых множителей порядка  $p$ . Точка стационарности функционала  $\mathbf{M}$  разыскивается на множестве независимо варьируемых векторов  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\rho}$ , не обремененных какими-либо ограничениями. Условие стационарности  $\mathbf{M}$  дает следующую систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{C} \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

так что подчинение вектора  $\mathbf{u}$  уравнениям полисвязей, а значит и принадлежность его пространству кинематически допустимых

перемещений, получаются отсюда автоматически<sup>12</sup>.

Решение этой системы уравнений дает значения компонент полного вектора перемещений  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^l$  (с компонентами в базисе  $\mathcal{R}^n$ ), а также вектор лагранжевых множителей  $\boldsymbol{\rho}$ , по своему физическому смыслу представляющий совокупность обобщенных усилий, сопряженных по энергии введенным полисвязям [Перельмутер, Сливкер, 1976]. Это решение может быть записано в следующем виде

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{u} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}]\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}, \quad (3.74)$$

что допустимо в силу принятых ранее соглашений о положительной определенности матрицы внешней жесткости  $\mathbf{K}$  и ранговых ограничений (3.61) на матрицу полисвязей  $\mathbf{C}$ .

Итак, имеются два подхода к вариационному описанию работы механической системы с полисвязями. Сопоставим теперь эти два подхода с различных точек зрения.

Первый подход основан на сужении исходного пространства, а второй — на его расширении. В первом случае порядок разрешающей системы уравнений понижается до  $n - p$  (и это хорошо), а во втором — повышается до  $n + p$  (что хорошим никак не назовешь). Но в первом случае ломается структура матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ , и в ее перестроенном виде  $\mathbf{K}^*$  теряются (или, по крайней мере, существенно ухудшаются) такие важнейшие характеристики матрицы, как слабая заполненность и слабая связность (тяготение ненулевых элементов к главной диагонали матрицы), в совокупности составляющие одну из самых привлекательных черт конечноэлементных систем (очень жаль). Во втором случае структура матрицы системы уравнений, отвечающей блоку  $\mathbf{K}$ , полностью сохраняется (недурно), и хотя этот полезный консерватизм оплачивается дополнительными блоками, они — эти блоки — могут быть вынесены в окаймление.

При ничейном результате 1:1 отвлечемся в перерыве на обсуждение неиспользованных возможностей первого раунда. Так, если программная реализация опирается на ленточную структуру матрицы жесткости, то вполне здравой может быть идея сокращения ширины ленты матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  за счет насильственного

<sup>12</sup> В литературе нередко функционал  $M$  называют функционалом Лагранжа, что при всей исторической справедливости нам представляется лингвистически неудачным. Поскольку исходный функционал  $L$  носит то же великое имя, то получается что-то плохо перевариваемое вроде «функционала Лагранжа для функционала Лагранжа». Поэтому мы предпочли более нейтральный термин — вспомогательный функционал. А историческая роль Лагранжа при этом и не забывается, и не умаляется, ведь сказано же о правиле множителей Лагранжа при построении вспомогательного функционала!

увеличения ее порядка с помощью введения в систему фиктивных узлов с последующим определением перемещений в них на основе полисвязей и формированием системы разрешающих уравнений по второму подходу. За деталями, примерами и количественными оценками отсылаем читателя к нашей статье тридцатипятилетней давности [Перельмутер, Слдивкер, 1976].

Возвращаясь к сравнению двух подходов, заметим, что апологет первого из них не замедлит обратить внимание на добропорядочный консерватизм с обратной стороны. Так, перестроенная матрица жесткости  $\mathbf{K}^*$  не только удерживает положительную определенность системы уравнений, но даже усиливает ее — можно показать, что спектр собственных чисел матрицы  $\mathbf{K}^*$  смещается вправо от спектра матрицы  $\mathbf{K}$ , а обусловленность улучшается. Парируется этот тяжелый для второго подхода удар сразу тремя соображениями. Во-первых, неприятности, связанные с потерей положительной определенности полной матрицы системы уравнений (3.73), не стоит преувеличивать. При первых  $n$  шагах процедуры прямого хода Гауссова исключения или любой ее модификации фактически дело придется иметь с положительно определенным блоком — той же матрицей  $\mathbf{K}$ . Образующаяся после этого на месте матричного нуля новая матрица  $(\mathbf{SK}^{-1}\mathbf{C}^T)^{-1}$  также является положительно определенной (с точностью до несущественного множителя «минус единица»). Во-вторых, процесс формирования матрицы  $\mathbf{K}^*$  также требует вычислительных ресурсов, да и алгоритм сложнее. И в третьих, если пользователю придет в голову заинтересоваться обобщенными усилиями в полисвязях (будьте уверены, обязательно придет, уж мы-то знаем), то вот они — компоненты вектора лагранжевых множителей  $\rho$ . Если все же настаивать на первом подходе, то придется изрядно помучиться с уравнениями равновесия, извлекая оттуда эти усилия.

С приблизительно ничейным результатом последнее слово остается за рефери этого поединка — за разработчиком, которому и принимать окончательное решение относительно выбора используемого подхода в конкретной программной реализации. Как пользователи, с правами разве что боковых судей, мы бы предпочли иметь обе возможности. Как всегда, хотелось бы, чтобы одна из возможностей (по умолчанию) выбиралась программой автоматически, но пользователю делегировалось бы право принудительного выбора. А еще лучше, если пользователь сможет избирательно поступать с отдельными полисвязями в одной и той же расчетной схеме. На сомнения разработчиков в существовании пользователей с такими экзотическими потребностями, мы отвечаем вариантом

перефразированной поговорки, что «*была бы такая программа, а пользователь всегда найдется*»<sup>13</sup>.

Но, кажется, мы рано заговорили о судебском решении, потому что все тот же фанатичный сторонник первого подхода вытаскивает из рукава козырную карту, и всем участникам становится понятно, что будет и третий раунд.

Ну хорошо, мы рассматривали до сих пор ситуацию, когда матрица внешней жесткости  $\mathbf{K}$  положительно определена. А если это не так? Легко представить себе конструкцию, которая тут же превращается в механизм, стоит только лишить ее полисвязей. Простейший пример представляет собой плоское абсолютно жесткое тело первого подтипа, присоединенное к «земле» тремя не параллельными и не пересекающимися в одной точке ферменными стержнями. Матрица жесткости  $\mathbf{K}$  сразу же становится вырожденной, хотя эта система с абсолютно жестким телом геометрически неизменяема. Иначе говоря, полисвязи, так же как и обычные элементы, могут оказаться *безусловно необходимыми*.

В случае первого подхода перестроенная матрица жесткости  $\mathbf{K}^*$  положительно определена, если и только если вместе с полисвязями вся система является геометрически неизменяемой.

В случае второго подхода дело обстоит посложнее. Действительно, система уравнений (3.73) содержит  $(n + p)$  уравнений относительно такого же числа неизвестных. Основываясь на том, что ранг матрицы  $\mathbf{C}$  равен числу ее строк, можно показать, что определитель расширенной  $(n + p) \times (n + p)$  матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

может быть отличен от нуля даже тогда, когда матрица  $\mathbf{K}$  вырождена, но ее дефект не превышает ранга матрицы  $\mathbf{C}$ . Это означает, что система без дополнительных связей является изменяемой, и именно эти связи обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции. Однако, в таком случае решение системы уравнений (3.73) с матрицей (3.75) по методу Гаусса или Холецкого с использованием исключений, следующих в порядке естественной нумерации неизвестных, невозможно. Для преодоления этой

<sup>13</sup> Похоже, что такие полномочия следует предоставлять только суперэкспертам, для которых в таблице 2.1 не предусмотрено местечка. Что ж, сошлемся на авторитет такого гуру от программирования, как Лу Гринзоу, высказавшемуся по примерно аналогичному поводу так: «*Главное — помните одну простую вещь: собираясь потанцевать с дьяволом, удостоверьтесь, что знаете все па*» [Гринзоу, 1997].

вычислительной трудности, в [Перельмутер, Сливкер, 1979] был предложен прием установки так называемых *нуль-податливых связей*, основанный на модификации вспомогательного функционала  $M$  до функционала

$$N = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{K} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{C}) \mathbf{u} - \mathbf{q}^T \mathbf{u} + \rho^T \mathbf{C} \mathbf{u}, \quad (3.76)$$

где  $\mathbf{D}_0$  — некоторая (произвольно назначаемая) симметричная положительно определенная матрица порядка  $p$ . Добавление к матрице жесткости  $\mathbf{K}$  произведения  $\mathbf{C}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{C}$  соответствует включению в систему некоторого упругого элемента (его свойства упругости определяет матрица  $\mathbf{D}_0$ ), который обеспечивает неизменяемость, но, будучи включенным в систему «параллельно» абсолютно жесткой связи, этот элемент не деформируется и, следовательно, не искажает картину напряженно-деформированного состояния системы. В результате матрица системы уравнений, построенной по модифицированному функционалу  $N$ , вместо вида (3.75) принимает вид

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{K} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.77)$$

и, как это показано в [Перельмутер, Сливкер, 1979], блок  $\mathbf{K} + \mathbf{C}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{C}$  становится положительно определенным. И статус-кво ничьей в проведенном соревновании восстанавливается.

В действительности, самое общее сравнение двух конкурирующих подходов проведено нами не для того, чтобы попытаться вынести окончательный приговор в пользу сужения или расширения основного пространства, да это и невозможно сделать. В каждом конкретном случае, в зависимости от задачи, решающее преимущество может оказаться за первым или вторым подходом. Вот почему мы — активные сторонники программы, способной оперировать и первым, и вторым подходом, хотя и отдаем себе отчет в том, что реализация даже одного из них — не самая легкая задача для разработчиков программ.

Возвращаясь к модифицированному функционалу  $N$ , обратим внимание на то обстоятельство, что, фактически, мы имеем дело не с одним функционалом, а с семейством функционалов, параметрически зависящих от произвольно назначаемой матрицы  $\mathbf{D}_0$ . Отсюда возникает естественное желание распорядиться неожиданно предоставленным произволом так, чтобы извлечь из этого произвола «дополнительное удовольствие». Но об этом — в следующем разделе.

Уравнения (3.73), конечно же, представляют собой один из вариантов *смешанного* метода расчета конечномерной системы, поскольку в качестве неизвестных в них выступают одновременно и силовые, и кинематические параметры. Другой вариант смешанного метода получается [Шулькин, 1984], если заметить, что из геометрических и физических уравнений (3.4) следует равенство

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{Q}^T\mathbf{u} + \mathbf{d} . \quad (3.78)$$

и дополнить (3.78) уравнениями равновесия. В результате приходим к системе уравнений смешанного метода

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{s} - \mathbf{Q}\mathbf{u} &= \mathbf{0} , \\ \mathbf{Q}^T\mathbf{s} &= \mathbf{0} , \end{aligned} \quad (3.79)$$

структура которой такая же, как и у системы (3.73), хотя общий порядок этой системы равен  $(n + m)$ .

### 3.4. Нуль-элементы

В предыдущем разделе были упомянуты нуль-связи, а точнее было бы сказать — нуль-элементы. Что это такое и зачем они нужны?

Слегка нарушив логику изложения, попытаемся сначала ответить на второй вопрос. Дело в том, что осознание необходимости оперирования полисвязями в расчетных схемах конструкций, хотя бы в наиболее распространенном варианте абсолютно жесткого тела, послужило соответствующим социальным заказом для разработчиков. Но от заказа до его реализации — дистанция порядочная. А для пользователей, как и вообще для заказчиков во всем мире, состояние ожидания — не самая излюбленная позиция. Вот почему основным стимулом при создании нуль-элементов послужило естественное желание придумать что-то такое, что позволило бы временно, до лучших времен прикрыть непристойную наготу действующих на определенный момент времени программных систем, что позволило бы, без малейшего вмешательства в программный код, включать в расчетную схему абсолютно жесткие тела, вводить закрепления узлов по косым направлениям в отношении глобальной системы координат, объединять перемещения узлов, то есть делать многое из того, что на самом деле должны бы делать полисвязи. Иначе говоря, с пользовательской точки зрения нуль-элементы — это способ слегка обмануть программу, заставив ее проехаться по ненаезженной колее.

**Определение.**

Будем называть сложный элемент *нуль-податливым* (нуль-жестким), если он обладает нулевой матрицей податливости (жесткости) по отношению к некоторым из своих степеней свободы и в то же время составлен из простых элементов конечной жесткости (податливости).

Как будет ясно из дальнейшего, нуль-податливый элемент одновременно является и нуль-жестким элементом, но по отношению к другим степеням свободы. Поэтому для краткости относительно таких элементов применяется один общий укороченный термин, а именно — нуль-элементы.

Простейший пример нуль-элемента представляет собой пакет из двух последовательно соединенных пружин с жесткостями  $c$  и  $-c$ , одинаковыми по абсолютной величине, но различными по знаку (рис. 3.6).

Легко заметить, что при действии на рассматриваемый элемент сил  $P$  (рис. 3.6, *a*) сближение точек приложения этих сил оказывается равным нулю; иначе говоря, элемент ведет себя как абсолютно жесткий в продольном направлении стержень. В соответствии с приведенным выше определением, рассматриваемый элемент является нуль-податливым по отношению ко взаимному сближению его концов.

Если наложить внешние связи на все узлы этого элемента (рис. 3.6, *b*) и затем дать принудительное смещение центральному узлу, то реакция в связи, отвечающей смещению этого узла, также оказывается равной нулю. Следовательно, этот элемент абсолютно податлив по отношению к смещению центрального узла, то есть, по определению, является нуль-жестким.

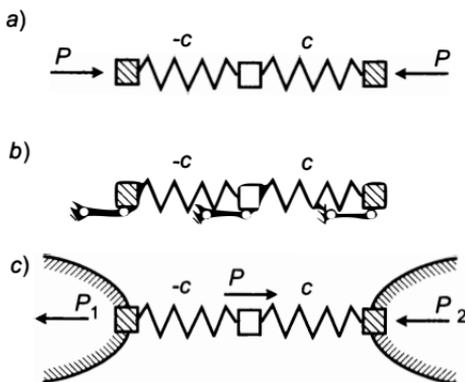


Рис. 3.6. Простейшая схема нуль-податливого элемента

Соединим теперь в расчетной схеме конструкции два каких-либо узла только что рассмотренным элементом, оставив свободным от внешних сил его центральный узел. Тогда расстояние между двумя соединенными этим элементом узлами в процессе деформирования системы не изменится, и, таким образом, нуль-элемент точно симулирует наличие абсолютно жесткого стержня.

На практике пользователи иногда вводят вместо абсолютно жесткого стержня — стержень конечной, но относительно высокой жесткости. Помимо того, что априори не вполне ясно, какую все же жесткость приписать такому стержню, этот прием и небезопасен с вычислительной точки зрения, так как ведет к ухудшению обусловленности системы уравнений. В разделе 2.4 подобная ситуация уже рассматривалась, где на простом примере системы, состоящей из трех пружин, проанализированы с позиций механики причины возможной потери точности в решении. Разумеется, внесение в расчетную схему нуль-элемента, изображенного на рис. 3.6, также не обходится совсем уж бесплатно, поскольку расчетная схема снабжается дополнительным, центральным для нуль-элемента узлом, а значит, увеличивается порядок разрешающей системы уравнений.

Приложим мысленно к центральному узлу нуль-элемента внешнюю силу  $P$ , а к соединяемым этим элементом узлам конструкции силы  $P_1$  и  $P_2$ , как это показано на рис. 3.6, *с*, и потребуем, чтобы эти три силы были взаимно уравновешены, то есть  $P = P_1 + P_2$ . Несложно проверить, что такое силовое нагружение точно моделирует дислокационное воздействие на систему в виде укорочения расстояния между парой узлов конструкции на величину  $d = P/c$ . Таким образом, нуль-элемент не только позволил аккуратно смоделировать абсолютно жесткий стержень, но и дал возможность перевести дислокационное воздействие в силовое.

Общая идея конструирования нуль-элементов из стержней конечной жесткости, продемонстрированная на этом простейшем примере, позволила разработать целую серию нуль-элементов, каждый из которых точно моделирует один из вариантов уравнений полисвязей, порождаемых абсолютно жесткими телами.

На рис. 3.7 изображены 8 типов стержневых нуль-элементов, а соответствующие этим нуль-элементам уравнения полисвязей сведены в таблицу 3.1. Там же приведены значения внешних сил, моделирующих дислокационные воздействия.

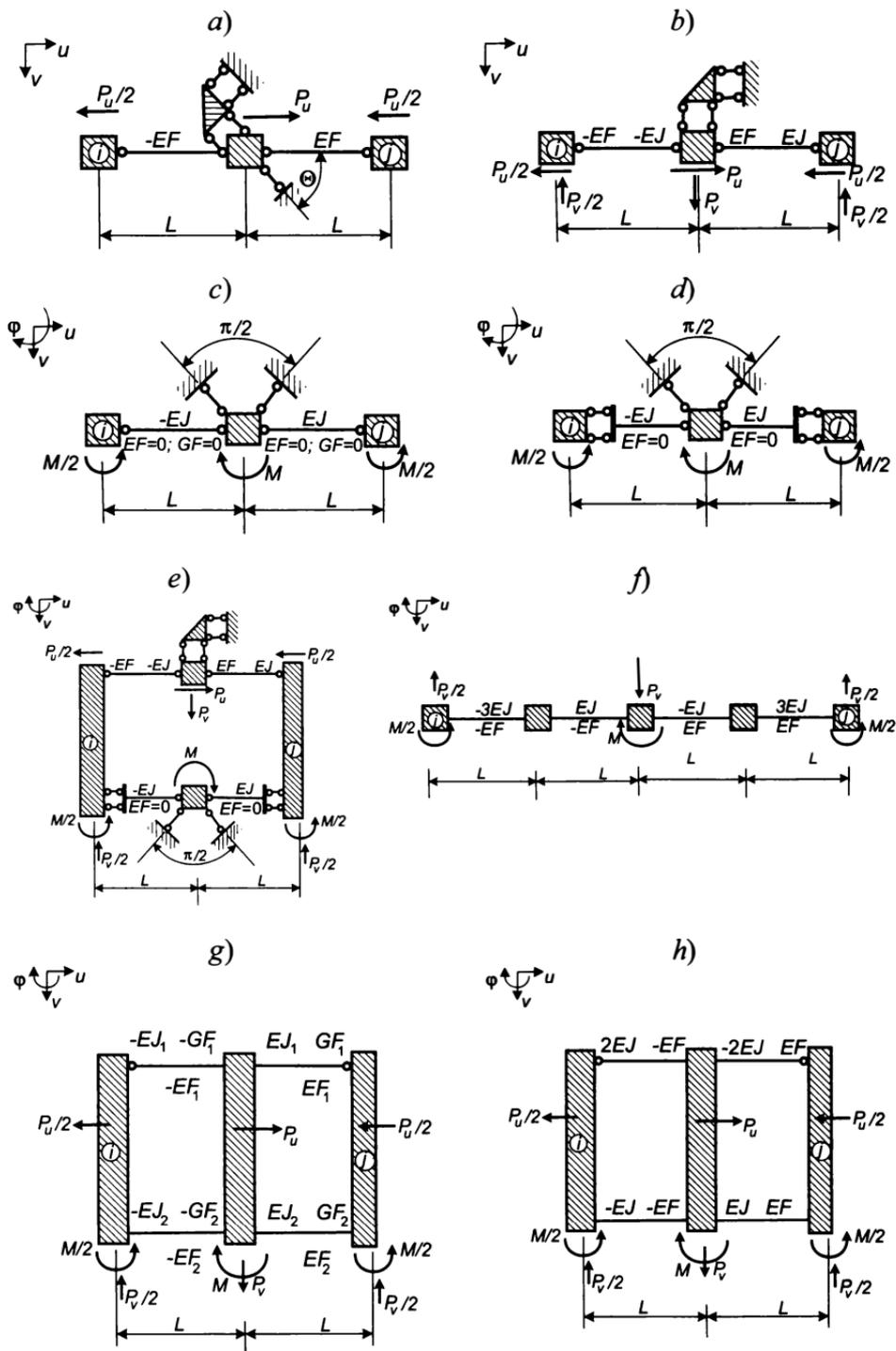


Рис. 3.7. Конструкции нуль-элементов

Таблица 3.1.

№	Уравнения полисвязей	Дислокации и силы
1	$u_i - u_j = d_u$	$P_u = (EF / L) d_u$ $\theta \neq 0$
2	$u_i - u_j = d_u$ $v_i - v_j = d_v$	$P_u = (EF / L) d_u$ $P_v = (3EI / L^3) d_v$
3	$\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$M = (EI / L) d_\theta$
4	$\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$M = (EI / L) d_\theta$
5	$u_i - u_j = d_u$ $v_i - v_j = d_v$ $\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$P_u = (EF / L) d_u$ $P_v = (3EI / L^3) d_v$ $M = (EI / L) d_\theta$
6	$u_i - u_j = d_u$ $v_i - v_j + 4L\theta_i = d_v$ $\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$P_u = [EF / (2L)] d_u$ $P_v = 9EI / (4L^3)(d_v - 2L d_\theta)$ $M = -2(EI / L) d_\theta$
7	$u_i - u_j = d_u$ $v_i - v_j + 2L\theta_i = d_v$ $\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$P_u = (2EF / L) d_u$ $P_v = [6EI_1 / (\alpha L^2)](d_v - L d_\theta)$ $M = [(\alpha - 3)EI_1 / (\alpha L)] d_\theta$
8	$u_i - u_j = d_u$ $v_i - v_j + 2L\theta_i = d_v$ $\theta_i - \theta_j = d_\theta$	$P_u = (2EF / L) d_u$ $P_v = (6EI / L^2)(d_v - L d_\theta)$ $M = -(EI / L) d_\theta$

Помимо понятных из рис. 3.7 обозначений, в таблице 3.1 положено

$$\alpha = 1 + 12k_1, \quad k_1 = EI_1 / (L^2 GF_1), \quad k_2 = EI_2 / (L^2 GF_2), \quad (3.80)$$

причем для нуль-элемента “g” должно выполняться следующее условие на соотношение жесткостей:

$$2EI_1 / \alpha + EI_2 / (1 + 3k_2) = 0. \quad (3.81)$$

Приведем несколько иллюстративных примеров, демонстрирующих некоторые возможные применения различных типов нуль-элементов.

На рис. 3.8 показана однопролетная одноэтажная рама с абсолютно жестким ригелем. В условиях, когда в используемом программном обеспечении не предусмотрено прямое задание жестких тел, можно воспользоваться расчетной схемой с нуль-элементом, “g” или “h” (по выбору). Нуль-элемент “f” требует введения в расчетную схему трех дополнительных узлов.

Элементы “g” и “h” имеют по одному дополнительному узлу, однако они не могут быть задействованы в программе, если в ней установлена жесткая защита от двойного соединения одних и тех же узлов различными стержнями. На самом деле, элемент “h” представляет собой частный случай элемента “g”, но использующий

классический вариант теории стержней — без учета деформаций сдвига.

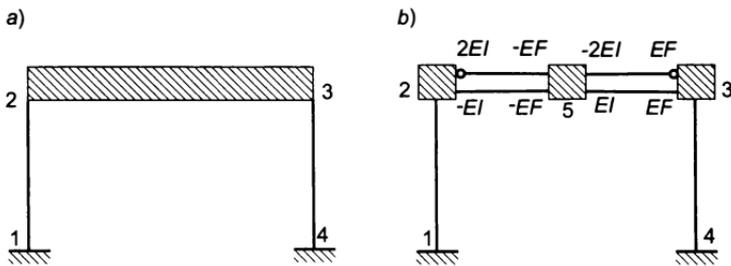


Рис. 3.8. Моделирование абсолютно жесткого ригеля нуль-элементом “*h*”

Объединение только линейных перемещений с независимыми поворотами двух узлов может оказаться полезным для моделирования шарнирного сочленения двух групп стержней, изображенного на рис. 2.26. Для этого можно воспользоваться нуль-элементом “*b*”, как это показано на рис. 3.9.

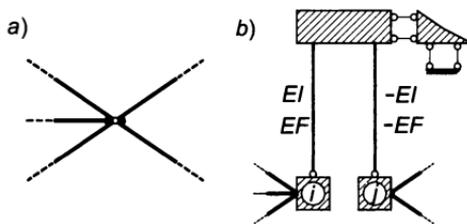


Рис. 3.9. Моделирование шарнирного сочленения двух узлов

Заметим, что приведенными выше 8 типами нуль-элементов, конечно же, не исчерпываются возможности конструирования новых типов нуль-элементов. Пользователи могут сделать это самостоятельно для привязки к возможностям используемой программы при моделировании конкретной расчетной схемы.

Еще один полезный аспект применения нуль-элементов связан с возможностью повышения устойчивости вычислительного процесса. Если с самого начала в системе присутствуют элементы, резко различающиеся по своим жесткостным характеристикам, то это обстоятельство способно порождать быстрое накопление погрешности вычислений при решении системы разрешающих уравнений метода перемещений.

Основную идею борьбы с этим явлением средствами нуль-элементов продемонстрируем все на том же примере расчетной схемы, состоящей из трех последовательно соединенных пружин

(рис. 2.11). На рис. 3.10 показана эквивалентная расчетная схема, в которой роль крайних пружин играют стойки рамы, а центральной пружиной служит слабо сжимаемый ригель.

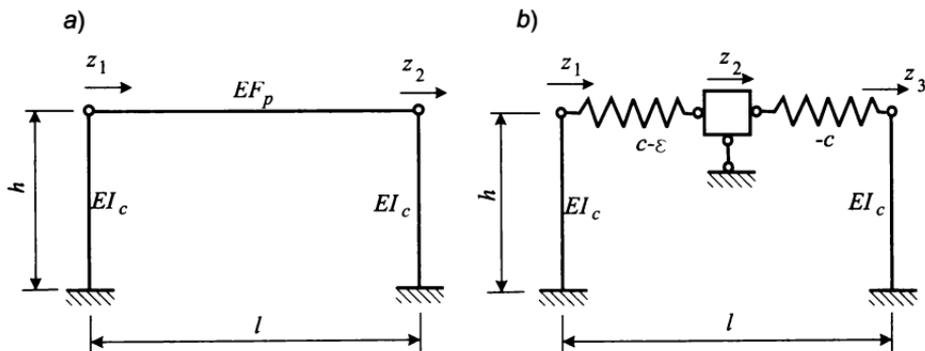


Рис. 3.10. Пример использования почти нуль-податливого элемента

Если ввести обозначения

$$\alpha = \frac{3EI_c}{h^3} \frac{l}{EF_p}, \quad k = \frac{EF_p}{l}, \quad (3.82)$$

то матрица жесткости системы, изображенной на рис. 3.10, а, будет как раз представлена формулой (2.2).

При весьма жестком ригеле безразмерный параметр  $\alpha$  будет малой величиной, и мы попадаем именно в ту неприятную ситуацию с почти изменяемой механической системой, которая и была рассмотрена в разделе 2.3. Один из возможных рычагов воздействия пользователем на обусловленность разрешающей системы линейных алгебраических уравнений является замена весьма жестких элементов *почти нуль-податливыми* элементами. Почти нуль-податливый элемент отличается от полностью нуль-податливого малым возмущением  $\varepsilon$  в величинах жесткостей положительной и/или отрицательной части схемы нуль-элемента. Параметр  $\varepsilon$  может быть подобран из условия равноподатливости моделируемого весьма жесткого элемента и почти нуль-податливого элемента.

В частности, для рассматриваемого нами случая расчетная схема с почти нуль-податливым элементом изображена на рис. 3.10, б. Малый параметр  $\varepsilon$  подберем из условия равноподатливости ригеля рамы и почти нуль-податливого элемента

$$1/(c - \varepsilon) + 1/(-c) = 1/k, \quad (3.83)$$

откуда получим

$$\varepsilon = c^2/(c + k), \quad c - \varepsilon = ck/(c + k). \quad (3.84)$$

Полагая  $c = k\alpha$  (вот где мы распорядились тем произволом, о котором говорилось в конце предыдущего раздела!), получаем матрицу жесткости для системы, изображенной на рис. 3.10, а

$$\mathbf{K} = \frac{k\alpha}{1+\alpha} \begin{bmatrix} 2+\alpha & -1 & 0 \\ -1 & -\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 1+\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

и можно показать, что при любых сколь угодно малых значениях параметра  $\alpha$  число обусловленности этой матрицы  $|\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}| < 4$ , что вполне удовлетворительно.

Мы не останавливаемся здесь на математических аспектах, возникающих при исследовании свойств нуль-элементов, отсылая заинтересованного читателя к нашей статье [Перельмутер, Сливкер, 1979]. Укажем только, что такой анализ приводит, в частности, к выводу о математической тождественности задачи расчета механической системы с нуль-элементами и вариационной постановки задачи на основе семейства модифицированных функционалов  $N$ . Произвольно назначаемая матрица  $\mathbf{D}_0$  для функционала  $N$  есть ни что иное как физическая характеристика соответствующего нуль-элемента. Общая же рекомендация для пользователей такова: жесткости нуль-элементов следует назначать так, чтобы они представляли собой величины примерно того же порядка, что и жесткости окружающих их элементов основной конструкции.

### 3.5. Геометрическая нелинейность. Устойчивость

Когда речь идет о геометрически нелинейных задачах, то прежде всего нужно четко определиться, о каком уровне геометрической нелинейности идет речь. Если документация к программному продукту составлена грамотно (добавим — и честно!), то она должна содержать ясные, не допускающие разночтений и двусмысленностей указания об уровне достижимости при решении геометрически нелинейных задач<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Вновь сошлемся на Лу Гринзоу [1997]: «Помните, что во многих случаях документация бывает серьезным слагаемым в оценке инструментария (если не множителем!)».

Не сделав этого, можно создать опасную иллюзию расширенной применимости программы, декларирующей в своей документации возможность решения геометрически нелинейных задач без ясно высказанного указания о границах применимости используемого варианта нелинейной теории. Здесь нет необходимости в изобретении велосипеда, так как уже более полувека назад ясно изложенная, последовательно выдержанная и ныне общепринятая классификация геометрически нелинейных постановок задач представлена в классическом труде В.В. Новожилова [1958]. Опираясь на эту классификацию, выделим следующие 4 этажа геометрически нелинейных постановок задач для конечномерных систем.

### 3.5.1. Четыре этажа геометрически нелинейных постановок задач

На низшем, нулевом этаже естественно расположить все задачи, в которых можно полностью пренебречь любыми геометрически нелинейными эффектами. Иначе говоря, нулевой этаж относится к геометрически линейным постановкам задач.

Прежде, чем подниматься хотя бы на одну ступень выше, стоит обратить внимание на то, что геометрическая нелинейность способна просачиваться в разрешающие уравнения задачи двумя каналами: через уравнения, связывающие перемещения с деформациями, и через уравнения равновесия. Поэтому на первом этаже мы оставим задачи, где допустимо открыть для геометрической нелинейности шлюзы лишь одного из этих каналов, а именно — через уравнения равновесия.

К первому этажу геометрической нелинейности отнесем слабейший вариант геометрически нелинейной теории. В этом варианте теории считается, что уравнения равновесия следует записывать для деформированного состояния системы. Что касается связи деформаций с перемещениями, то эти соотношения для первого этажа геометрически нелинейных задач принимаются в линейном варианте. В строительной механике задачи первого этажа геометрической нелинейности иногда называют расчетом по деформированной схеме. В англоязычной литературе употребляется название теория второго порядка. Встречается также такое словоупотребление как *линеаризованные уравнения*. Для конструкций, используемых в строительном проектировании, первый этаж геометрической нелинейности охватывает весьма широкий круг задач и, в первую очередь, задачи расчета стержневых систем,

изгибающие моменты в элементах которых вычисляются с учетом поправок от влияния продольных сил.

Поднимаясь по ступенькам выше, останавливаемся на втором этаже иерархии геометрически нелинейных постановок задач. Отличием от первого этажа служит раскрытие второго канала проникновения геометрической нелинейности — через геометрические уравнения, связывающие перемещения с деформациями. По сравнению с первым этажом существенным здесь является различие порядков малости деформаций и поворотов, при этом считается, что квадраты углов поворотов элементов рассматриваемой расчетной схемы являются величинами того же порядка малости, что и компоненты деформации, которые, в свою очередь, пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Малы по сравнению с единицей и сами повороты. Характерный пример задач этого этажа нелинейности — теория гибких пластин на основе уравнений Кармана [Вольмир, 1956].

К третьему этажу геометрической нелинейности можно отнести задачи, в которых деформации малы по сравнению с единицей, тогда как относительно поворотов таких предположений сделать нельзя. Конструкции с гибкими нитями служат отличным примером задач этого этажа геометрической нелинейности. Задачи третьего этажа нелинейности, в свою очередь, могут быть ранжированы за счет введения дополнительных упрощающих предположений. Так, например, в той же теории гибких нитей предположение о пологости начальной и конечной конфигураций нити в процессе ее нагружения (нити с малой стрелой провисания) позволяет [Меркин, 1980], не спускаясь полностью на второй этаж, существенно упростить как математическую постановку задачи, так и опосредованно методы ее решения. Если угодно, задачи этого типа можно отнести на этаж «два с половиной», расположив их на промежуточной лестничной площадке<sup>15</sup>.

Наконец, на вершине этой иерархии расположены самые сложные задачи — задачи четвертого этажа геометрической нелинейности, когда сами относительные деформации нельзя считать малыми величинами по сравнению с единицей. Необходимость проведения расчетов изделий из резины и резиноподобных материалов заставляет расчетчиков подниматься и на эти высоты.

---

<sup>15</sup> Невольно вспоминается выражение об «остроумии на лестнице», которым обычно характеризуется запоздалая реакция в беседе, с той лишь разницей, что в нашем случае такое остроумие конструктивно.

Для дискретных расчетных схем, рассматриваемых в настоящей главе, геометрическая нелинейность никак не сказывается на матрицах  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ , используемых в формулах (3.5), поскольку эти матрицы отражают только топологическую информацию о расчетной схеме, а сама топология системы нечувствительна к взаимоотношениям порядков малости отдельных компонент деформации. Это принципиально важно, так как именно отсюда вытекает счастливая возможность рассматривать все влияние геометрической нелинейности на уровне отдельного конечного элемента, а для перехода к параметрам системы в целом воспользоваться теми же формулами (3.5).

### 3.5.2. Геометрическая нелинейность для стержней ферменного типа

Для иллюстрации описанного выше четырехэтажного здания геометрической нелинейности обратимся к простейшему примеру конечного элемента — стержню ферменного типа (так мы будем называть стержень с шарнирным присоединением к узлам на обоих концах при отсутствии внеузловой нагрузки на этот стержень). Для упрощения рассмотрим плоскую задачу.

Пусть в исходном состоянии стержень занимает положение  $MN$ , с началом в узле  $M$  и концом в узле  $N$ . Под *исходным* здесь понимается состояние стержня после получения им предварительной вытяжки (дислокации) на величину  $d$ . В результате последующей деформации стержень, оставаясь прямолинейным, займет положение  $M^*N^*$ , как это показано на рис. 3.11.

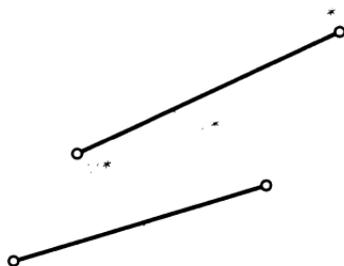


Рис. 3.11. Картина перемещений ферменного стержня

Введем следующие обозначения:

- $L_x, L_y$  — проекции стержня на соответствующие оси в исходном состоянии;
- $L$  и  $L^*$  — длина стержня в исходном и окончательном состояниях соответственно;
- $u_M, u_N, v_M, v_N$  — перемещения узлов  $M$  и  $N$  в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно;
- $e_x, e_y$  — удлинения проекций исходного состояния стержня на координатные оси;
- $\Delta$  — полное удлинение стержня;
- $N$  — продольная сила в стержне, положительная при растяжении.

Рассмотрим совокупность векторов  $\mathbf{s}, \Delta, \mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{p}$ , относящихся к отдельному элементу (стержню), у которых для сокращения записи опущен нижний индекс "e", использованный нами ранее в формулах (3.1) – (3.3). Имеем

$$\mathbf{s} = [N], \quad \Delta = [\Delta], \quad \mathbf{d} = [d], \quad \mathbf{u}^T = [u_M \ v_M \ u_N \ v_N],$$

$$\mathbf{p}^T = [P_{Mx} P_{My} P_{Nx} P_{Ny}]. \quad (3.86)$$

Из геометрических соображений (рис. 3.11) получаем

$$e_x = u_N - u_M, \quad e_y = v_N - v_M, \quad \Delta = (L^* - L) + d, \quad (3.87)$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2, \quad L^{*2} = (L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2. \quad (3.88)$$

Пусть  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_x^*, \lambda_y^*$  — направляющие косинусы отрезков  $MN$  и  $M^*N^*$  по отношению к неподвижной системе осей  $(x, y)$  (см. рис. 3.11), то есть

$$\lambda_x = \cos \alpha = L_x / L, \quad \lambda_y = \sin \alpha = L_y / L, \quad (3.89)$$

$$\lambda_x^* = \cos \alpha^* = (L_x + e_x) / L^*, \quad \lambda_y^* = \sin \alpha^* = (L_y + e_y) / L^*. \quad (3.90)$$

Введем в рассмотрение следующие важные геометрические параметры, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$e = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y, \quad \omega = (\lambda_x e_y - \lambda_y e_x) / L, \quad \varepsilon = e + 0,5(e^2 + \omega^2 L^2) / L. \quad (3.91)$$

Геометрический смысл параметра  $e$  очевиден — это проекция разности перемещений концов стержня на направление оси стержня в его недеформированном состоянии. Что касается параметра  $\omega$ , то, как мы увидим в дальнейшем, он представляет собой угол поворота стержня при условии его малости по сравнению с единицей и малости по сравнению с единицей относительного параметра  $e/L$ .

Параметр  $e$  в матричной форме представим в виде

$$e = \mathbf{Q}^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}^T = [ [-\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x \ \lambda_y] ], \quad (3.92)$$

при этом  $\mathbf{Q}$  — это матрица уравнений равновесия в геометрически линейной постановке задачи.

Отметим, что, вводя в рассмотрение матрицу вращения  $\Omega$ ,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

получим  $(\Omega \mathbf{Q})^T = [ [\lambda_y \ -\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x] ]$ , так что параметр поворота  $\omega$  также можно представить в матричной форме

$$\omega L = \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}, \quad (3.94)$$

что будет удобно для нас в дальнейшем.

Исходя из определяющих соотношений (3.87), (3.88) и (3.91), можно получить формулу, связывающую деформацию стержня  $\Delta$  с перемещениями его концов, выраженную через введенные геометрические параметры, а именно

$$(\Delta - d) \left[ 1 + \frac{\Delta - d}{2L} \right] = \varepsilon, \quad (3.95)$$

справедливость которой проверяется непосредственной подстановкой. Действительно, левая часть в (3.95) цепочкой преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} (L^* - L) \left[ 1 + \frac{L^* - L}{2L} \right] &= \frac{L^{*2} - L^2}{2L} = \\ &= \frac{(L_x + e_x)^2 + (L_y + e_y)^2 - L_x^2 - L_y^2}{2L} = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y + \frac{e_x^2 + e_y^2}{2L}, \end{aligned}$$

и к точно такому же виду приводится и выражение для  $\varepsilon$  по (3.91), если учесть, что  $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$ .

Из формулы (3.95) немедленно следует выражение для деформации стержня

$$\Delta = L(\sqrt{1 + 2\varepsilon/L} - 1) + d. \quad (3.96)$$

Обратим внимание, что при выводе формулы (3.96) мы не пользовались никакими упрощающими предположениями,

связанными с сопоставлением порядков малости входящих в эту формулу величин. Поэтому формула (3.96) как раз и является тем нелинейным геометрическим уравнением, связывающим деформацию  $\Delta$  с компонентами вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , которое расположено на самом высоком — четвертом этаже геометрической нелинейности.

Опускаясь на один этаж ниже, будем считать, что относительная деформация  $\Delta/L$  (равно как и относительная дислокация  $d/L$ ) являются величинами весьма малыми по сравнению с единицей, то есть

$$(\Delta - d)/L \ll 1, \quad (3.97)$$

что дает возможность заменить на единицу выражение, стоящее в квадратных скобках в левой части (3.95). В результате приходим к геометрическому уравнению третьего этажа геометрической нелинейности

$$\Delta = \varepsilon + d = e + 0,5(e^2 + \omega^2 L^2)/L + d. \quad (3.98)$$

Обратим внимание, что параметры  $e$  и  $\omega$  линейно зависят от перемещений — формулы (3.92) и (3.94). Поэтому, начиная с третьего этажа и ниже, деформация  $\Delta$  складывается из линейной относительно компонент вектора перемещений части и квадратичной части. Но прежде, чем спускаться на очередной этаж, остановимся на геометрическом смысле параметра  $\omega$ .

Из рис. 3.11 видно, что угол  $\beta$ , на который поворачивается стержень в результате перемещений его концов, может быть определен разностью углов  $\alpha^*$  и  $\alpha$ , то есть

$$\beta = \alpha^* - \alpha. \quad (3.99)$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha^* = (\lambda_y L + e_y)/(\lambda_x L + e_x), \quad \operatorname{tg} \alpha = \lambda_y / \lambda_x, \quad (3.100)$$

то, воспользовавшись формулой для тангенса разности двух углов и учтя соотношение  $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 1$ , получим после несложных преобразований:

$$\operatorname{tg} \beta = (\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)/(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha^*) = \omega L/(L + e). \quad (3.101)$$

Для малых углов поворота  $\beta$  тангенс может быть отождествлен с самим углом, а учитывая и малость  $e$  по сравнению с  $L$ , получим отсюда

$$\beta = \omega, \quad (3.102)$$

то есть параметр  $\omega$  представляет собой угол поворота стержня.

Возвращаясь теперь к формуле (3.98) и переходя на второй этаж, будем считать, что сам угол поворота  $\omega$ , хотя и является малой по сравнению с единицей величиной, все же не настолько мал, чтобы его квадратом можно было пренебречь по сравнению с относительным параметром  $e/L$ . Точнее говоря, будем считать, что эти величины одинаковы по порядку малости, и обе существенно меньше единицы

$$e/L \approx \omega^2 \ll 1. \quad (3.103)$$

В результате вместо формулы (3.98) на втором этаже геометрической нелинейности получим

$$\Delta = e + 0,5\omega^2 L + d. \quad (3.104)$$

Наконец, на первом и нулевом этажах приходим к линейным соотношениям в уравнениях связи деформаций с перемещениями

$$\Delta = e + d, \quad (3.105)$$

что совпадает с общим случаем геометрического уравнения (3.2) в линейной постановке задачи, если принять во внимание (3.92).

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений равновесия, используемых на разных этажах здания геометрической нелинейности. В общем случае, записывая эти уравнения для деформированного состояния стержня, получим

$$\mathbf{Q}^* \mathbf{s} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q}^{*T} = [ [-\lambda_x^* \quad -\lambda_y^* \quad \lambda_x^* \quad \lambda_y^* ] ], \quad (3.106)$$

и нам осталось только найти выражения для направляющих косинусов оси стержня в его деформированном состоянии.

Воспользуемся формулами (3.90) и (3.99). Тогда получим

$$\begin{aligned} \lambda_x^* &= \cos(\alpha + \beta) = \lambda_x \cos \beta - \lambda_y \sin \beta, \\ \lambda_y^* &= \sin(\alpha + \beta) = \lambda_y \cos \beta + \lambda_x \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Входящие в формулы (3.107) синус и косинус угла поворота стержня  $\beta$  можно выразить через тангенс этого же угла, определяемый формулой (3.101). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = 1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}, \\ \sin \beta &= \operatorname{tg} \beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = [1 / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}] \omega L / (L + e), \end{aligned} \quad (3.108)$$

так что

$$\begin{aligned} \lambda_x^* &= [\lambda_x - \lambda_y \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}, \\ \lambda_y^* &= [\lambda_y + \lambda_x \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Формулы (3.109) для направляющих косинусов оси стержня в деформированном состоянии являются точными, поскольку при их выводе не использовались какие либо предположения относительно малости параметров деформации. Поэтому эти формулы справедливы на верхнем — четвертом этаже здания геометрической нелинейности.

Казалось бы, что на третьем этаже геометрической нелинейности можно положить

$$L/(L + e) \approx 1, \quad (3.110)$$

однако на самом деле это не допустимо, поскольку из малости относительных деформаций  $\Delta/L$  по сравнению с единицей еще не следует малость отношения  $e/L$  по сравнению с единицей. Так например, в случае поворота стержня на  $90^\circ$  с сохранением его длины будем иметь  $\Delta/L = 0$ , тогда как  $e/L = 1$ . Поэтому третий этаж геометрической нелинейности обязан наследовать полные выражения для направляющих косинусов  $\lambda_x^*$  и  $\lambda_y^*$  четвертого этажа.

На втором этаже справедливы оценки (3.103) и (3.110), поэтому из (3.109) получаем после отбрасывания величин более высокого порядка малости

$$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y \omega, \quad \lambda_y^* = \lambda_y + \lambda_x \omega. \quad (3.111)$$

Несмотря на то, что повороты  $\omega$  являются малыми величинами уже на втором этаже, при переходе на первый этаж формулы (3.111) сохраняют свою силу. Например, в первой из формул (3.111) из малости поворотов еще не следует малость произведения  $\lambda_y \omega$  по сравнению с  $\lambda_x$ . И только опускаясь на нулевой уровень, приходим к линейным уравнениям равновесия

$$\lambda_x^* = \lambda_x, \quad \lambda_y^* = \lambda_y, \quad (3.112)$$

то есть

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}. \quad (3.113)$$

Воспользовавшись теперь представлениями матриц  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{\Omega}$  по (3.92) и (3.93), получим выражение для деформации  $\Delta$  на третьем этаже геометрической нелинейности в матричной форме. Имеем

$$e^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{u}, \quad \omega^2 L^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \mathbf{u}. \quad (3.114)$$

Таким образом, в матричной форме на третьем этаже геометрической нелинейности деформация  $\Delta$ , определяемая формулой (3.98), запишется в виде суммы линейной и квадратичной форм от перемещений

$$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} + d, \quad (3.115)$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T + \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

Таблица 3.2.

ЭТАЖ	Малые величины	Геометрические уравнения	
		Параметры уравнений равновесия	
IV	—	$\Delta = L(\sqrt{1+2\varepsilon/L} - 1) + d$	
		$\lambda_x^* = [\lambda_x - \lambda_y \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}$	$\lambda_y^* = [\lambda_y + \lambda_x \omega L / (L + e)] / \sqrt{1 + \omega^2 L^2 / (L + e)^2}$
III	$\frac{\Delta - d}{L} \ll 1$	$\Delta = e + 0,5(e^2 + \omega^2 L^2) / L + d$	
		$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{u} + d$	
II	$e/L \ll 1$ $\omega^2 \approx e/L$	$\Delta = e + 0,5\omega^2 L + d$	
		$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u} + d$	
I	$\omega^2 \ll e/L$	$\lambda_x^* = \lambda_x - \lambda_y \omega, \quad \lambda_y^* = \lambda_y + \lambda_x \omega$	
		$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{L} \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}$	
0	$\omega \ll 1$	$\Delta = e + d$	
		$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + d$	
		$\lambda_x^* = \lambda_x, \quad \lambda_y^* = \lambda_y$	
		$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$	

Соответственно, на втором этаже из (3.104) получим

$$\Delta = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \frac{1}{2L} \mathbf{u}^T \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u} + d. \quad (3.117)$$

Несложно также заметить из (3.111), что матрица равновесия  $\mathbf{Q}^*$  на первом и втором этажах здания геометрической нелинейности зависит от перемещений  $\mathbf{u}$  линейно, при этом

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \Omega \mathbf{Q} \omega = \mathbf{Q} + \frac{1}{L} \Omega \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \Omega^T \mathbf{u}. \quad (3.118)$$

Соберем теперь вместе все полученные результаты, расположив их в таблице 3.2 с указанием соответствующего этажа геометрической нелинейности.

### 3.5.3. Геометрически нелинейные уравнения в вариациях

В самом общем случае, договорившись предварительно об уровне достижимости, в принципе, можно было бы сначала строить все нелинейные уравнения, после чего подвергать эти уравнения дискретизации, а затем искать способы их решения. Мы, однако, поступим здесь иначе и, имея в виду последующее использование в той или иной форме шаговых процедур при решении нелинейных задач, будем сразу строить необходимые уравнения в вариациях (в приращениях) для конечномерных систем. Точнее говоря, не конкретизируя тип конечного элемента, выясним структуру геометрически нелинейных уравнений в вариациях, которая оказывается общей для всех дискретных систем.

Итак, пусть перемещения узлов  $\mathbf{u}$ , возникающие в процессе нагружения, не настолько малы, чтобы направляющие косинусы или другие аналогичные им геометрические параметры (речь идет об углах поворотов), входящие в коэффициенты системы уравнений равновесия, могли считаться одинаковыми до и после деформирования системы. В этом случае необходимо переходить к уравнениям, учитывающим эффекты геометрической нелинейности.

Будем считать известной некоторую (начальную) конфигурацию системы, характеризуемую узловыми перемещениями  $\mathbf{u}_0$ , которые могут быть и нулевыми, если выбор такого начала отсчета удобен. В этой конфигурации выполняются условия равновесия

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0) \mathbf{s}_0 = \mathbf{p}_0 \quad (3.119)$$

между начальными узловыми нагрузками  $\mathbf{p}_0$  и начальными усилиями  $\mathbf{s}_0$ . Пусть теперь нагрузка получила приращение  $\delta \mathbf{p}$ , которому должны соответствовать приращения усилий  $\delta \mathbf{s}$  и перемещений  $\delta \mathbf{u}$ . В возмущенном состоянии уравнения равновесия запишутся как

$$[\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0) + \delta\mathbf{Q}](\mathbf{s}_0 + \delta\mathbf{s}) = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}, \quad (3.120)$$

а после раскрытия скобок и с учетом (3.119) они приобретают вид

$$\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0 + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.121)$$

Если компоненты вектора дополнительных перемещений  $\delta\mathbf{u}$  относительно невелики (но все же требуют геометрически нелинейного анализа), то для получения уравнений в вариациях можно ограничиться уровнем второго этажа геометрически нелинейной постановки задачи. В этом случае произведение  $\delta\mathbf{Q}\mathbf{s}_0$  может быть представлено как линейная функция от приращения перемещений [Осташевский, 1973], [Оден, 1976], что приводит к уравнениям

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}_0)\delta\mathbf{s} + \mathbf{T}(\mathbf{s}_0)\delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.122)$$

Например, для ферменного стержня в плоской задаче, опираясь на таблицу 3.2, полагаем

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) = [[-\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x \ \lambda_y]],$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}_0) \delta\mathbf{u} = [[\lambda_y \ -\lambda_x \ -\lambda_y \ \lambda_x]]^T \delta\omega N_0 = \frac{N_0}{L} \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T \delta\mathbf{u}, \quad (3.123)$$

где  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  — направляющие косинусы стержня в начальной конфигурации системы, а  $N_0$  — начальное усилие в стержне.

Зависимость между приращениями деформаций элементов  $\delta\Delta$  и приращениями узловых перемещений определим выражениями

$$\delta\Delta = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{Q}^T \delta\mathbf{u}. \quad (3.124)$$

Фактически соотношения (3.124) представляют собой проварьированные геометрические уравнения второго этажа нелинейности. Например, в случае ферменного стержня будем иметь

$$\delta\Delta = \delta e + \omega L \delta\omega = \mathbf{Q}^T(\mathbf{u}_0) \delta\mathbf{u} + \mathbf{u}_0^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T / L \delta\mathbf{u}, \quad (3.125)$$

так что в этом случае

$$\delta\mathbf{Q}^T = \mathbf{u}_0^T \mathbf{\Omega} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{\Omega}^T / L. \quad (3.126)$$

Подставляя (3.124) в физические уравнения (3.1), которые для приращений выполняются в форме

$$\delta\mathbf{s} = \mathbf{F} \delta\Delta, \quad (3.127)$$

и вводя затем полученные выражения для  $\delta\mathbf{s}$  в (3.122) получим

$$[\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T + \mathbf{T}(\mathbf{s}_0) + \mathbf{Q}\mathbf{F}\delta\mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q}\mathbf{F}\delta\mathbf{Q}^T] \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.128)$$

В других обозначениях эти уравнения можно записать как

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)]\delta\mathbf{u} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.129)$$

Здесь четко видно, что к обычной матрице жесткости  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{QFQ}^T$  добавляется матрица начальных напряжений  $\mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{s}_0)$ , линейно зависящая от усилий в системе перед началом приращения нагрузки, и матрица начальных поворотов

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0) = \mathbf{QF}\delta\mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{QFQ}^T + \delta\mathbf{QF}\delta\mathbf{Q}^T,$$

не более чем квадратично зависящая от перемещений. В уравнениях (3.129) не представлена матрица начального нагружения Дж. Одена [1976], которая корректирует нагрузку (типичным примером, в котором видна необходимость корректировки нагрузки, является случай гидростатического давления жидкости — при повороте элементарной площадки нагрузка меняется). Неучет матрицы начального нагружения говорит о том, что предполагается независимость нагрузки от конфигурации системы, или же считается, что соответствующие коррективы введены при формировании вектора приращений нагрузки  $\delta\mathbf{p}$ . Такой подход связан с тем, что непосредственный учет матрицы начального нагружения лишает коэффициенты уравнений симметрии, что не всегда является удобным. Матрицу  $\mathbf{K}_G$  принято называть *матрицей геометрической жесткости*.

Рассмотрим систему, находящуюся в равновесии в состоянии, для которого выполняются уравнения (3.119), и напишем равенства, определяющие изменения усилий и перемещений при пробном нагружении силами, пропорциональными одному параметру, т.е. при приращении нагрузки  $\lambda\delta\mathbf{p}$ . Обозначая соответствующие изменения сил и перемещений как  $\lambda\delta\mathbf{s}$  и  $\lambda\delta\mathbf{u}$ , имеем

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0 + \lambda\delta\mathbf{s}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0 + \lambda\delta\mathbf{u})]\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{p}. \quad (3.130)$$

Теперь используем новую матрицу жесткости для того, чтобы найти критическое значение нагрузки  $\mathbf{p}_{cr} = \mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}$ . Раскладывая в ряд  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  из (3.130) с сохранением членов, линейно зависящих от  $\lambda$ , получаем уравнение

$$\{[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{s}_0) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0)] + \lambda[\mathbf{K}_1(\delta\mathbf{s}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u})]\}\delta\mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (3.131)$$

или

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda\Delta\mathbf{K}_G(\delta\mathbf{s}, \mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u})]\delta\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (3.132)$$

где  $\delta\mathbf{U}$  — собственный вектор, характеризующий форму потери устойчивости системы, а через  $\Delta\mathbf{K}_G$  обозначен матричный множитель,

стоящий в квадратных скобках справа от  $\lambda$  в уравнении (3.131).

Проблема собственных значений (3.132) основана на решении задачи в линейном приближении для окрестности смещенного состояния равновесия. Отсюда можно получить и линейную задачу устойчивости, полагая все начальные усилия и начальные перемещения равными нулю. Если при этом еще пренебречь квадратичными слагаемыми в матрице начальных смещений, то получим, что левая часть (3.132) линейно зависит от нагрузки

$$\{\mathbf{K}_0 + \lambda [\mathbf{K}_1(\delta s) + \mathbf{K}_2(\delta u)]\} \delta U = 0. \quad (3.133)$$

Допущение о независимости критической нагрузки от перемещений  $\lambda \delta u$  приводит к исчезновению матрицы  $\mathbf{K}_2$ , и мы приходим к уравнениям эйлера типа для критической нагрузки

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_1(\delta s)] \delta U = 0. \quad (3.134)$$

Наименьшее собственное значение этого уравнения  $\lambda_1$  определяет критическую нагрузку как  $\lambda_1 \delta p$ .

Полезно обратить внимание на то обстоятельство, что при использовании уравнений эйлера типа, по сути, предполагается неизменность распределения внутренних сил в системе при увеличении интенсивности нагружения  $\lambda$ . Это свойство не всегда выполняется, в особенности для нелинейно деформирующихся систем. Поэтому некоторые программные разработки определяют два критических значения нагрузки — первое является наименьшим критическим значением  $\lambda_1$  уравнений типа (3.134), а второе определяется как интенсивность нагрузки, при которой теряется положительная определенность уравнений типа (3.129) в процессе некоторого более или менее реалистического закона нагружения (например, при увеличении интенсивности только временной нагрузки и неизменном значении постоянной нагрузки), который моделируется шаговой процедурой (см. раздел 5.6). При этом возникает нетривиальная задача о выборе того критического значения, которое следует продемонстрировать в качестве свидетельства достаточности полученного коэффициента запаса по устойчивости.

К сожалению, нормы проектирования, где можно встретить такой, например, текст «*При проверке устойчивости мачты в целом расчетная сила в стволе должна быть меньше критической силы в 1,3 раза*» (см. СНиП II-23-81\*, п. 16.13), ничего не говорят об этом, хотя по некоторым косвенным свидетельствам можно предположить, что имеется в виду эйлеров случай.

В заключение этого раздела нелишне отметить, что геометрически нелинейную постановку задач сопровождает, как правило, потеря единственности решения, причем множественность решений может быть и не связана с потерей устойчивости механической системы. К сожалению, далеко не все расчетные программы предупреждают о такой возможности, а выдаваемое решение является только одним из возможных, которое определяется используемым алгоритмом или рассматриваемой историей нагружения. Мы сознательно ограничиваемся только таким замечанием, предполагая, что расчетчика *абсолютно необходимо* предупредить о возможной неединственности, но *не требуя полного анализа* всех ветвей кривой состояния равновесия, поскольку такой анализ далеко выходит за рамки обычных расчетных процедур, о которых говорится в этой книге, и относится, скорее, к исследовательской проблематике.

### **3.6. Конструктивная нелинейность — системы с односторонними связями**

Системы, где ограничения на перемещения определены условиями-неравенствами (односторонние связи) встречаются чаще, чем об этом обычно думают. Конструкция, свободно опертая на некоторую поверхность, которая запрещает перемещение в сторону этой поверхности и не препятствует перемещению в противоположном направлении, гибкие нити, которые позволяют сблизиться своим концевым точкам и не разрешают им удаляться более чем на длину нити, являются простейшими примерами. Типичными примерами могут также служить: каменная кладка, выполненная насухо, связь между фундаментом сооружения и подстилающим его грунтом. Сыпучие грунты или абсолютно гибкие мембраны могут служить примерами более сложных систем с односторонними связями. Однако, по традиции, такого рода связи рассматриваются как идеальные двусторонние, проверяя апостериори, не нарушает ли полученное решение характер работы связей. Эта традиция сложилась давно, когда «врукопашную» получить решение для правильно сформулированной задачи было достаточно утомительно, сейчас же практически любой современный программный комплекс такие задачи решает в правильной постановке<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> Точнее сказать, «обязан решать» в правильной постановке, хотя за примерами программных разработок, когда эти обязанности не выполняются, далеко ходить не надо.

Рассмотрим некоторую упругую систему с односторонними связями в количестве  $s$  и примем для дальнейшего соглашения об индексации односторонних связей греческими буквами. Выберем правило знаков для реакций  $R$  в этих связях таким, чтобы допустимое по природе связи усилие (сжатие для связи-упора или растяжение для связи в виде гибкой нити) считать положительным. Будем также считать положительными те перемещения  $U$ , которые не ограничиваются односторонней связью (например, сближение концов гибкой нити). Поскольку односторонняя связь может находиться только в одном из состояний: рабочем (связь включена), когда  $R > 0$  и  $U = 0$  или нерабочем (связь выключена), при котором  $R = 0$  и  $U > 0$ , то для всех односторонних связей системы должны выполняться следующие неравенства и равенства:

$$R_\alpha \geq 0; \quad U_\alpha \geq 0; \quad R_\alpha U_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (3.135)$$

Эти условия записаны для абсолютно жестких односторонних связей, таких, например, как односторонняя связь — упор. В случае упругих односторонних связей (скажем, для пружин конечной жесткости, работающих только на растяжение) вместо (3.135) при принятом правиле знаков следовало бы написать

$$R_\alpha = \frac{1}{2} k_\alpha (|U_\alpha| - U_\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (3.136)$$

где  $k_\alpha$  — жесткость упругой односторонней связи.

Действительно, при положительном перемещении  $U_\alpha$ , которому односторонняя связь не сопротивляется, из (3.136) получаем  $R_\alpha = 0$ , тогда как при отрицательном перемещении, из (3.136) следует линейная зависимость  $R_\alpha = -k_\alpha U_\alpha$  с положительным (и значит, воспринимаемым односторонней связью) усилием. В дальнейшем будем считать, что в рассматриваемой системе все односторонние связи являются жесткими. На самом деле, как это будет показано в конце настоящего раздела, указанное обстоятельство не является ограничением на класс односторонних связей, поскольку любая упругая односторонняя связь может быть сведена к жесткой односторонней связи.

В рассматриваемой системе отбросим все односторонние связи, заменив их действие неизвестными пока усилиями  $R_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ). Будем рассчитывать эту систему методом перемещений, причем основную систему образуем так, чтобы в ней усилия  $R_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ) не могли вызывать перемещений по направлениям отброшенных односторонних связей. Кроме того, будем считать, что выбранная

основная система метода перемещений геометрически неизменяема. Во всем остальном выбор основной системы произволен.

Совокупности всех кинематических неизвестных  $Z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), введенных при образовании основной системы метода перемещений, достаточно для однозначного определения интересующих нас перемещений по направлениям отброшенных односторонних связей  $U_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ), иначе говоря,

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^n C_{\alpha j} Z_j + C_\alpha^p \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (3.137)$$

где  $C_{\alpha j}$  — перемещение в основной системе по направлению односторонней связи с номером  $\alpha$  от единичного перемещения  $\bar{Z}_j = 1$ , а  $C_\alpha^p$  представляет собой то же перемещение, но вызванное внешними воздействиями.

Уравнения равновесия, представляющие собой условия равенства нулю суммарных реакций во введенных при формировании основной системы связях, записываются при этом в виде

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + \sum_{\alpha=1}^s B_{i\alpha} R_\alpha + r_i^p = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.138)$$

где  $r_{ij}$  — реакция в  $i$ -ой дополнительной связи метода перемещений от единичного перемещения  $\bar{Z}_j = 1$ ,  $B_{i\alpha}$  — реакция в той же связи от действия единичной силы  $\bar{R}_\alpha = 1$ , а  $r_i^p$  — та же реакция, но от действия внешней нагрузки. Уравнения (3.138) составляются для обычной линейной системы, а определение входящих в эти уравнения коэффициентов выполняется по обычным правилам строительной механики.

На основе известных в строительной механике условий взаимности перемещений и реакций получаем:

$$B_{i\alpha} = -C_{\alpha i} \quad (i = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, s). \quad (3.139)$$

Совокупность выражений (3.135), (3.137) – (3.139) совпадает с необходимыми условиями минимизации (условиями Куна-Таккера [Кюнце, Крелле, 1965]) для следующей задачи квадратичного программирования:

минимизировать квадратичный функционал  $f(\mathbf{Z})$

$$f(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} Z_i Z_j + \sum_{i=1}^n r_i^p Z_i \quad (3.140.a)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n C_{aj} Z_j + C_a^p \geq 0 \quad (\alpha = 1, \dots, s). \quad (3.140.b)$$

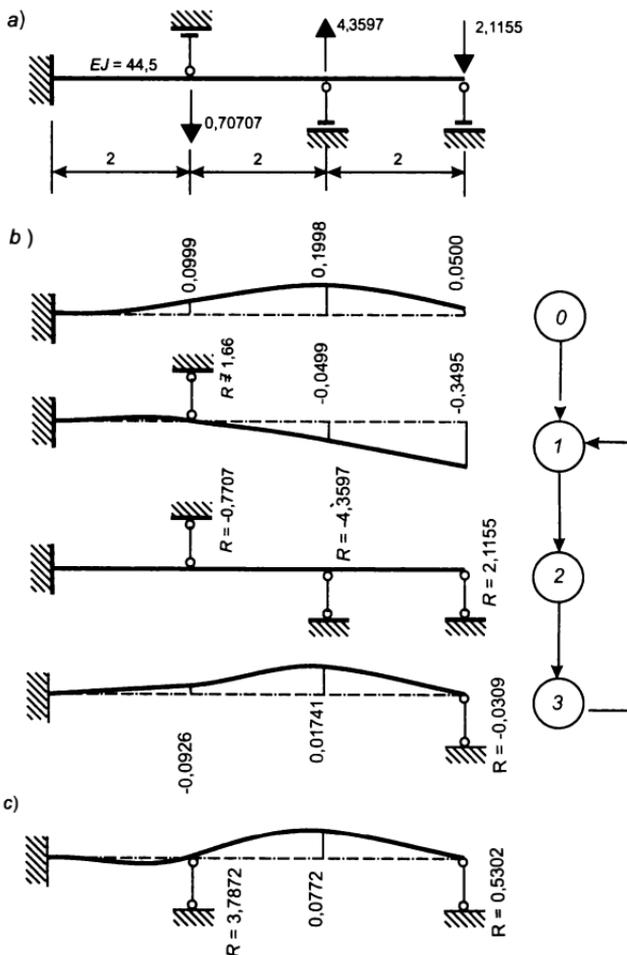
Свойства решений задачи (3.140) и методы ее численного решения хорошо исследованы, интересующихся читателей мы можем отослать к специальной литературе (см., например, [Перельмутер, 1969], [Вовкушевский, Шойхет, 1981]), а здесь мы лишь отметим те особенности решений, которые необходимо понимать при постановке задачи и анализе результатов.

Рассмотренная выше постановка задачи относилась к системам с идеальными связями без трения, у которых единственным источником нелинейности было наличие односторонних связей. Системы такого типа часто называют *конструктивно нелинейными*. Для них характерно полностью обратимое упругое поведение, которое определяется единственным решением задачи (3.128). Свойство единственности решения может быть потеряно при включении в рассмотрение сил трения даже для тех случаев, когда задана история нагружения системы [Вовкушевский, Шойхет, 1981]. В связи с этим, следует весьма осторожно относиться к моделированию поведения упругопластических систем в форме систем с идеальными односторонними связями, которое время от времени предлагается некоторыми исследователями. Идентичность поведения идеально упругопластических систем и систем с трением, а также имеющая там место неединственность поля скоростей, хорошо известны [Вовкушевский, Шойхет, 1981], [Ивлев, 1966].

Достаточно часто разработчики программных систем избегают применения математически обоснованных методов решения задачи квадратичного программирования и применяют «физически очевидный» итерационный процесс, который заключается в следующем — для некоторого предполагаемого состояния системы, в котором часть односторонних связей выключена, а часть (работающие связи) рассматриваются как двусторонние, выполняется обычный расчет, и по его результатам на следующем этапе итерационного процесса у всех «неправильно работающих» односторонних связей меняется их состояние (отбрасываются связи с недопустимыми реакциями и рассматриваются как двусторонние те связи, где обнаружилось недопустимое перемещение). После этого весь процесс повторяется до тех пор, пока в системе не останется «неправильно работающих» односторонних связей. На профессиональном жаргоне среди специалистов такой, казалось бы

напрashaивающийся по существу задачи, подход к поиску рабочей системы носит название *алгоритма Рабиновича*, поскольку, по-видимому, впервые он был четко сформулирован еще 50 лет назад в основополагающей для всей теории систем с односторонними связями статье И.М. Рабиновича [1950].

К сожалению, несмотря на широкое распространение этого способа решения задачи, он не гарантирует сходимости и способен приводить к заикливанию процесса, как это было показано на достаточно простом примере в работе [Перельмутер, 1978]. Последовательность расчетных состояний для этого примера (рис. 3.12, *a*) такова, что через четыре итерации процесс заикливается (обратите внимание на знаки перемещений и реакций в односторонних связях)!

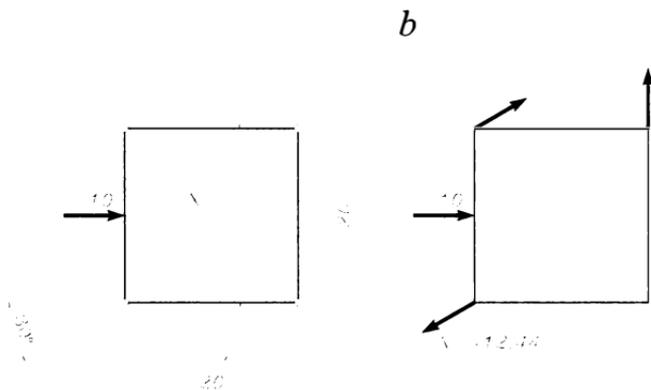


**Рис. 3.12.** Процесс уточнения рабочей системы: *a* — рассчитываемая схема; *b* — последовательность проверяемых состояний; *c* — точное решение

В системах с односторонними связями, не являющимися по традиционной терминологии метода сил *лишними*, возможны и другие проблемы. Не исключено, что в результате последовательных итераций система на одном из промежуточных этапов расчета перейдет в состояние геометрической изменяемости, так что расчетная программа войдет при этом в тупиковую ситуацию. В качестве примера, подтверждающего такую возможность, рассмотрим абсолютно твердое тело, раскрепленное в плоскости пятью пружинами одинаковой жесткости, работающими только на растяжение (рис. 3.13).

Если стартовать в итерационном процессе с системы, в которой все пружины считаются двусторонними, то после первого же этапа расчета получим, что пружины с номерами 2, 4 и 5 выключаются из работы. Двух оставшихся растянутыми пружин с номерами 1 и 3 недостаточно для обеспечения геометрической неизменяемости системы. В то же время рабочая система существует — она показана на рис. 3.13,*b*, там же приведены развивающиеся в этих пружинах усилия.

Мы рекомендуем разработчикам (и пользователям!) протестировать этими двумя простыми задачами программы, декларирующие в своей документации способность работать с системами, содержащими односторонние связи.

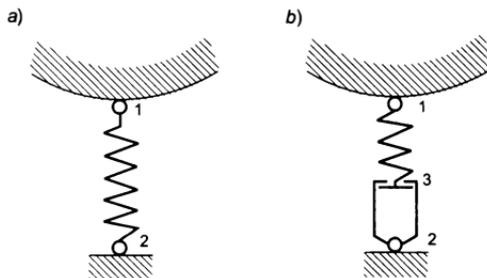


**Рис. 3.13.** Тело, раскрепленное работающими только на растяжение пружинами

Некоторые программные разработки, способные оперировать односторонними связями, предусматривают такую возможность заданием специальных элементов — пружин, работающих только на растяжение (*tension only*) или только на сжатие (*compression only*). Таким способом могут быть заданы упругие односторонние связи,

тогда как жесткие односторонние связи при этом из рассмотрения выпадают. Кроме того, при таком подходе возникают затруднения при расчете систем с односторонними шарнирами.

Формально, жесткая односторонняя связь может считаться частным случаем упругой (при устремлении жесткости такой пружины к бесконечности), но с позиций вычислительного процесса такой формализм не проходит, поскольку приводит к односторонним пружинам с бесконечной жесткостью. Поэтому более содержательным является обобщение в противоположном направлении, приводящее к тому, что программа, оперирующая жесткими односторонними связями, способна также обрабатывать и упругие односторонние связи. Сведение упругой односторонней связи к жесткой легко осуществляется простым переносом места расположения в системе односторонней связи, что проиллюстрировано на рис. 3.14.



**Рис. 3.14.** *a* — система с упругой односторонней связью, работающей только на растяжение, *b* — эквивалентная система с жесткой односторонней связью

Если для упругой односторонней связи (рис. 3.14, *a*) под перемещением  $U$  понимается разность перемещений точек 1 и 2, то в эквивалентной системе с жесткой односторонней связью сама пружина считается двусторонней, но под  $U$  должно пониматься взаимное перемещение точек 2 и 3.

Отметим здесь, что с пользовательской точки зрения существенно также, чтобы расчетная программа имела возможность учитывать односторонние связи с начальными зазорами (в том числе и отрицательными зазорами, моделирующими начальное усилие в односторонних упругих связях).

Наконец, обратим внимание читателя на одну ловушку, в которую иногда попадают даже опытные расчетчики, пытающиеся в задачах расчета систем с односторонними связями формально учесть также и силы трения, возникающие между контактируемыми поверхностями. Такие задачи пытаются ставить, например, при расчете тоннельных

обделок, наружная поверхность которой способна на некоторых, подлежащих определению участках, «отлипнуть» от окружающей ее грунтовой породы [Чернева, 1990]. Аналогичная проблема возникает при продольной надвижке пролетных строений мостовых конструкций, где развиваются значительные силы трения, передающиеся на накаточные устройства.

Во всех этих случаях попытка простейшими способами связать кулонову силу трения, пропорциональную нормальным к контактирующим поверхностям усилиям в односторонних связях, и не учитывающая историю нагружения конструкции, приводит к некорректной постановке задачи. Получающиеся в результате такого формального расчета усилия и перемещения на самом деле не имеют ничего общего с реально возникающим напряженно-деформированным состоянием конструкции. Для того, чтобы это понять, достаточно заметить, что силы трения немедленно переводят расчетную задачу в класс расчета неконсервативных систем. В самом деле, по определению, для консервативных систем работа всех сил определяется исключительно начальным и конечным состояниями системы, то есть не зависит от пути перехода. Легко сообразить, однако, что при учете сил трения это условие нарушается.

Правильная постановка задачи приводит на самом деле к исключительно сложным зависимостям, аккуратный анализ которых можно найти в работах гидротехников ([Вовкушевский, Шойхет, 1981], стр. 118–122). Увы, этот анализ показывает, что даже при заданной истории нагружения, скажем при простом однопараметрическом нагружении, решение для задачи с трением может оказаться неединственным. В этом смысле характерно откровенное признание авторов работы [Вовкушевский, Шойхет, 1981]:

*«Для выявления единственного решения требуется внесение дополнительных условий, которые авторам неизвестны».*

Следуя в русле этой цитаты, но говоря о программном обеспечении расчетов конструкций с односторонними связями и силами трения, сделаем аналогичное признание, что нам неизвестны какие-либо разработки промышленного применения, которые можно было бы рекомендовать к широкому практическому применению, хотя программы исследовательского характера, относящиеся к некоторым частным задачам, существуют.

### 3.7. Вантовые элементы в расчетной модели

Вантовые конструкции с позиций строительной механики представляют собой сооружения, при расчете которых необходимо учитывать геометрически нелинейные эффекты, вызываемые вантовыми элементами как гибкими нитями. Когда речь идет о таких конструкциях как вантовые или висячие мосты, гибкие мачтовые сооружения, поддерживаемые системой вантовых оттяжек, различного рода антенны, вантовые покрытия зданий и т.п., то введение в расчетную схему нелинейно работающих элементов является абсолютно необходимым требованием, не учет которого способен резко исказить картину напряженно деформированного состояния конструкции даже и в качественном отношении. Все это так, поэтому лучшие образцы расчетной программной продукции предоставляют пользователю возможность непосредственного введения вантовых элементов в расчетную схему конструкции с последующей их программной обработкой, в том числе и с определением самоуравновешенного состояния вантовой конструкции за счет ее предварительного напряжения.

Имеются две отличающиеся друг от друга расчетные модели вантового элемента, которые используются в проектной практике. Простейшей является модель стержня, способного воспринять растяжение и выключающегося из работы при появлении сжатия (рис. 3.15). Этот стержень может быть установлен с зазором  $\Delta_0$  в односторонней связи или же иметь преднапряжение  $H_0 \geq 0$ , что может быть интерпретировано и как наличие отрицательного зазора, то есть  $\Delta_0 < 0$ .

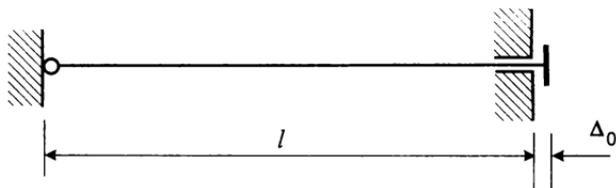


Рис. 3.15. Односторонне работающий стержень

Два варианта диаграммы работы такого элемента в виде зависимости продольной силы  $H$  от увеличения расстояния между концевыми точками  $\Delta$  представлены на рис. 3.16, где случаю по рис. 3.16, а) соответствует вариант с предварительным напряжением, а случаю по рис. 3.16, б) — вариант системы с зазором.

Тангенс угла наклона диаграммы равен величине  $EA/l$  ( $EA$  — жесткость стержня на растяжение,  $l$  — длина стержня).

Понятно, что такая (упрощенная) модель вантового элемента на самом деле представляет собой упругую одностороннюю связь и может быть включена в расчетный программный комплекс в рамках общего алгоритма по расчету систем с односторонними связями, рассмотренного нами в разделе 3.6.

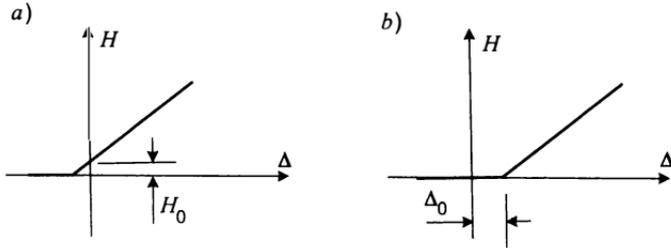


Рис. 3.16. Варианты диаграммы  $H - \Delta$

Второй (более аккуратный по постановке задачи) вариант расчетной модели вантового элемента — гибкая нить с малой стрелкой провисания, которая в исходном состоянии, характеризуемом температурой  $T_0$  и натяжением  $H_0$ , нагружена некоторой поперечной нагрузкой  $q_0(x)$ , и у которой при удлинении хорды на  $\Delta$  и изменении поперечной нагрузки до величины  $q(x)$ , а температуры до  $T$  натяжение становится равным  $H$ .

Уравнение, связывающее эти величины, для пологих нитей имеет вид

$$\Delta = \frac{(H - H_0)l}{EA} - \frac{D}{2H^2} + \frac{D_0}{2H_0^2} + \alpha(T - T_0)l, \quad (3.141)$$

где

$$D = \int_0^l Q^2(x)dx, \quad D_0 = \int_0^l Q_0^2(x)dx, \quad (3.142)$$

- $Q(x)$  — поперечная сила, возникающая в шарнирно опертой балке пролета  $l$  от действия нагрузки  $q(x)$ , направленной поперек хорды вантового элемента;
- $Q_0(x)$  — то же, но от нагрузки  $q_0(x)$ ;
- $\alpha$  — коэффициент температурного расширения;
- $E$  — модуль упругости материала нити;
- $A$  — площадь поперечного сечения нити.

Уравнение (3.141) является основополагающим в теории систем, содержащих вантовые элементы, и может быть названо *уравнением состояния* вантового элемента. Это уравнение неоднократно выводилось в работах, посвященных гибким пологим нитям. Здесь мы привели его в той форме, в какой оно дано в работе [Перельмутер, 1969]. В дальнейшем для краткости будем называть введенные формулами (3.142) параметры  $D$  и  $D_0$  *интегральными параметрами нагрузки*.

Если ввести безразмерный параметр  $K$ , характеризующий влияние поперечной нагрузки на нить

$$K = \frac{D}{2l(EA)^2} \quad (3.143)$$

и безразмерные переменные

$$\delta = \Delta/l, \quad \delta_0 = \Delta_0/l, \quad t = H/(EA), \quad (3.144)$$

где обозначено

$$\Delta_0 = \frac{H_0 l}{EA} - \alpha(T - T_0)l - \frac{D_0}{2H_0^2}, \quad (3.145)$$

то уравнение (3.141) приобретает форму

$$\delta = t - \frac{K}{t^2} - \delta_0. \quad (3.146)$$

Диаграмма зависимости  $\delta$  от  $t$  при  $\delta_0 = 0$  представлена на рис.3.17, величину  $\delta_0$  легко учесть смещением начала координат.

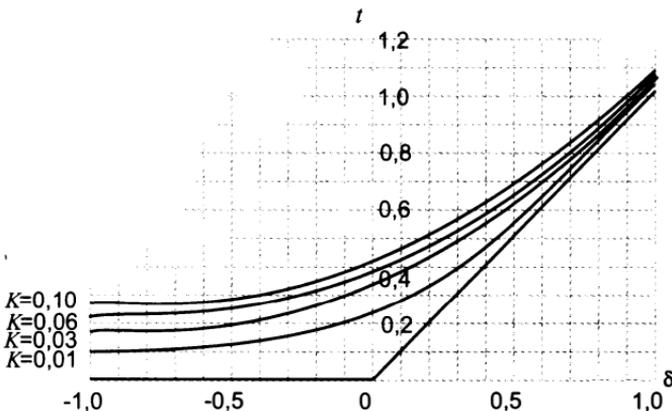


Рис. 3.17. Безразмерная зависимость между натяжением и увеличением хорды

Из этого рисунка видно, что с уменьшением  $K$  кривая  $t = t(\delta)$  прижимается к своим асимптотам, в роли которых выступают ось абсцисс при  $\delta < 0$  и прямая с тангенсом угла наклона  $EA/l$  при положительных  $\delta$ , т.е. линии, представленные на рис. 3.16. В этом проявляется связь между двумя рассмотренными расчетными моделями.

Само собой разумеется, что на уравнение (3.146) нельзя полагаться безоговорочно. Внимательный читатель безусловно заметит, что на самом деле это уравнение имеет смысл только при весьма малых значениях  $\delta$  (порядка  $10^{-3}$ – $10^{-2}$ ), поскольку при больших деформациях нарушаются условия вывода и применимости исходного уравнения состояния ванта (3.141). Поэтому и графики, приведенные на рис. 3.17, характеризует лишь формальные математические свойства кривых, определяемых уравнением (3.146) и на самом деле они правильно отражают работу вантовых элементов только лишь в малой окрестности точки  $\delta = 0$ . При росте  $\delta$  погрешность от пренебрежения малыми членами, отбрасываемыми при выводе уравнения состояния (3.141), будет нарастать. Но поскольку на практике нас как раз и интересуют малые относительные деформации вант, то нет смысла рассматривать здесь соответствующие уточнения в уравнении состояния ванта.

Мгновенная податливость вантового элемента в окрестности некоторого напряженного состояния, характеризуемого натяжением  $H$ , легко определяется дифференцированием уравнения состояния (3.141)

$$\frac{d\Delta}{dH} = \frac{l}{EA} + \frac{D}{H^3}, \quad (3.147)$$

и, следовательно, матрица мгновенной жесткости такого элемента имеет вид

$$\mathbf{K}(H) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{l}{EA} + \frac{D}{H^3}} & -\frac{1}{\frac{l}{EA} + \frac{D}{H^3}} \\ -\frac{1}{\frac{l}{EA} + \frac{D}{H^3}} & \frac{1}{\frac{l}{EA} + \frac{D}{H^3}} \end{bmatrix}. \quad (3.148)$$

Следует заметить, что в тех случаях, когда единственной распределенной поперечной нагрузкой на элементе является собственный вес нити, из (3.147) легко получается известная формула

Эрнста (*Ernst*) для определения площади  $A_0$  условного стержня той же длины  $l$ , жесткость которого при продольных деформациях совпадает с мгновенной жесткостью нити

$$A_0 = A \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2 l_0^2 E}{12\sigma^3}}, \quad (3.149)$$

где:

- $l_0$  – длина горизонтальной проекции нити;
- $\gamma$  – объемный вес этого материала нити;
- $\sigma = H/A$  – осевое напряжение в нити.

### 3.7.1. Координатные оси и интегральные параметры нагружения вант

Пусть  $(X, Y, Z)$  – глобальная координатная система, которую будем считать декартовой прямоугольной правоориентированной координатной системой. Для конкретности будем считать, что ось  $Y$  направлена вверх (противоположно направлению гравитации). Это означает, что оси  $X$  и  $Z$  образуют горизонтальную плоскость.

Снабдим вантовый элемент местной системой координат  $X_1, Y_1, Z_1$ . Ось  $X_1$  направлена от первого (головного) узла ванта  $A$  ко второму (хвостовому) узлу его  $B$ , ось  $Y_1$  перпендикулярна оси  $X_1$  и расположена в вертикальной плоскости  $ABB^{\circ}A^{\circ}$ , а ось  $Z_1$  дополняет систему осей  $(X_1, Y_1, Z_1)$  до правой тройки (рис.3.18). Понятно, что точки  $A^{\circ}$  и  $B^{\circ}$  представляют собой проекции узлов  $A$  и  $B$  соответственно на горизонтальную плоскость  $(X, Z)$ .

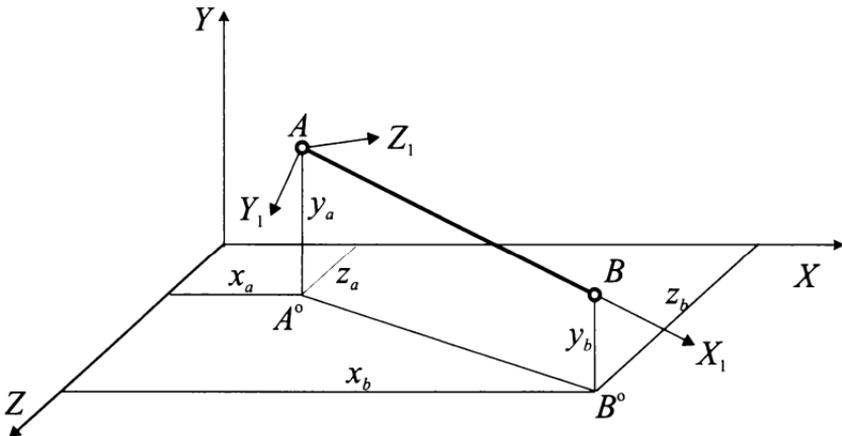
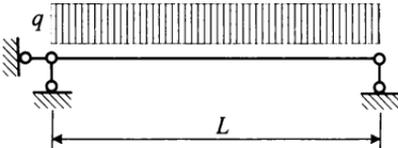
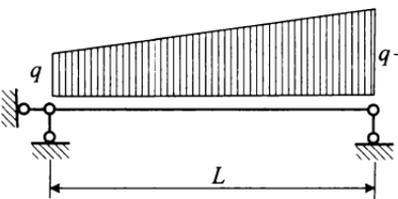
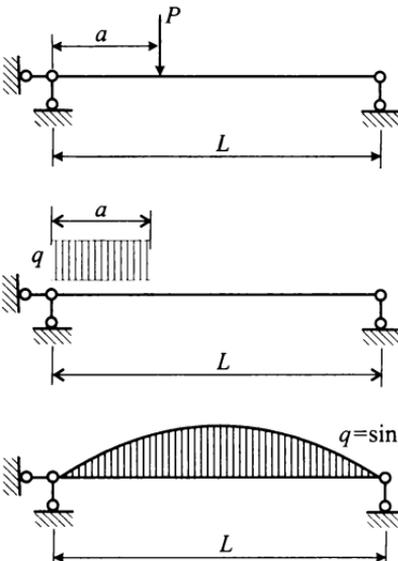


Рис. 3.18. Расположение координатных осей

На вантовый элемент могут действовать нагрузки, аналогичные нагрузкам на стержневые элементы.

Таблица 3.3.

Схема нагружения	$D = \int_0^L Q^2(x) dx$
	$\frac{q^2 L^3}{12}$
	$\frac{q^2 L^3}{12} + \frac{qpL^3}{12} + \frac{p^2 L^3}{45}$
	$\frac{P^2(L-a)a}{L}$ $q^2 a^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{a}{4L} \right)$ $q^2 L^3 \frac{1}{2\pi^2}$

Местные нагрузки, учитываемые при расчете, могут действовать только по направлениям осей  $Y_1$  и  $Z_1$ , они могут быть распределенными —  $q_{y1}(x_1)$ ,  $q_{z1}(x_1)$  или сосредоточенными ( $P_{y1}$ ,  $P_{z1}$ ). Если нагрузка задана в компонентах, соответствующих общей системе координат, то она предварительно приводится к указанным выше местным компонентам, при этом компонента вдоль оси  $X_1$  не

вычисляется, точнее говоря эта компонента приводится к статически эквивалентным узловым нагрузкам, приложенным в узлах крепления ванты к конструкции.

Если соотношение между нагрузками  $q_{y1}$  и  $q_{z1}$  не меняется по длине вантового элемента (что, как правило, выполняется), то эти нагрузки приводятся к равнодействующим, которые определяют плоскость провисания ванты, по обычным формулам

$$q = \sqrt{q_{y1}^2 + q_{z1}^2}; P = \sqrt{P_{y1}^2 + P_{z1}^2}, \quad (3.150)$$

с помощью которых определяются интегральные параметры  $D$ . Приведем для справки формулы, по которым вычисляются значения этих интегралов. Эти формулы для некоторых наиболее распространенных видов нагрузок представлены в табл. 3.3.

Само собой разумеется, что в более общем случае нагружения, не охватываемом схемами из таблицы 3.3, интегральный параметр  $D$  может быть легко определен с помощью процедуры численного интегрирования.

### 3.7.2. Задание преднапряжения

При расчете вантовых систем важно правильно задать отсчетное состояние, которое характеризуется начальными значениями поперечных нагрузок на вантовых элементах  $q_{0,i}$  (как правило, это перпендикулярная к хорде вантового элемента составляющая нагрузки от собственного веса ванты) и значениями натяжений  $H_{0,i} \geq 0$ . Индекс  $i$  здесь является номером вантового элемента и меняется от 1 до  $m$ .

Основная сложность состоит в том, что значения  $H_{0,i}$  должны соответствовать равновесному состоянию системы, в котором предварительные напряжения создают некоторую картину внутренних сил в системе, соответствующую начальной внешней нагрузке  $q_{0,i}$ , в частном случае нулевой внешней нагрузке. Обычно существует множество возможных равновесных состояний системы, каждое из которых отвечает своему распределению усилий предварительного напряжения в вантах  $H_{0,i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), где  $m$  – количество вант в системе.

В связи с этим при проектировании вантовых конструкций перед инженером стоит задача выбора рационального начального напряженного состояния из множества допустимых, основываясь на некоторых критериях оптимальности и конструктивных

ограничениях. Сами эти критерии и ограничения могут варьироваться в зависимости от конкретной проектной задачи. Так, например, при проектировании вантовых мостов обычно требуют, чтобы пилоны находились в безызгибном состоянии под действием постоянной нагрузки и усилий преднапряжения, а порождаемые этими постоянными воздействиями моменты в балке жесткости минимизировались по абсолютной величине. Могут быть и другие критерии оптимальности и иные ограничительные условия.

Ограничиваясь сказанным, не будем здесь останавливаться на обсуждении приемов, используемых для решения возникающих при этом проектных задач, поскольку это представляет собой самостоятельную тему, далеко выходящую за рамки проблем, рассматриваемых в настоящей книге<sup>17</sup>. Однако, для последующего анализа напряженно-деформированного состояния вантовой конструкции в расчетную программу абсолютно необходимо внести сведения о начальном состоянии системы.

Иногда вместо понятия преднапряжений, как совокупности начальных усилий в вантах  $H_{0,i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), может оказаться удобнее оперировать понятием *длин начальных заготовок* вант  $L_{0,i}$ . Под длиной начальной заготовки  $L_0$  ванта понимается геометрическая длина ненапряженного ванта при фиксированной температуре  $T_0$ . Если исходить из уравнения состояния ванта (3.141), то несложно установить связь между длиной заготовки и начальным натяжением  $H_0$ . Действительно, в ненапряженном состоянии ванты следует положить  $H = 0$ ,  $T = T_0$ ,  $q(x) = 0$  и, следовательно,  $D = 0$ . В результате из (3.141) получим

$$\Delta = -\frac{H_0 L}{EA} + \frac{D_0}{2H_0^2}. \quad (3.151)$$

Очевидно, что по смыслу построения величина  $\Delta$ , определяемая формулой (3.151), представляет собой разность между длиной начальной заготовки ванта  $L_0$  и длиной хорды ванта  $L$ , то есть

$$L_0 - L = -\frac{H_0 L}{EA} + \frac{D_0}{2H_0^2}. \quad (3.152)$$

Поскольку некоторые программы, ориентированные на расчет вантовых конструкций, предоставляют пользователю возможность задавать во входной информации к расчету не величины начальных

<sup>17</sup> Постановка некоторых задач такого рода приводится в разделе 8.2.

натяжений вант, а именно относительные длины начальных заготовок  $L_f = L_0/L$ , соотношение (3.152) может оказаться полезным<sup>18</sup>.

### 3.7.3. О линеаризованных моделях вантовых конструкций

Надо сказать, что ванты не являются единственным источником порождения геометрической нелинейности в расчетных схемах рассматриваемых типов конструкций. Второй источник геометрической нелинейности связан с тем обстоятельством, что как правило, хотя и не всегда, вантовые конструкции содержат сильно сжатые элементы. Так, например, для вантовых мостов – это ноги пилонов и само пролетное строение, обжимаемые натяжением в вантах. В случае мачт на оттяжках обжатию подвержен ствол мачты. Учет влияния продольных сил на изгибающие моменты в сжатых элементах системы приводит к необходимости проведения расчетов по деформированной схеме.

Но кроме выполнения статических расчетов эти конструкции часто требуют и проведения расчетов на свободные колебания, поскольку в противном случае невозможно определить пульсационную составляющую ветровой нагрузки, невозможно обоснованное проведение аэродинамических исследований, выполнение расчетов на сейсмические воздействия и т.д.

Вместе с тем спектральный анализ системы (определение частот и форм ее свободных колебаний) имеет смысл только в линейной постановке. В нелинейных же задачах можно говорить о разложении движения системы по формам свободных колебаний в окрестности изучаемого равновесного ее положения при линеаризации поведения системы в этой окрестности. Итак, определение напряженно деформированного состояния (НДС) системы при статическом ее нагружении должно выполняться с учетом отмеченных выше геометрически нелинейных эффектов. При динамическом же анализе, зная НДС конструкции от действующих статических нагрузок, необходимо построить динамическую модель так называемой линеаризованной системы.

Под этим термином понимается конструкция, работающая в геометрически линейной постановке, но учитывающая достигнутый уровень усилий в вантах в состоянии, предшествующем линеаризации, а также достигнутый уровень усилий сжатия в соответствующих сжатых элементах расчетной схемы. Точнее говоря,

<sup>18</sup> Такая возможность имеется, например, в программе GTSTRUDL.

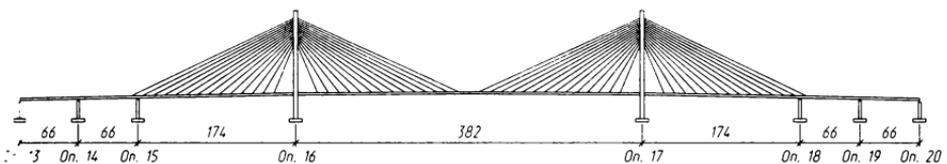
под линеаризованной системой понимается исходная система, в которой все составляющие ее элементы рассматриваются в линейной постановке, но с касательными (мгновенными) матрицами жесткости.

Если говорить о вантовых и висячих мостах, то линеаризованная модель такого моста полезна (и необходима) по крайней мере в трех целях:

- линеаризованная модель нужна для расчета системы на колебания, в том числе и на ветровое воздействие, поскольку нас интересуют колебания системы в окрестности ее достигнутого равновесного состояния;
- она нужна для построения линий влияния, которые в принципе имеют смысл только для линейных систем. По полученным линиям влияния можно определить достаточно близкое приближение к вариантам нагружения моста подвижной нагрузкой, вызывающей минимальные и максимальные значения интересующих конструктора силовых и кинематических факторов;
- линеаризованная модель оказывается весьма полезным инструментом при построении численных процедур для выполнения собственно нелинейных расчетов. Особенно это существенно при организации шаговых процессов (см. по этому поводу раздел 5.7).

Ниже на рис.3.19 в качестве конкретного и самого недавнего примера показана общая схема вантового моста через реку Нева в Санкт-Петербурге. Этот достаточно амбициозный по меркам российских транспортных сооружений объект запроектирован и рассчитан в институте Гипростроймост Санкт-Петербург.

Этот объект заслуживает быть приведенным в качестве характерного примера не только потому, что в процессе его расчета были практически опробованы и использованы обсуждаемые ниже модели, но также и по той причине, что само внимание авторов к построению этих моделей было не в последнюю очередь простимулировано необходимостью выполнения тщательного анализа именно этой конструкции.



**Рис. 3.19.** Общая схема вантового моста в Санкт-Петербурге

Рассмотрим по отдельности два отмеченных выше источника геометрической нелинейности с позиций построения линеаризованной модели.

### 3.7.4. Линеаризация вантовых элементов расчетной схемы

Итак, необходимо построить модель, в которой учитывается сопротивляемость кабельной части конструкции приращениям усилий в этих же кабельных элементах – в строительной механике подобную процедуру называют иногда расчетом по касательной матрице жесткости.

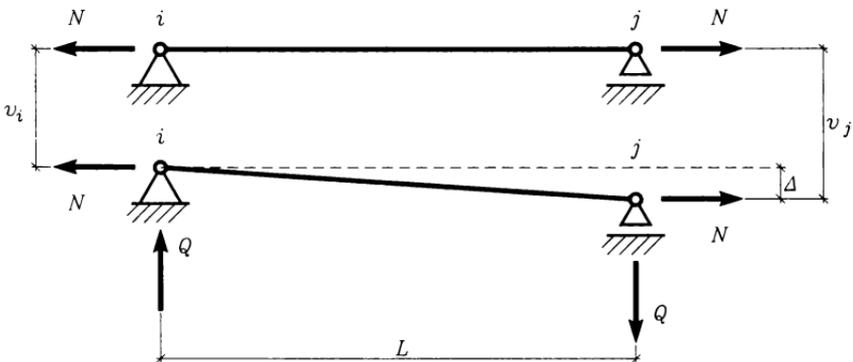


Рис 3.20. Звено шарнирной цепи

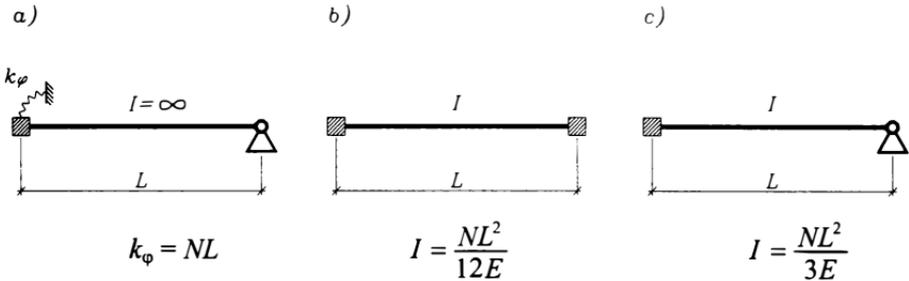
При построении линеаризованной модели удобно рассматривать кабельную часть системы как шарнирно звеньевую цепь. Рассмотрим отдельное звено этой цепи и будем считать, что в изучаемом состоянии системы в этом звене действует усилие растяжения  $N$  (рис.3.20) – здесь и далее для унификации обозначений усилий в сжатых и растянутых элементах натяжение ванты обозначается не как  $H$ , а как  $N$ .

Приведем здесь элементарные соображения строительной механики, позволяющие понять смысл предлагаемой далее линеаризованной модели системы.

Несложно увидеть, что при поперечных смещениях узлов этого элемента на величины  $v_i$  и  $v_j$ , как это показано на рис.3.20, требуется преодолеть силы сопротивления  $Q$ , развивающиеся в узловых точках элемента. Из уравнений равновесия, составленных для деформированного состояния элемента, для определения сил  $Q$  получаем

$$Q = \frac{N}{L} \Delta, \quad \Delta = v_j - v_i. \quad (3.153)$$

Таким образом, в расчетной схеме линеаризованной модели каждое кабельное звено следует заменить некоторым (геометрически линейным) стержневым элементом, в котором возникают поперечные силы  $Q$ , связанные с перемещениями узлов этого элемента соотношениями (3.153). На рис.3.21 показаны три возможных типа таких стержневых элементов.



**Рис. 3.21.** Возможные типы стержневых элементов

Тип элемента “a” представляет собой абсолютно жесткий при изгибе стержень, подкрепленный в одном из узлов часовой пружины с жесткостью  $k_\varphi$ , подобранной так, чтобы выполнялось соотношение (3.153). Типы элементов “b” и “c” представляют собой изгибаемые стержни с заделкой в узлы на обоих концах для типа “b” и с шарнирным присоединением к одному из двух узлов для типа “c”. Для типов “b” и “c” повороты концевых узлов элементов запрещены. Момент инерции сечения стержня  $I$  также подобран из условия выполнения соотношения (3.153). В дальнейшем при построении расчетной схемы для линеаризованной модели можно воспользоваться любым из этих трех типов элементов. Легко убедиться в том, что действительно для всех трех типов элементов, изображенных на рис.3.21, выполняется соотношение (3.153), связывающее поперечную силу  $Q$  со взаимными смещениями (в поперечном направлении) концов стержня  $\Delta$ .

Для того, чтобы лишний раз убедиться в правильности построения линеаризованной модели, полезно проверить ее на простой задаче, для которой известно точное решение. В качестве такой тестовой задачи рассмотрим ферму Мизеса (рис.3.22).

Решение этой задачи в строгой геометрически нелинейной постановке приведено в книге Я.Г. Пановко и И.И. Губановой [1987].

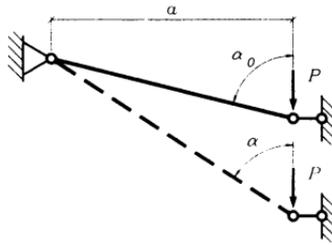


Рис. 3.22. Ферма Мизеса

Обозначим  $L$  и  $L_0$  длину стержня фермы Мизеса в деформированном и недеформированном состояниях соответственно. Тогда, как это видно из рис.3.22,

$$L_0 = \frac{a}{\sin \alpha_0}, \quad L = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad (3.154)$$

при этом величина удлинения стержня  $\Delta L$  будет равна

$$\Delta L = \frac{a}{\sin \alpha} - \frac{a}{\sin \alpha_0}. \quad (3.155)$$

Из условия равновесия центрального узла фермы в деформированном состоянии находим продольную силу  $N$  в стержне фермы Мизеса

$$N = P / \cos \alpha,$$

откуда после привлечения физических соотношений (закона Гука) получим

$$N = \frac{EA \Delta L}{L_0} = EA \left( \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} - 1 \right), \quad (3.156)$$

где  $A$  площадь поперечного сечения стержня. Таким образом,

$$P = N \cos \alpha = EA (\sin \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha). \quad (3.157)$$

Из геометрических соображений несложно найти вертикальное перемещение  $v$  центрального узла фермы

$$v = a (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha_0). \quad (3.158)$$

Полученные соотношения позволяют аккуратно вычислить отпорность системы в центральном узле фермы, как отношение приращения нагрузки к приращению перемещения, то есть производную  $dP/dv$ . На основании (3.157) и (3.158) имеем

$$\frac{dP}{d\alpha} = EA \left( -\frac{\sin\alpha_0}{\sin^2\alpha} + \sin\alpha \right), \quad \frac{dv}{d\alpha} = -\frac{a}{\sin^2\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\sin^2\alpha}{a},$$

и следовательно

$$\frac{dP}{dv} = \frac{dP}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dv} = \frac{EA}{a} (\sin\alpha_0 - \sin^3\alpha). \quad (3.159)$$

Для линеаризованной модели ограничимся использованием стержневого элемента, показанного на рис. 3.21, с), в результате приходим к расчетной схеме, изображенной на рис. 3.23.

Полагая площадь  $A_1$  сечения стержня в модельной расчетной схеме равной

$$A_1 = A \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}, \quad (3.160)$$

определим реакцию системы  $r_{11}$  на единичное смещение центрального узла в вертикальном направлении. Проектируя на вертикальную ось показанные на рис. 3.23 поперечную  $Q$  и нормальную  $T$  силы в модельном стержне, возникающие от единичного смещения центрального узла, получим искомую реакцию в виде

$$r_{11} = \frac{3EI}{L^3} \sin^2\alpha + \frac{EA_1}{L} \cos^2\alpha = \frac{N}{L} \sin^2\alpha + \frac{EA_1}{L} \cos^2\alpha. \quad (3.161)$$

Заменим продольную силу  $N$  в этом уравнении ее выражением по (3.156).

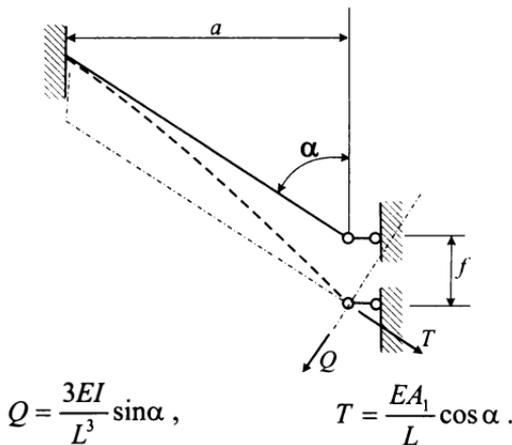


Рис. 3.23. Деформированное состояние

В результате получим

$$r_{11} = \frac{EA}{L}(\sin\alpha_0 \sin\alpha - \sin^2\alpha + \frac{A_1}{A}\cos^2\alpha), \quad (3.162)$$

что с учетом (3.154) и (3.160) окончательно преобразуется к виду

$$r_{11} = \frac{EA}{a}(\sin\alpha_0 - \sin^3\alpha). \quad (3.163)$$

Сопоставляя (3.159) и (3.163), убеждаемся, что построенная линеаризованная модель точно представляет мгновенную жесткость исходной нелинейной системы в окрестности ее равновесного состояния. Заметим, что в практических расчетах можно положить  $A_1 \cong A$ , поскольку, как это несложно заметить, отношение  $\sin\alpha_0/\sin\alpha = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – относительная продольная деформация стержня, достигнутая в равновесном положении системы, и которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

Итак, линеаризованная модель вантовой системы образуется заменой элементов кабеля на любой из стержневых изгибаемых элементов, изображенных на рис. 3.21.

Применительно к расчетной схеме рассматриваемого вантового моста через реку Неву (рис.3.19) каждая из имеющихся в пространственной расчетной схеме  $14 \times 8 = 112$  вант была представлена двумя пространственными стержневыми элементами, как это показано на рис. 3.24. На этом рисунке обозначено:

- $W$  – верхний (на пилоне) узел крепления ванта;
- $V$  – нижний (на пролетном строении) узел крепления ванта;
- $M$  – промежуточный вантовый расчетный узел, геометрически разделяющий отрезок  $VW$  пополам.

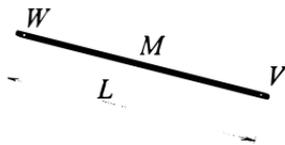


Рис. 3.24. Элемент кабельной системы моста

В расчетную линеаризованную модель вводятся два стержня:

- верхний стержень  $KW$  с начальным узлом  $W$  и конечным узлом  $M$ ;
- нижний стержень  $KV$  с начальным узлом  $V$  и конечным узлом  $M$ .

К узлам  $W$  и  $V$  эти стержни прикреплены шарнирно, тогда как к узлу  $M$  они присоединены жестко. Промежуточный узел  $M$  раскрепляется внешними связями от всех поворотов, следовательно,

он обладает только тремя степенями свободы – линейными смещениями в направлении трех осей глобальной координатной системы  $(X, Y, Z)$ .

Пусть  $N$  – усилие растяжения ванта, вычисленное для рассматриваемой расчетной схемы. Считается, что к моменту выполнения динамического анализа усилия во всех вантах известны. Тогда, в соответствии с изложенным выше, жесткость этих стержней на изгиб определяется формулой

$$EI = \frac{NL^2}{12}, \quad (3.164)$$

где  $L$  – полная длина рассматриваемого ванта (точнее, геометрическая длина хорды ванта равная расстоянию между точками крепления ванта  $W$  и  $V$ ).

Заметим, что в силу полного шарнира в начальных узлах модельные стержни не сопротивляются закручиванию начальных узлов  $V$  и  $W$ . Жесткость этих же модельных стержней на растяжение  $E A_0$  (так называемая расчетная *эффективная жесткость* поперечного сечения), определяется с использованием касательного модуля по формуле (3.149), то есть приращение продольной силы в ванте связывается с увеличением расстояния между узлами  $W$  и  $V$ .

### 3.7.5. Линеаризация сжато-изогнутых элементов расчетной схемы

Рассмотрим сжато-изогнутый стержень, обозначив

- $EI$  – жесткость стержня на изгиб;
- $N$  – продольная сила сжатия в стержне;
- $L$  – длина (пролет) стержня;
- $v$  – прогиб (поперечное перемещение) сечения стержня;
- $q(x)$  – действующая на стержень поперечная нагрузка.

Дифференциальное уравнение для определения прогибов сжато-изогнутого стержня, составленное с учетом влияния продольных сил на изгибающие моменты в стержне, как известно, имеет вид

$$(EIv'')'' + Nv'' = q(x). \quad (3.165)$$

Если продольная сила  $N$  заранее известна (не зависит от прогибов  $v$ ), то уравнение (3.165) является линейным дифференциальным уравнением относительно искомой функции  $v$ . Таким образом, использование дифференциального уравнения (3.165) при

фиксированной продольной силе  $N$  как раз и обеспечивает реализацию интересующей нас линеаризованной модели.

Проблема, однако, заключается в том, что не во всех действующих расчетных программных комплексах, предусмотрена возможность учета дополнительного слагаемого  $Nv''$  в левой части уравнения (3.165) при построении матрицы жесткости стержня. Тем не менее, и в такой ситуации имеется возможность учета этого слагаемого с помощью построения специальной дискретной модели, не выводящей за рамки требований стандартного программного обеспечения по расчету конструкций.

При построении этой модели проще всего исходить из энергетических соображений, потребовав энергетической эквивалентности для стержня, работающего в соответствии с уравнением (3.165), и интересующей нас дискретной модели.

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации  $E$ , накапливаемой в сжато-изогнутом стержне при его изгибе. Имеем

$$E = \int_0^L \frac{EIv''^2}{2} dx - N \int_0^L \frac{v'^2}{2} dx. \quad (3.166)$$

Первый из интегралов в (3.166) представляет собой энергию деформации, аккумулируемую в стержне при его изгибе, тогда как второй интеграл есть работа продольной силы  $N$ . Но этому же второму интегралу можно дать и иное, формально механическое, толкование, а именно как энергию деформации, запасаемую в некотором упругом основании, сопротивляющемся поворотам сечений стержня с погонным отрицательным коэффициентом жесткости  $k_\varphi = -N$  (рис. 3.25).

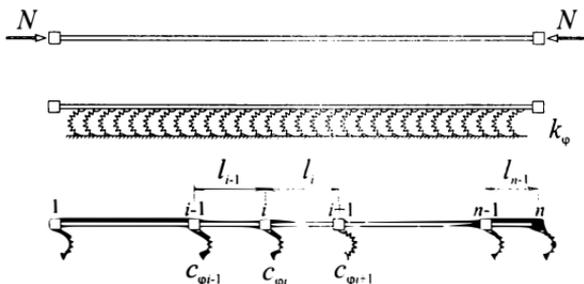


Рис. 3.25. Модель сжато-изогнутого элемента

Если в библиотеке конечных элементов используемой программы предусмотрен стержневой элемент, опирающийся на упруго сопротивляющееся повороту основание и при этом коэффициенту жесткости этого упругого основания допустимо придавать

отрицательное значение, то все в порядке, никакой дополнительной модели нет необходимости строить<sup>19</sup>. Если же нарушение хотя бы одного из этих условий выводит за пределы применимости данной программы, то это упругое основание можно приближенно учесть, разбив исходный стержень на несколько участков и введя в каждый из образованных при таком разбиении узлов сосредоточенную поворотную (часовую) пружину жесткостью  $C_\varphi$ , положив при этом

$$C_\varphi = k_\varphi(l_{i-1} + l_i)/2 = -N(l_{i-1} + l_i)/2, \quad (3.167)$$

где  $l_{i-1}$  и  $l_i$  соответствующие расстояния от рассматриваемого узла до двух соседних узлов (рис. 3.25). На математическом уровне такая дискретизация может быть истолкована как использование численного интегрирования при вычислении второго из интегралов энергии в (3.166), иначе говоря

$$N \int_0^L \frac{v'^2}{2} dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{\varphi,i} v_i'^2, \quad L = \sum_{i=1}^{n-1} l_i. \quad (3.168)$$

Дискретная схема по рис. 3.25 непосредственно вводится практически в любую конечноэлементную программу.

В заключение отметим, что модель, близкая к изображенной на рис. 3.25, была предложена ранее Р.А. Резниковым [1971], хотя при обосновании этой модели Резников и не опирался на энергетические соображения.

### 3.8. Расчет на динамическую нагрузку

Если нагрузки на систему меняются во времени  $t$ , т.е.  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ , то следует полагать функциями времени также усилия и перемещения, что может потребовать введения в рассмотрение скоростей  $d\mathbf{u}/dt$  и ускорений  $d^2\mathbf{u}/dt^2$ . Когда возникающие при этом силы инерции

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \quad (3.169)$$

не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с нагрузками на систему и с силами упругости, то их следует учесть

<sup>19</sup> Это еще один из примеров, подтверждающий неоднократно высказывавшуюся на страницах этой книги мысль о том, что запрещение ввода отрицательных значений жесткостным характеристикам ограничивает возможности полезного моделирования при формировании расчетных схем конструкций.

при формировании условий равновесия, которые примут вид дифференциальных уравнений движения (или, как иногда говорят, уравнений динамического равновесия)

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t). \quad (3.170)$$

Если все массы сосредоточены в узлах системы, то матрица инерции  $\mathbf{M}$  будет диагональной, в остальных же случаях приведение ее к диагональному виду представляет собой приближенный подход.

Задача определения характеристик собственных колебаний системы (модальный анализ) заключается в нахождении условий, при которых ненагруженная система совершает гармонические колебания по закону

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Psi} \sin(\omega t + \mu). \quad (3.171)$$

В выражении (3.171) вектор  $\mathbf{\Psi}$  характеризует форму собственных колебаний (соотношения между смещениями узлов),  $\omega$  — частоту колебаний,  $\mu$  — начальную фазу. Подстановка (3.171) в (3.170), с учетом того, что  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ , дает уравнение для *собственных* (иногда говорят — *свободных*) колебаний

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{\Psi} = \mathbf{0}, \quad (3.172)$$

нетривиальное решение которого существует лишь тогда, когда величины  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), называемые собственными частотами, обращают в нуль детерминант матрицы  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$ . Соответствующие им формы собственных колебаний  $\mathbf{\Psi}_i$  вычисляются лишь с точностью до произвольного множителя, значение которого определяется избранным способом нормировки собственных форм.

Наиболее часто используются два способа нормировки. По первому способу формы нормируются так, чтобы максимальная компонента вектора  $\mathbf{\Psi}_i$  равнялась единице. По второму способу компоненты вектора  $\mathbf{\Psi}_i$  определяются из условия приведения формы к единичной массе, то есть из условия  $\mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_i = 1$ . Следует также отметить свойство ортогональности собственных векторов как относительно матрицы масс, так и относительно матрицы жесткости. В дальнейшем будем считать, что формы собственных колебаний нормированы по массе, что приводит к следующим соотношениям ортонормированности

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_j &= 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \\ \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi}_i &= 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{\Psi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi}_i = \omega_i^2. \end{aligned} \quad (3.173)$$

При динамическом расчете  $n$  — число компонент вектора  $\mathbf{u}$ , с которыми связаны инерционные силы (число *динамических степеней свободы*), зачастую бывает намного меньшим, чем при статическом расчете. Типичным примером могут служить повороты узлов, обычно оказывающие значительно меньшее динамическое влияние, чем их линейные смещения. Если часть инерционных составляющих нагрузки не учитывается, то, разделяя вектор  $\Psi$  на подвектор  $\Psi_0$ , для которого силы инерции равны нулю, и подвектор  $\Psi_1$ , связанный с инерционными силами, можно записать систему (3.172) в форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix}. \quad (3.174)$$

Из этой системы исключается подвектор  $\Psi_0$  и в результате указанной процедуры *статического уплотнения* размерность задачи модального анализа резко уменьшается и эта задача приобретает вид

$$(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{10}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01} - \omega^2 \mathbf{M}_{11})\Psi_1 = \mathbf{0}. \quad (3.175)$$

В силу ортогональности форм собственных колебаний решение любой динамической задачи в виде разложения

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \Psi_i \quad (3.176)$$

ведет к распаду системы дифференциальных уравнений (3.170) на независимые уравнения относительно обобщенных координат  $y_i(t)$ . В эти уравнения обычно включается пропорциональный скорости дополнительный член, с помощью которого учитывается вязкое сопротивление движению, и тогда они приобретают вид

$$M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + C_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 M_i y_i = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.177)$$

Обобщенные силы

$$P_i(t) = \Psi_i^T \mathbf{p}(t), \quad (3.178)$$

массы

$$M_i = \Psi_i^T \mathbf{M} \Psi_i \quad (3.179)$$

и коэффициенты вязкости  $C_i$ , совместно с начальными условиями на обобщенные перемещения  $y_{0i} = y_i(0)$  и обобщенные скорости  $y'_{0i} = dy_i(0)/dt$ , получаемые из  $\mathbf{u}(0)$  и  $d\mathbf{u}(0)/dt$  по формулам

$$y_{0i} = \Psi_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}(0) / M_i, \quad y'_{0i} = [\Psi_i^T \mathbf{M} d\mathbf{u}(0)/dt] / M_i, \quad (3.180)$$

полностью определяют решение задачи. Это решение дается выражением [Клаф, Пензиен, 1979]

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left\{ \left[ (y_{0i} \xi_i \omega_i + y'_{0i}) \frac{\sin \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} + y_{0i} \cos \bar{\omega}_i t \right] + \frac{1}{\bar{\omega}_i M_i} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i (t-\tau) d\tau \right\},$$

в котором первое слагаемое учитывает начальные условия, а второе носит название интеграла Дюамеля.

Безразмерный параметр затухания  $\xi_i$  [Клаф, Пензиен, 1979] связан с коэффициентом вязкости  $C_i$  соотношением

$$\xi_i = \frac{C_i}{2\omega_i M_i}. \quad (3.181)$$

Входящая в выражение для  $y_i(t)$  частота демпфированных колебаний  $\bar{\omega}_i$ ,

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3.182)$$

мало отличается от  $\omega_i$  при обычных значениях *логарифмического декремента*, поэтому

$$\delta_i = 2\pi \xi_i \omega_i / \bar{\omega}_i \approx 2\pi \xi_i. \quad (3.183)$$

Большинство рекомендуемых справочной и нормативной литературой методов динамического расчета конструкций оперируют с разложением (3.176) по формам собственных колебаний. При этом расчет ведется по распавшейся системе уравнений, каждое из которых определяет значение интересующей расчетчика реакции системы (перемещения, усилия, напряжения, инерционные силы и т.п.) при движении по той или иной собственной форме

$$X(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t), \quad (3.184)$$

где  $n$  — число динамических степеней свободы системы.

Указанные реакции являются функциями времени, и их суммирование необходимо выполнять для одних и тех же моментов движения. Но для этого следует решать нестационарную задачу динамики и учитывать все переходные процессы в системе, для чего

требуется информация заведомо более подробная, чем та, которой обычно располагает расчетчик. Чаще всего имеется возможность для каждой собственной формы определить только так называемый модальный отклик  $|a_i y_i|_{\max}$ , который является максимальным значением реакции системы для  $i$ -й формы. Возникает проблема суммирования модальных откликов, которые в общем случае достигаются неодновременно, и интересующее нас экстремальное значение

$$X_{\max} = \max_t \left| \sum_{i=1}^n a_i y_i(t) \right| \quad (3.185)$$

определить достаточно сложно, что заставляет получать лишь более или менее удачные оценки величины  $X_{\max}$ .

Имеется несколько способов суммирования модальных откликов. Проще всего получить верхнюю оценку

$$X_U = \sum_{i=1}^n |a_i| |y_i|_{\max} \geq X_{\max} . \quad (3.186)$$

Отличие между  $X_U$  и  $X_{\max}$  может быть достаточно большим, поэтому были предложены и другие оценки. В теории сейсмостойкости пользуется большой популярностью оценка Розенблюма

$$X_{RMS} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i |y_i|_{\max})^2} , \quad (3.187)$$

которую обычно называют «наиболее вероятным значением реакции»<sup>20</sup>. В предположении справедливости достаточно сильной гипотезы о том, что все модальные реакции являются нормально распределенными случайными величинами с одинаковыми коэффициентами корреляции, выражение (3.187) можно «доказать» [Бирбраер, 1998].

В общем случае при учете различных коэффициентов корреляции  $\rho_{ij}$  между  $i$ -ой и  $j$ -ой формами колебаний можно получить<sup>21</sup>

$$X_{CQC} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i y_i|_{\max} \rho_{ij} |a_j y_j|_{\max}} . \quad (3.188)$$

<sup>20</sup> Индексирование оценки Розенблюма происходит от начальных букв слов Root Mean Square.

<sup>21</sup> Индексирование берется от начальных букв слов Complete Quadratic Combination.

Например, в программе **GTSTRUDL**, со ссылкой на работу [Der Kiureghian, Armen, 1980], в качестве коэффициентов корреляции принимаются следующие величины:

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\xi_i \xi_j} (\xi_i + h\xi_j) h^{3/2}}{(1-h^2)^2 + 4\xi_i \xi_j h(1+h^2) + 4(\xi_i^2 + \xi_j^2) h^2}, \quad (3.189)$$

где  $\xi_i$  и  $\xi_j$  безразмерные параметры затухания, отвечающие соответствующим формам колебаний, а  $h = \omega_i/\omega_j$  частотное отношение. В этой же программе имеется богатая возможность задания и иных вариантов корреляции, а также иных способов определения модальных откликов, определяемых национальными нормативными документами. В частности, в соответствии с нормами комиссии США на проектирование атомных станций в сейсмически опасных районах, принимается

$$\rho_{ij} = \left[ 1 + \left( \frac{\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{\omega_i \zeta_i + \omega_j \zeta_j} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.190)$$

при этом  $\zeta_i = \xi_i + 2/t_d \omega_i$ , а  $t_d$  представляет собой промежуток времени, в течение которого поддерживается движение. Рекомендуемый указанными нормами интервал сейсмоздействия  $t_d$  составляет 10 секунд, хотя пользователь имеет возможность изменить этот интервал, принимаемый по умолчанию.

Формулу (3.187) можно рассматривать как частный случай (3.188), в которой нормирующая корреляционная матрица  $[[\rho_{ij}]]$  принимается равной единичной матрице. В этом случае коэффициенты корреляции между модальными откликами равны нулю. Это допущение удовлетворительно подтверждается практикой в тех случаях, когда собственные частоты достаточно далеко разнесены. Если собственные частоты близки, то вводят гипотезу об их коррелированности. В частности, используется «правило 10%», в соответствии с которым частоты разбиваются на две группы — близко и далеко расположенные друг от друга. Для первых, у которых частоты  $\omega_i$  и  $\omega_j$  отличаются не более чем на 10%, т.е.  $|\omega_i/\omega_j - 1| \leq 0,1$ , коэффициент корреляции считается равным единице, для других пар используется предположение о некоррелированности.

Предлагался и такой способ получения оценки

$$X_C = X_{DOM} + \sqrt{X_{RMS}^2 - X_{DOM}^2}, \quad (3.191)$$

где доминирующий модальный отклик определяется формулой

$$X_{DOM} = \max(|a_1 \|y_1|_{\max}, |a_2 \|y_2|_{\max}, \dots, |a_n \|y_n|_{\max}|). \quad (3.192)$$

Оценка  $X_C$  всегда располагается между  $X_U$  и  $X_{RMS}$ .

В работе [Butzel, Merchant, 1973] была предложена и оценка снизу

$$X_L = 2X_{DOM} - X_U, \quad (3.193)$$

справедливая при  $X_L/X_U > 1/3$ . Таким образом, имеющиеся оценки выстраиваются в следующие цепочки:

$$X_L \leq X_{RMS} \leq X_C \leq X_U, \quad X_L \leq X_{\max} \leq X_U. \quad (3.194)$$

### 3.9. Континуальные системы в конечноэлементном описании

В начале этой главы мы сознательно отказались от рассмотрения «внутреннего устройства» конечных элементов, чтобы сосредоточиться на других аспектах анализа. Теперь слегка восполним указанный пробел, обратившись к некоторым важным деталям конечноэлементного описания континуальных систем, остановившись для конкретности на трехмерной задаче теории упругости для изотропного тела.

Пусть поле перемещений внутри элемента характеризуется вектором  $\mathbf{v}(X)_e = [[u, v, w]]^T$ , компоненты которого являются функциями точки  $X$  и представляют собой перемещения относительно декартовой системы координат. В методе конечных элементов это поле связывается с вектором узловых перемещений  $\mathbf{u}_e$  с помощью интерполирующих функций (матрицы функций формы)  $\mathbf{U}(X)$ , так что можно записать

$$\mathbf{v}(X)_e = \mathbf{U}(X)_e \mathbf{u}_e. \quad (3.195)$$

Вводя в рассмотрение символическую матрицу  $\partial$  операций дифференцирования [Розин, 1998], можно определить вектор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \partial^T \mathbf{v}(X)_e = \partial^T \mathbf{U}(X)_e \mathbf{u}_e, \quad (3.196)$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e = \llbracket [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}] \rrbracket^T, \quad (3.197)$$

а с помощью матрицы упругости  $\mathbf{F}$  и вектор напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (3.198)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_e \quad (3.199)$$

$$= \llbracket [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}] \rrbracket^T,$$

где упругие характеристики Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  связаны с техническими характеристиками материала модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  следующими соотношениями

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.200)$$

Нетрудно заметить сходство между (3.2) и (3.196), из которого следует, что для континуальной системы в роли матрицы  $\mathbf{Q}_e^T$  выступает матрица  $\partial^T \mathbf{U}(X) = \mathbf{Q}^T(X)_e$ .

Дифференциальные уравнения равновесия с использованием введенных обозначений записываются в виде

$$\partial \boldsymbol{\sigma}_e + \mathbf{q}(X) = \mathbf{0}, \quad (3.201)$$

где  $\mathbf{q}(X)$  — вектор объемных сил.

Поскольку в качестве обобщенных перемещений выбираются смещения узлов, то и все объемные и поверхностные силы должны быть приведены к узловым. Исходя из принципа возможных перемещений, вектор объемных сил  $\mathbf{q}(X)$  приводится к узловым силам  $\mathbf{p}_e$  с использованием тех же функций формы  $\mathbf{U}(X)$ , что дает

$$\mathbf{p}_e = - \int_{\Omega} \mathbf{U}^T(X) \mathbf{q}(X) d\Omega, \quad (3.202)$$

где интегрирование выполняется по всему объему элемента  $\Omega_e$ .

Совершенно аналогично реализуется приведение поверхностных сил.

Наконец, аналогичным образом выполняется приведение к узлам внутренних упругих сил [Розин, 1998], что в результате дает выражение для матрицы жесткости элемента

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} (\partial^T \mathbf{U})^T \mathbf{F} \partial^T \mathbf{U} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{Q}(\mathbf{X})_e \mathbf{F} \mathbf{Q}^T(\mathbf{X})_e \, d\Omega, \quad (3.203)$$

соответствующее (3.6).

Описанная выше процедура дискретизации непрерывной задачи известна как метод конечных элементов в форме метода перемещений и является далеко не единственным способом дискретизации применительно к методу конечных элементов.

### 3.9.1. Замечание о терминологии

Любопытно (а по нашему мнению и небезопасно), что одни и те же названия (метод перемещений, метод сил, смешанный метод) употребляются в двух совершенно разных смыслах. С одной стороны, под методом (скажем, методом перемещений) понимается процедура решения конечномерной задачи, а с другой стороны — процедура дискретизации. А это абсолютно разные вещи! Более того, совершенно независимые. В самом деле, легко представить себе, что дискретизация выполнена на основе аппроксимаций только полей перемещений, а решение дискретной задачи — на основе, например, метода сил. Так каким же методом в этом случае решена исходная непрерывная задача — методом сил или все же методом перемещений?

Такая терминологическая чехарда вносит изрядную дозу путаницы в умы даже квалифицированных, но не слишком искушенных в вопросах теории расчетчиков. Вот почему мы бы предпочли не использовать названия методов сил, перемещений и т.д., когда речь идет о схеме сведения непрерывной задачи к задаче с конечным числом степеней свободы. Эти названия исторически раньше были уже зарезервированы как указания на метод решения конечномерной задачи и берут свое начало из классической строительной механики стержневых систем, которая и создавалась и обрастала своей специфической терминологией еще в те времена, когда о методе конечных элементов никто и не помышлял.

К сожалению, эти названия уже успели достаточно прочно закрепиться в литературе по методу конечных элементов.

### 3.9.2. Замечание о способах изображения расчетных схем

В методе перемещений элементы системы считаются присоединенными только к узлам расчетной схемы, друг с другом непосредственно они не соединяются. Указанная особенность построения расчетной схемы часто не комментируется в учебной и справочной литературе, она не всегда видна и при использовании традиционных способов изображения расчетной схемы.

Так, расчетная схема, показанная на рис. 3.26, *a* в традиционной форме, может навести на мысль о непосредственном соединении элементов одного с другим, в то время как более детальное изображение на рис. 3.26, *b* позволяет избежать такого заключения. Заметим также, что в детальном изображении видны и другие особенности реализации расчетной схемы, в частности, возможность выполнения одинаковых кинематических условий с использованием различных наборов связей.

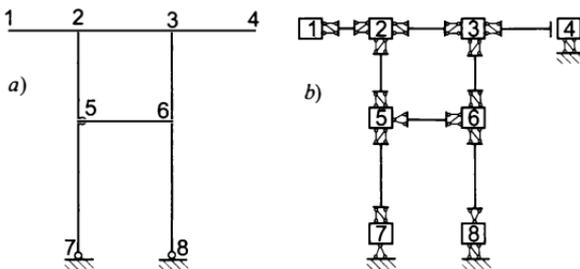


Рис. 3.26. Изображение расчетной схемы: *a* – традиционное; *b* – детальное.

Неучет указанного различия не всегда безобиден. Например, с точки зрения кинематических свойств задачи два варианта расчетной модели, представленные на рис. 3.27, равноправны (балка, защемленная на левом конце и шарнирно опертая на правом).



Рис. 3.27. Два варианта представления одной и той же расчетной схемы

Но с точки зрения задания усилий эти варианты различаются — схема по рис. 3.27, *b* передает момент  $M$  на стержень и узел 2 в этой схеме будет иметь поворот, а схема по рис. 3.27, *a* не передает момент и узел 2 этой схемы будет иметь нулевой угол поворота. Чтобы и в схеме по рис. 3.27, *a* возникал изгибающий момент в стержне, его следует считать не узловым, а приложенным к стержню в сечении около узла.

## 4. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ

*Нелепость в мундире гораздо более убедительна, чем нелепость обнаженная. Уже тот факт, что теория появляется в математической форме как-то заставляет нас отнестись к ней серьезно*

**J. Schwartz**

### 4.1. Замечания о дискретизации задачи

Задолго до появления современной концепции дискретизации, реализуемой в методе конечных элементов (МКЭ), использовались так называемые методы физической дискретизации (в англоязычной литературе — *physical lumping*), где континуальная задача заменялась системой с конечным числом степеней свободы на основе некоторых физических соображений. Вспомним, например, популярный еще лет тридцать назад метод Б.Н. Жемочкина [Жемочкин, Сеницын, 1947], предназначенный для расчета балок и плит, покоящихся на упругой полуплоскости и упругом полупространстве соответственно. В частности, строились и механические стержневые модели, в некотором смысле (например, по накапливаемой энергии) эквивалентные континуальным. Казалось бы, время таких построений прошло, и большинство исследователей поняли, что физическая дискретизация гораздо слабее (и наивнее) современного метода конечных элементов, тем более, что последний снабжен теперь всеми атрибутами «серьезной теории», основанной на применении абстрактной математики и теории сплошных сред.

Однако существуют соображения, которые не позволяют отбросить методы физической дискретизации, и главное из них состоит в том, что такая дискретизация приспособлена к интуитивному мышлению многих инженеров, склонных к построению аналогий, и на основании этих аналогий лучше понимающих результаты расчета, найденные тем же МКЭ. Кроме того, физическую дискретизацию можно использовать и в противоположном направлении, когда

действительно дискретную конструкцию путем «размазывания» представляют непрерывной.

Такие характерные для физической дискретизации операции, как замена распределенных масс сосредоточенными, замена сплошного упругого основания системой густо расположенных пружин и др. выполняются обычно «на глазок». Но имеются и примеры физической дискретизации, приводящие к тем же уравнениям, что и МКЭ, хотя это возможно далеко не во всех случаях. И последнее нужно хорошо понимать, чтобы не стать жертвой неоправданной интуиции.

## 4.2. Основные понятия метода конечных элементов

В методе конечных элементов занимаемая конструкцией сплошная область  $\Omega$ , которая имеет бесконечное число степеней свободы, аппроксимируется дискретной моделью, состоящей из совокупности подобластей (конечных элементов), имеющих конечное число степеней свободы и взаимодействующих между собой только в узловых точках.

Каждый конечный элемент  $\Omega_e$  ( $e = 1, \dots, m$ ) характеризуется следующими свойствами:

- размерностью используемого пространства (одномерное, двумерное, трехмерное);
- геометрической формой, которая чаще всего является одной из простейших геометрических фигур (отрезок прямой, треугольник, прямоугольник, четырехугольник, тетраэдр и т.п.);
- набором узлов, располагаемых (как правило, хотя и не всегда) на линиях (поверхностях) раздела элементов и являющихся общими для граничащих друг с другом элементов;
- набором используемых внешних и внутренних степеней свободы<sup>1</sup> отнесенных чаще всего к узлам (хотя и не обязательно к узлам) — перемещения, повороты и т.п.;

<sup>1</sup> Под *внутренними* понимаются такие степени свободы конечного элемента, соответствующие которым обобщенные перемещения не входят в выражение для энергии деформации любых иных конечных элементов системы, отличных от данного конечного элемента. Обобщенные перемещения, отвечающие *внешним* степеням свободы, входят в выражения для потенциала деформирования как данного элемента, так и некоторых других (обычно геометрически соседних) элементов.

- системой аппроксимирующих функций, определяющих внутри области  $\Omega_e$  приближенные выражения для компонент перемещений, и их связью со степенями свободы конечного элемента, которые однозначно определяются значениями этих компонент, заданными в узлах для всех степеней свободы элемента (имеются в виду классические конечные элементы, построенные на основе аппроксимаций полей перемещений);
- физическим законом, связывающим напряжения и деформации;
- определением энергетического пространства, для аппроксимации элементов которого предназначены конечные элементы данного типа. Это определение энергетического пространства эквивалентно ссылке на класс задач, к которым применим данный тип конечного элемента (КЭ пластины плоского напряженного состояния, КЭ плиты Кирхгофа-Лява, КЭ, покоящейся на упругом двухпараметровом основании плиты Рейсснера, стержень Тимошенко для пространственной задачи и т.д.)
- и последним (по списку, но не по значимости!) — перечнем ограничений и рекомендаций по применению.

Одной из важнейших характеристик конечноэлементной модели является максимальный диаметр элементов

$$h = \max_e \left( \sup_{x, y \in \Omega_e} |x - y| \right), \quad (4.1)$$

с которым часто связывают оценки погрешности метода. Иначе говоря,  $h$  — это минимальный диаметр шара, в который можно вложить любой конечный элемент расчетной схемы. Кроме того, обычно предполагается, что при бесконечном уменьшении диаметра, т.е. при  $h \rightarrow 0$ , соблюдаются следующие условия регулярности — в каждый конечный элемент можно вложить шар радиуса  $\rho \leq Ch$ , где константа  $C$  не зависит от  $h$ . Это предохраняет от использования так называемых «игольчатых» элементов (слишком вытянутых прямоугольников, треугольников с очень малыми углами и т.п.).

Как правило, в МКЭ аппроксимирующие функции являются полиномиальными или кусочно-полиномиальными (метод подобластей), хотя и существуют элементы с дробно-рациональными (так называемые изопараметрические элементы), тригонометрическими, логарифмическими и другими аппроксимациями поля перемещений. Выбор степеней свободы элемента и соответствующих аппроксимирующих функций полностью определяет скорость сходимости и оценку погрешности МКЭ.

Если зафиксировать все параметры конечноэлементной расчетной модели, за исключением размера конечных элементов  $h$ , то можно представить, что, меняя этот размер, мы получим последовательность приближенных решений задачи  $\mathbf{u}_h$ . Когда говорят о сходимости МКЭ, то имеют в виду, что эта последовательность устремляется к точному решению задачи  $\mathbf{u}^*$ , когда  $h \rightarrow 0$ .

Представленная выше концепция конечноэлементного моделирования задачи базируется на том, что известно в литературе как применение *h-элементов*. Относительная простота такого представления допускает эффективное и прямое решение задачи расчета. В последние годы в некоторых программных системах (например, системы **NASTRAN** или **StressCheck**) получил признание иной тип конечного элемента — так называемый *p-элемент*. В отличие от *h-элементов*, *p-элементы* могут непосредственно представлять кривизну поверхности и особенности полей напряжений на более простых сетках, содержащих меньшее число элементов. Точность анализа управляется *p-уровнем* (порядком полинома), присвоенным каждому элементу: выше *p-уровень* — больше точность. Фактически, *h-элемент* может быть рассмотрен как специальный случай *p-элемента*, где *p* есть фиксированное число, определенное авторами программы. При использовании *h-элементов* точность результата, как и время решения, возрастает за счет увеличения количества элементов. При использовании *p-элементов* тот же феномен происходит при повышении «порядка *p*».

Одной из первых заявок на использование *p-элементов* является случай областей сложного напряженного состояния, где геометрия и внешние условия должны быть представлены очень точно. Эти условия включают скругления расчетной модели вместо использования острых углов, и распределенные нагрузки — вместо сосредоточенных. Более подробная модель ведет к более подробным результатам. В случае *p-элементов* приспособление модели достигается повышением *p-уровня* элементов, выбранных пользователем или автоматически программой, пока ответы не достигли определенного критерия сходимости без изменения сетки.

Несмотря на многие положительные характеристики *p-элементов*, *h-элементы* имеют различные преимущества. Требование, чтобы *p-элементы* заменили *h-элементы* для всего расчета, или утверждение, что *p-элементы* не являются конечными элементами, несомненно, необоснованны. Для анализа глобального поведения конструкции *h-элементы* могут оказаться предпочтительней. Они также лучше представляют решение для задач, в которых есть разрывы напряжения, как, например, в оребренных пластинах,  $z$

также при решении нелинейных задач. Наконец,  $h$ -элементы связаны с детально отработанной вычислительной технологией, проверенной временем. Для моделей из  $h$ -элементов доступно большое разнообразие генераторов сеток, препроцессорных и пост-процессорных средств обработки.

Объединение методов при совместном использовании как  $h$ -элементов, так и  $p$ -элементов обеспечивает преимущества для общих проблем. Возможность объединять  $h$ -элементы и  $p$ -элементы в единой расчетной модели допускает большинство конструкций, которые должны исследоваться грубо с применением  $h$ -элементов, чтобы получить общий ответ, в то время как некоторые конкретные области интереса могут исследоваться с применением  $p$ -элементов, чтобы обеспечить большую точность в критических точках.

Поскольку время решения может увеличиться при повышении  $p$ -уровня, хорошее моделирование состоит в использовании как  $h$ -элементов, так и  $p$ -элементов, что допускает более точные решения для больших задач без потерь, проистекающих из использования только  $p$ -элементов. Стратегию решения, которая позволяет в одной расчетной модели имитировать как подробное описание, так и общее поведение, одновременно используя грубую и тонкую сетки или применяя  $p$ -элементы в выбранных областях, иногда называют *глобально/локальным анализом*.

Далее мы будем рассматривать только концепцию  $h$ -элементов, поскольку именно она получила наиболее широкое распространение в подавляющем большинстве коммерческих программных комплексов общего применения.

Итак, под  $h$ -элементным анализом понимается процесс построения последовательности приближенных решений задачи методом конечных элементов, где шаг от шага этой последовательности отличается только размерами сеточного разбиения области интегрирования. *Типы* конечных элементов, применяемые на различных шагах этого процесса, не модифицируются от шага к шагу.

Когда в программной документации говорят о типах конечных элементов, то обычно под этим подразумевают ссылку на номер или иной идентификационный признак (например, имя) соответствующего раздела из задействованной в программе *библиотеки конечных элементов*. В начале этого раздела мы уже говорили о совокупности параметров и иных показателей, определяющих тип конечного элемента, причем среди таковых характеристик был упомянут также набор степеней свободы конечного элемента, отнесенных к его узлам. Эта важная характеристика позволяет выделить среди прочих типов класс

конечных элементов, все степени свободы узлов которых имеют смысл линейных перемещений и, возможно, поворотов узлов.

Если ограничиться этим классом конечных элементов, то тогда узел конечноэлементной модели можно определить на уровне механики как *абсолютно твердое тело исчезающе малых размеров*. В более общем случае под узлом понимается геометрическая точка области, занимаемой конечным элементом, в которой сосредоточена одна или несколько степеней свободы этого конечного элемента. В этой связи соответствующий класс конечных элементов можно было бы назвать классом конечных элементов с *твердотельными узлами*<sup>2</sup>.

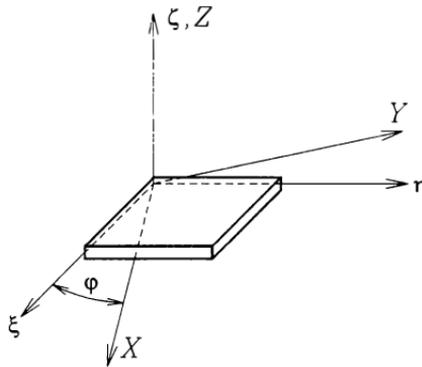
Конечные элементы с нетвердотельными узлами применяются достаточно широко. Упомянем здесь в качестве примера полностью совместные прямоугольные конечные элементы Богнера-Фокса-Шмита [Bogner et al., 1966] с четырьмя степенями свободы в узле для изгибаемой пластины, треугольный элемент с шестью степенями свободы в узле для той же задачи (Каупер - Коско - Линдберг - Олсон [Cowper et al., 1957]) - в элементах этого типа в качестве обобщенных степеней свободы принимаются не только значения функции прогибов пластины в узловых точках и значения ее первых производных по координатам (на механическом уровне это и есть линейные перемещения и повороты узлов), но также и значения вторых производных от той же функции.

Мотивацией для введения дополнительных степеней свободы обычно служит стремление устранить разрывы в полях перемещений (ликвидировать несовместность) за счет повышения порядка аппроксимации искомых функций. Повышенный порядок аппроксимации, в свою очередь, полезен для улучшения асимптотических оценок по сходимости на тех же сетках конечных элементов. Но эти выигрыши не даются бесплатно, и за них приходится расплачиваться хотя бы увеличением общего числа степеней свободы системы. При этом утрачивается также такое преимущество конечных элементов с твердотельными узлами, как физическая прозрачность смысла непопулярных степеней свободы узлов - инженеру-практику интуитивно понятна и близка концепция именно твердотельных конечных элементов, она перекидывает в

<sup>2</sup> Не претендуя на то, что введенный здесь термин лингвистически удачен, хотим лишь подчеркнуть необходимость явного выделения класса конечных элементов с твердотельными узлами. В литературе для элементов с нетвердотельными узлами встречается и такое наименование как «конечные элементы повышенного порядка точности».

сознании инженера мостик между строительной механикой стержневых систем и методом конечных элементов.

Есть еще одно неприятное обстоятельство, связанное с конечными элементами повышенного порядка точности, на которое не всегда обращают должное внимание. Дело в том, что при использовании конечных элементов с твердотельными узлами линейное преобразование координат (переход от местной системы осей к глобальной координатной системе и наоборот) выполняется стандартным способом. В то же время для конечных элементов повышенного порядка точности здесь могут возникнуть проблемы, особенно, если среди учитываемых степеней свободы узлов старшие производные от искомой функции присутствуют не полностью.



**Рис. 4.1.** Преобразование местной системы координат в глобальную координатную систему

Проиллюстрируем этот факт прямоугольным конечным элементом Богнера-Фокса-Шмита для изгибаемой плиты. Для этого (кстати говоря, весьма эффективного) элемента в каждом из узлов принимается следующий набор степеней свободы:

$$w, \quad \theta_{\xi} = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \theta_{\eta} = -\frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (4.2)$$

где  $w$  — функция прогибов плиты,  $(\xi, \eta, \zeta)$  — местная (для элемента) система координат.

Пусть переход от местной координатной системы к глобальной системе координат  $(X, Y, Z)$  осуществляется поворотом на угол  $\varphi$  вокруг оси  $\zeta$ , как это показано на рис. 4.1. Этот переход аналитически записывается в виде линейных преобразований

$$x = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi, \quad y = -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \quad (4.3)$$

и несложно показать, что для четвертой степени свободы в

наборе (4.2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x} \sin 2\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial y} \sin 2\varphi. \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что при угле  $\varphi$ , не кратном  $\pi/2$ , переход от глобальных координат к локальным возможен только в том случае, когда в наборе степеней свободы каждого из узлов присутствуют все производные второго порядка, и одной смешанной производной для преобразования координатных систем недостаточно.

По-видимому, совокупностью всех отмеченных выше обстоятельств и объясняется тот факт, что в подавляющем большинстве современные программные разработки промышленного применения ограничивают доступную пользователю библиотеку конечных элементов классом элементов с твердотельными узлами.

Вместе с тем, встречаются ситуации, когда такое ограничение слишком обременительно. Например, в задачах расчета систем с тонкостенными стержнями открытого профиля существенную роль в общей картине деформирования играют деформации (выход точек поперечных сечений стержней из плоскости сечений), учет которых неизбежно (?) требует введения в узлах дополнительной седьмой (депланационной) степени свободы. После слова «неизбежно» в предыдущей фразе сознательно поставлен знак вопроса, поскольку, как это следует из результатов раздела 8.8, имеется возможность построения модели тонкостенного стержня, без выхода за рамки применения только твердотельных узлов в расчетной схеме. Но это — лишь отдельный прием, не гарантирующий возможности выхода за «твердотельные» границы в более сложных задачах.

Нам представляется все же, что в перспективе конкурентоспособные коммерческие программные продукты будут оснащены более широким диапазоном типов конечных элементов, доступных пользователю, так что ограничение на использование класса элементов с твердотельными узлами будет постепенно сниматься.

### 4.3. Моделирование стержневых систем

Во всех коммерческих программных системах, основанных на использовании метода конечных элементов, имеется возможность моделирования стержневых расчетных схем. Для таких схем в качестве функций формы, с помощью которых по перемещениям

узловых точек определяются перемещения внутри элемента, используются *точные* решения (для стержней постоянного сечения), и именно эта особенность заставляет специально выделить указанные системы из ряда других, где функции формы лишь приближенно представляют поле перемещений.

В этой связи отметим, что П.Тонгом [Tong, 1969] доказана следующая интересная теорема для одномерных задач. Пусть в качестве аппроксимирующих функций (функций формы), используемых при построении модели конечного элемента на основе минимизации лагранжиана, принимаются функции, удовлетворяющие соответствующему однородному дифференциальному уравнению на каждом из конечных элементов. Пусть, кроме того, каждый из конечных элементов имеет два узла, и в каждом из узлов учитывается  $m$  степеней свободы, где  $2m$  — порядок дифференциального уравнения задачи. Тогда независимо от сетки (количества и относительных размеров конечных элементов), а также от формы частного решения (от нагрузки) конечноэлементное решение  $u^h$  для перемещений в узлах сетки будет совпадать с точным решением, иначе говоря,  $u^h$  интерполирует точное решение  $u$  в следующем смысле:

$$\frac{d^j u^h}{dx^j}(x_i) = \frac{d^j u}{dx^j}(x_i) \quad (j = 1, \dots, m-1), \quad (4.5)$$

где  $x_i$  — координата любой узловой точки.

Использование элементов стержневого типа основывается на общности приемов построения и исследования систем фиксированных элементов, обладающих конечным числом степеней свободы [Розин, 1975], и их включение в программные системы обеспечивает последним универсальность по отношению к объектам расчета.

Следует помнить, что, хотя по отношению к конечным элементам стержневого типа постановка задачи о сходимости МКЭ часто лишена смысла, это утверждение и не является универсальным. Например, при использовании в качестве функций формы кубических полиномов Эрмита, которые являются точным решением статической задачи при постоянной жесткости стержня по его длине, в иных условиях, скажем, при переменной жесткости для статической задачи или для решения динамической задачи или задачи устойчивости эти функции уже являются приближенными (нарушаются условия применимости теоремы Тонга). То же относится к стержням на упругом основании. Вместе с тем, имеются реализации МКЭ, в

которых в качестве функций формы применяются функции Пузыревского-Крылова (колеблющийся стержень), Корноухова (сжатый или растянутый стержень) или Белоуса-Чудновского (колеблющийся сжатый стержень), и тогда решение является точным также и для колеблющегося стержня, расчет которого выполняется с учетом влияния продольной силы на моменты. Таким образом, расчетчик должен четко знать, с каким вариантом функций формы оперирует программная система.

Иногда возникает проблема «малой длины» стержневого конечного элемента, под которой понимается следующее — расчетчик помнит, что в курсах сопротивления материалов или строительной механики стержень определялся как объект, один из размеров которого (длина) заметно превышал другие, определявшие габариты поперечного сечения. Но в используемой расчетной модели стержень, как элемент расчетной схемы, может оказаться очень коротким. Типичным является пример, когда стержнями моделируются ребра жесткости пластины, и тогда длина стержневого элемента определяется достаточно мелким членением пластины на конечные элементы. Казалось бы, что возникает явное нарушение соглашений о том, что такое стержень. В действительности, никакого нарушения здесь нет, поскольку предположение о достаточной удлиненности стержня было необходимо лишь для обоснования вида соответствующего дифференциального уравнения; что же касается метода его решения, когда используется достаточно мелкое членение стержня (читай, интервала интегрирования) на участки, то это на виде уравнения никак не сказывается<sup>3</sup>. Это, безусловно, справедливо при решении в варианте «точных» или приближенных функций формы.

Говоря об уточнении расчетной модели путем сгущения сетки, автор работы [Алексеенко, 1999] пишет

*«...при таком уточнении возникает побочный эффект, связанный с нарушением основных предположений теории МКЭ о выполнении соотношений, на основе которых были сформулированы функции формы и матрицы жесткости стержневых элементов  $l \gg b$ . При этом появляются эффекты сингулярности матрицы жесткости стержневой системы и решение расходится...».*

<sup>3</sup> Сегодня это воспринимается как курьез, но еще в середине шестидесятых среди специалистов бушевали страсти по поводу понимания метода конечных элементов с жаркими спорами между сторонниками «физической дискретизации» и «математической дискретизации». И один из убийственных аргументов «фидисков» как раз и основывался на рассуждениях подобного рода.

Сам по себе факт отмечен верно, но неверна его интерпретация — дело не в том, что нарушены соотношения (об этом сказано выше), а в том, что мы получаем плохо обусловленную задачу, которую детально проанализировал Брюс Айронс [Айронс, 1967]. Он, например, указывает, что консольная балка, нагруженная силой на свободном конце (рис. 4.2), является известным случаем плохой обусловленности. Полная жесткость, которая в конце концов определяет перемещение под силой, равна  $G = 3EI/L^3$ , тогда как исходная жесткость одного участка расчетной схемы  $K = 12EI/(L/n)^3$ . Уже при числе элементов  $n = 50$ , это превышает  $G$  в  $5 \times 10^5$  раз.

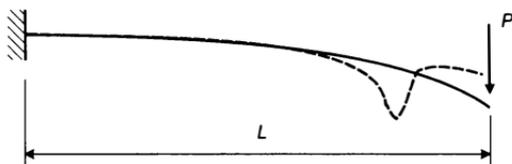


Рис. 4.2. Искажение формы прогибов

Основной причиной плохой обусловленности является то, что искажающий решение эффект вводится в задачу с помощью больших чисел, что может перекрыть более существенные стороны явления. Балка изгибается по гладкой кривой, но при коротких элементах ошибки в вычисленных прогибах способны придать этой линии колебательный характер, что при больших значениях жесткости участков может привести к серьезным ошибкам, а прогибу одного узла может соответствовать большее значение энергии деформаций, чем все остальным прогибам, взятым вместе.

Интересно отметить еще один факт: изменение используемых единиц измерения может привести к изменению числа обусловленности системы разрешающих уравнений и к потере точности расчета в случае, когда такое изменение повышает число обусловленности. Казалось бы, общее масштабирование, происходящее при замене метров на миллиметры, не должно влиять на вычисления. Но дело в том, что при такой замене остаются неизменными измерители углов поворота (они были и остались радианами), поэтому для стержневых элементов, например, компоненты матрицы жесткости  $EA/L$ , соответствующие линейным смещениям, и  $6EI/L^2$ , соответствующие углам поворота, меняются в разной степени, что и приводит к иным соотношениям между

максимальным и минимальным собственными числами матрицы, то есть к изменению числа обусловленности. Конечно, для пользователя удобно, чтобы расчетная программа предоставляла возможность выбора системы единиц, и большинство действующих программ снабжены инструментами настройки на избранную пользователем систему единиц. Но было бы также крайне полезно, чтобы коммерческие расчетные программы предусматривали и меры, страхующие пользователя от вычислительных неприятностей, способных проявляться при неудачном выборе размерностей данных.

Выход из этой ситуации прост и почти очевиден. Он связан с автоматическим переходом к безразмерным параметрам при формировании системы разрешающих уравнений задачи. Удивительно, но насколько нам это известно, ни одна из широко распространенных программных систем процедурой перехода к безразмерным неизвестным параметрам не снабжена. Особенных сложностей в реализации такой процедуры не видно, а единственная проблема, которую разработчикам нужно будет алгоритмически решить в программной системе это выбор некоторого характерного линейного размера для каждой конкретной задачи, который, собственно говоря, и определяет масштабный множитель для перехода к безразмерным линейным перемещениям.

Можно указать и еще один способ, возможно более предпочтительный в силу простоты алгоритма, для перехода к безразмерным параметрам в системе разрешающих уравнений задачи (линейных алгебраических уравнений). С этой целью система уравнений типа (3.8), первоначально записываемая в виде  $\mathbf{Ku} = \mathbf{p}$ , предварительно (до решения) преобразуется к эквивалентному виду с помощью линейного преобразования с матрицей  $\Lambda$

$$\Lambda^{-1}\mathbf{K}\Lambda^{-1}\Lambda\mathbf{u} = \Lambda^{-1}\mathbf{p},$$

или  $\mathbf{K}^{\circ}\mathbf{u}^{\circ} = \mathbf{p}^{\circ}$ , где  $\mathbf{u}^{\circ} = \Lambda\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}^{\circ} = \Lambda^{-1}\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{K}^{\circ} = \Lambda^{-1}\mathbf{K}\Lambda^{-1}$ . Удобно в качестве матрицы  $\Lambda$  взять диагональную матрицу, составленную из квадратных корней от диагональных элементов исходной матрицы жесткости системы  $\mathbf{K}$ , то есть положить

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{k_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что все диагональные элементы так отмасштабированной матрицы  $\mathbf{K}^\circ$  становятся равными единице<sup>4</sup>, тогда как остальные ее элементы вычисляются по простому правилу

$$k_{ij}^\circ = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii}} \sqrt{k_{jj}}}.$$

Вернемся к вопросу о разбиении стержня по его длине на отдельные элементы. Потребность в членении стержня на мелкие конечные элементы может быть вызвана и запросом на выполнение нелинейного расчета (расчета по деформированной схеме). Простейшая постановка такой задачи связана с явлением продольно-поперечного изгиба, когда необходимо учесть дополнительные изгибающие моменты, возникающие в сечении стержня за счет того, что продольная сила создает момент на поперечных перемещениях оси стержня. Такая задача для стержней постоянного сечения с заданным значением продольной силы решается точно (в замкнутом виде), однако при рассмотрении статически неопределимых стержневых систем могут возникнуть проблемы, связанные с необходимостью уточнения продольных сил. Конечно, есть системы, где изменение изгибной жесткости стержней при растяжении или сжатии практически не вызывает перераспределения осевых сил. Тогда необходимость в выполнении перерасчета отсутствует, но далеко не всегда такие системы (по классификации Н.В. Корноухова [1963] они называются *квазимоно-циклическими*) могут быть сразу же распознаны.

Здесь уместно привести полезную классификацию типов расчетов сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стержневых систем, предложенную в свое время Н.В.Корноуховым ([1963], стр. 80) и, как нам представляется, незаслуженно забытую.

Если совокупность продольных сил в стержнях системы известна заранее, до расчета (это — хотя и редкий, но возможный случай), то расчет по деформированной схеме может быть выполнен за один шаг с использованием соответствующих трансцендентных функций, зависящих от продольных сил как от параметров. Такой тип расчета Корноухов называет *моноциклическим*.

<sup>4</sup> Само собой разумеется, что в указанной форме этот способ масштабирования применим только к матрицам, у которых на главной диагонали расположены строго положительные элементы. Для положительно определенных матриц это условие выполняется автоматически.

Если совокупность продольных сил в стержнях системы может быть определена с удовлетворительной точностью без проведения расчетов по деформированной схеме (например, предварительным линейным расчетом системы) и затем использована в однократном повторном расчете этой же системы по деформированной схеме без последующего уточнения продольных сил, то такой расчет Корноухов называет *квазимоноциклическим*.

Наконец, при необходимости неоднократного перерасчета системы по деформированной схеме с уточнением продольных сил на каждом шаге, приходим к *полициклическому* расчету.

В связи с развитием компьютерных методов расчета по типу МКЭ большую популярность получил другой подход — задача решается как геометрически нелинейная, и при этом сами стержни дробятся на конечные элементы, наряду с дроблением пластинчатых, оболочечных и трехмерных частей системы. Это вполне соответствует общим принципам построения алгоритмов геометрически нелинейного расчета конечноэлементных систем. Однако, не всегда все старое стоит отбрасывать только на том основании, что это известно давно, да и новое — не обязательно лучшее. Понимающие этот простой принцип разработчики предоставляют пользователю возможность выбора, а не загоняют его в жесткие ограничительные рамки. Не боясь быть неправильно понятыми, расцениваем позицию разработчиков во втором случае как неуважение к пользователям.

Расчетчик должен четко понимать, какой вариант он имеет возможность выбрать, пользуясь тем или иным набором конечных элементов. Так, например, в системе SCAD имеется стержневой конечный элемент типа 10, при использовании которого можно задать значение продольной силы  $N$ , и оно будет учтено с помощью специальных функций<sup>5</sup> — аплодисменты пользователей. Но можно воспользоваться и стержневым элементом типа 310, для которого не нужно задавать значение продольной силы (она определится в процессе выполнения геометрически нелинейного расчета) — еще раз аплодисменты<sup>6</sup>.

В этом случае продольные деформации волокон стержня вычисляются с учетом нелинейных членов по формуле

<sup>5</sup> В русской технической литературе принято называть эти функции функциями Корноухова.

<sup>6</sup> Аплодисменты, переходящие в овацию, достанутся той программной разработке, которая по запросу пользователя выполнит и тройное сальто — полициклический расчет стержневой системы с автоматической выборкой продольных сил в стержнях системы при переходе от шага к шагу такого расчета.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (4.6)$$

причем перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  аппроксимируются кубическими полиномами, т.е. ищется решение в классическом стиле МКЭ. При этом нельзя забывать, что должны быть использованы уравнения равновесия для деформированного состояния, поскольку геометрические уравнения (4.6) соответствуют второму этажу геометрической нелинейности! Дробление стержня в пролете должно быть таким, чтобы точность решения оказалась удовлетворительной. Обычно для этого достаточно иметь 4...6 участков в пролете стержня.

Если у расчетчика все же возникают сомнения в достаточности количества участков разбиения стержня по его длине, то прикидка может быть выполнена на основании следующих соображений. Коэффициенты матрицы жесткости отдельного участка стержня связаны пропорциональной зависимостью с трансцендентными функциями Корноухова

$$\alpha = \frac{v}{\operatorname{tg} v} \frac{\operatorname{tg} v - v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}, \quad \beta = \frac{v}{\sin v} \frac{v - \sin v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}, \quad \gamma = \frac{v^3}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}, \quad \delta = \alpha + \beta,$$

аргументом которых служит параметр  $v$  продольной силы  $N$ , при этом  $v^2 = l^2 N / EI$ , где  $l$  — длина участка стержня. При небольших значениях  $v$  (скажем, не превышающих  $\pi/2$ ) эти функции с весьма высокой степенью точности аппроксимируются линейными агрегатами вида  $C_1 + C_2 v^2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, зависящие от вида одной из четырех функций Корноухова. Справедливость такого представления при относительно небольших значениях  $v$  (скажем, при  $v \leq \pi/2$ ) можно было бы обосновать и формально, раскладывая эти функции в ряды Тейлора-Маклорена в окрестности нуля. Чтобы не заниматься здесь математическими упражнениями, сошлемся на графики этих функций (рис. 4.3).

Несложно понять, что при замене функций Корноухова представленными выше линейными агрегатами матрица жесткости  $\mathbf{K}$  участка стержня будет иметь вид  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + v^2 \mathbf{K}_G$ , где  $\mathbf{K}_G$  как раз и есть та самая геометрическая матрица жесткости, которая участвует в геометрически нелинейном расчете. Отсюда и следует практическая рекомендация проверки достаточности разбиения сжатого стержня на такое количество участков, чтобы для отдельных его участков выполнялось неравенство  $v \leq \pi/2$ .

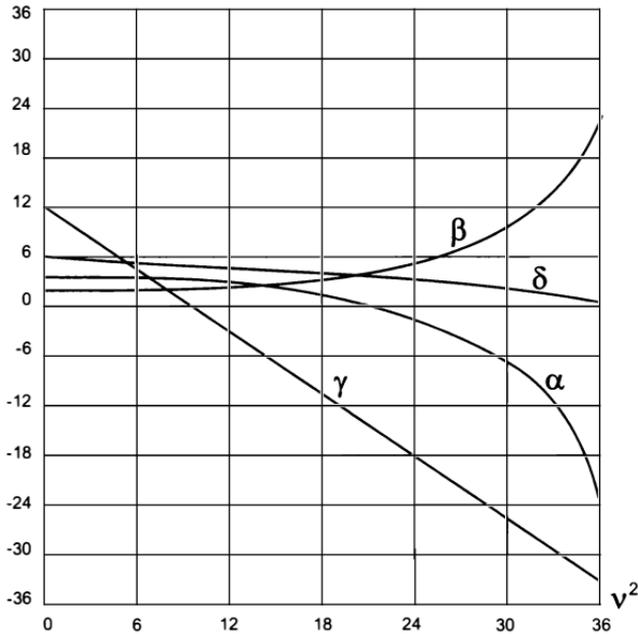


Рис. 4.3. Графики функций Корноухова

Имеется еще одна особенность использования результатов расчета стержневой системы, разбитой на мелкие элементы. Она связана с тем обстоятельством, что некоторые рекомендации норм проектирования явно или, чаще, неявно рассматривают отношение размеров поперечного сечения к длине стержня и имеют смысл только при определенных соотношениях этих параметров. Поэтому на этапе использования результатов следует четко различать стержневой конечный элемент, с помощью которого представлен только малый участок стержня, и стержень в целом, для которого применяются указания норм проектирования. Без этого различия такие понятия как нормируемая гибкость стержня, расчет железобетонного стержня по косому сечению, проверка местной устойчивости стенок и полок стального стержня и многие другие оказываются невозможными. Реализация способов указанного различия привела к необходимости введения понятия *конструктивный элемент*. Это, например, непрерывная цепочка конечных элементов одинакового поперечного сечения с одинаково ориентированными главными осями инерции, без шарниров во внутренних узлах.

Такое описание соответствует призматическому стержню постоянного сечения. Оно, конечно, может приниматься и другим (например, может учитываться естественная кривка стержня или

переменность сечения), но важен сам факт существования такого понятия, позволяющий оперировать с таким, например, параметром как длина стержня, контекстно понимаемая как длина конструктивного элемента (не элемента расчетной схемы!). По-видимому, понятие конструктивного элемента может вводиться и по отношению к некоторым участкам конечно-элементной пластинчатой или оболочечной модели, если только некоторые характеристики такого конструктивного элемента должны соответствовать этому элементу, как целому объекту, и их рассмотрение в масштабах конечного элемента недопустимо<sup>7</sup>.

В заключение этого раздела еще раз вернемся к учету влияния продольной силы в стержне. Часто здесь допускается одна характерная ошибка — при рассмотрении предварительно напряженных конструкций, таких, например, как сборные железобетонные системы, собираемые из предварительно напряженных при изготовлении элементов, в качестве продольной (параметрической) силы  $N$  задается усилие предварительного напряжения. Но параметрическая сила  $N$  должна быть **внешней** для элемента, в то время как рассматриваемое преднапряжение является частью внутренней, самоуравновешенной на элементе системы сил (растяжение в арматуре компенсируется сжатием в бетоне), и для того, чтобы убедиться в ошибочности ее учета как параметрической продольной силы, следует только задать себе один вопрос: каков знак указанной силы? Более детально проблема учета предварительного напряжения рассматривается ниже.

#### 4.4. Моделирование конечноэлементной сеткой

В теории метода конечных элементов большое внимание уделяется проблеме сходимости, т.е. асимптотическому поведению оценок точности получаемого приближенного решения при неограниченном сгущении сетки конечных элементов. Установлен ряд важных теорем о сходимости; например, для совместных элементов определено, что если  $(k-1)$  является степенью полинома, с помощью которого внутри конечных элементов аппроксимируются перемещения, и решается эллиптическая краевая задача порядка  $2m$ , для которой получено

---

<sup>7</sup> Заметим, что понятие «конструктивный» является расчетным (в том смысле, что конструктивный элемент участвует своими геометрическими параметрами в расчетах на соответствие действующим нормам), а не только описательным, как это сделано, например, для понятия «позиция» в системе **MicroFE**.

приближенное решение в перемещениях  $u^h$ , то ошибка в энергии, по сравнению с точным решением  $u$ , составляет

$$E(u-u^h, u-u^h) \leq Ch^{2(k-m)} \|u\|_k^2, \quad (4.7)$$

где  $h$  — определенный формулой (4.1) диаметр сетки конечных элементов. В оценке (4.7) справа участвует норма  $\|u\|_k$  — среднеквадратичная величина  $k$ -ой производной от искомой функции  $u$ . Для  $s$ -х производных  $u$  имеем оценки ошибок

$$\|u-u^h\|_s \leq Ch^{k-s} \|u\|_k, \quad \text{если } s > 2m-k; \quad (4.8,a)$$

$$\|u-u^h\|_s \leq Ch^{2(k-m)} \|u\|_k, \quad \text{если } s \leq 2m-k. \quad (4.8,b)$$

Для несовместных элементов аналогичные оценки получены в серии работ И.Д.Евзерова и В.С.Карпиловского.

Для некоторых типов конечных элементов, применяемых, например, в расчетно-вычислительном комплексе SCAD, справочные данные о скорости сходимости представлены в таблице 4.1. Эти данные являются достаточно типичными, а ссылка на конкретную программную разработку в этом смысле не существенна.

Данные таблицы дают возможность приблизительно назначить требуемую густоту сетки конечных элементов, исходя из такого весьма характерного рассуждения [Вовкушевский, Шойхет, 1981]:

*«...заметим лишь, что при естественных ограничениях на исходные данные и сетку области сходимость имеет место, и погрешность в определении напряжений и деформаций имеет порядок  $ch/L$ , где через  $c$  обозначена константа, зависящая от формы области;  $h$  — шаг сетки;  $L$  — характерный размер области. Эта оценка служит ориентиром при назначении шага сетки, в зависимости от желаемой точности; например, задав точность приближенного решения 5%, нужно выбрать шаг сетки равным примерно 1/20 от характерного размера...»,*

т.е. для характерного двумерного пятна необходимо иметь около 400 узлов.

Математически доказанные условия сходимости метода конечных элементов типа сформулированных в начале этого раздела полезно дополнить некоторыми соображениями механического характера, которые создают возможность неформального анализа. Для этого напомним, что решение задачи расчета эквивалентно минимизации полной потенциальной энергии системы (функционал Лагранжа), а аппроксимация поля перемещений некоторым конечным набором заранее заданных функций сужает возможность произвольного

деформирования, т.е. может трактоваться как наложение некоторых связей.

Таблица 4.1.

Наименование элемента	Показатель степени в оценках скорости сходимости по:			
	перемещениям	Напряжениям	Момен-там	поперечным силам
Прямоугольный элемент плиты	2	—	1	—
Треугольный элемент плиты	2	—	1	0
Четырехугольный (от 4 до 8 узлов) элемент плиты	2	—	1	0
Прямоугольный элемент плоской задачи теории упругости	2	1	—	—
Треугольный элемент плоской задачи теории упругости	2	1	—	—
Четырехугольный (от 4 до 8 узлов) элемент плоской задачи теории упругости	2	1	—	—
Четырехугольный (от 4 до 12 узлов) элемент плоской задачи теории упругости	2	1	—	—
Параллелепипед	2	1	—	—
Тетраэдр	2	1	—	—
Трехгранная призма	2	1	—	—
Пространственный изопараметрический шестиузловой элемент	2	1	—	—
Пространственный изопараметрический восьмиузловой элемент	2	1	—	—
Пространственный изопараметрический двенадцатиузловой элемент	2	1	—	—
Прямоугольный элемент оболочки	2	1	1	0
Треугольный элемент оболочки	2	1	1	0
Четырехугольный элемент оболочки	2	1	1	0
Четырехугольный (от 4 до 8 узлов) конечный элемент оболочки	2	1	1	0

Если элементы несовместны, то по их границам возможны некоторые перемещения, не существующие в континуальной расчетной модели (например, взаимные углы поворота пластин), которые соответствуют отсутствию некоторых связей.

При увеличении числа конечных элементов и уменьшении их размеров растет общее число степеней свободы конструкции и, следовательно, уменьшается влияние наложенных узловых связей.

Этот процесс при выполнении определенных условий и обеспечивает сходимость метода для совместных конечных элементов. С другой стороны, этот же процесс ведет к тому, что уменьшаются взаимные перемещения на межэлементных границах в несовместных элементах, что можно трактовать как определенное замыкание ранее снятых связей. Значит, сходимость несовместных элементов может иметь место лишь в тех случаях, когда положительные тенденции от преодоления наложенных связей превалируют над этой отрицательной тенденцией наложения связей на межэлементных границах.

#### 4.5. О практической сходимости

Следует учитывать, что упомянутые выше оценки скорости сходимости ориентированы на выяснение асимптотических свойств решения, а практического расчетчика интересует степень близости приближенного решения, полученного на вполне определенной сетке конечных элементов. Конечно, в большинстве случаев асимптотическая сходимость сопровождается и приемлемой «практической сходимостью», под которой мы будем понимать возможность получения приемлемой точности при сравнительно грубом разбиении, но из этого правила есть и исключения. Приведем в связи с этим высказывание великого математика и физика А.Пуанкаре (цитируется по [Блехман и др., 1983]):

*«... из двух рядов, коих общие члены суть  $1000^n/n!$  и  $n!/1000^n$ , математики назовут первый сходящимся...потому что миллионный член гораздо меньше 999 999-го, второй же ряд они рассматривают как расходящийся, ибо его общий член может беспрельдно возрастая. Астрономы, наоборот, примут первый ряд за расходящийся, потому что первые его 1000 членов идут возрастая; второй ряд они сочтут за сходящийся, потому что первые его 1000 членов идут убывая и в начале убывание весьма быстрое».*

И далее совершенно головокружительный вывод:

*«Оба воззрения законны: первое — в исследованиях теоретических, второе — в численных приложениях».*

Следует также иметь в виду, что теоретические оценки скорости сходимости строятся исходя из некоторых наилучших предположений о виде поля перемещений, которые не обязательно реализуются в конкретной задаче. Кроме того, в процессе

доказательства теорем сходимости, как правило, используются цепочки усиливающих неравенств и, наконец, такого рода оценки как (4.7) или (4.8) содержат неизвестную константу. В связи с этим, на практике часто используется анализ последовательности решений на сгущающихся конечноэлементных сетках, и решение о приемлемости принятой детализации принимается по результатам такого сравнения.

Конечно, большую задачу вряд ли стоит решать целиком на сгущающихся сетках, но очевидно, что выполнение такого анализа для характерных фрагментов расчетной схемы является рациональным. Эмпирически установленный факт устойчивости результата при сгущении сетки является весьма убедительным доводом в пользу правильности выбранного подхода к решению.

Сказанное не следует трактовать как призыв к голому эмпиризму, теоретические исследования сходимости весьма важны, и их результаты могут быть использованы в практических целях, однако здесь имеются и некоторые указанные ниже серьезные проблемы, которые расчетчик должен учитывать. Одна из первых проблем состоит в том, что при удовлетворительной практической сходимости по перемещениям могут не так хорошо сходиться интересующие расчетчика внутренние силы или напряжения. Они определяются дифференцированием перемещений, а операция дифференцирования является некорректной в том смысле, что незначительному изменению функции может отвечать значительное изменение производной.

Таким образом, проверки практической сходимости должны быть ориентированы на исследование тех результатов, которые требуются в решаемой задаче. Вот, например, характерная цитата из известной монографии О.Зенкевича [1975]:

*«Размеры разбиения, необходимого для получения приемлемой точности в задачах теории оболочек, зависят от многих причин. Часто оказывается, что при малой толщине оболочки область действия изгибающих моментов ограничена краевой зоной, где происходит значительное изменение этих моментов. При этом мембранные силы вычисляются точно даже при очень грубом разбиении, но, чтобы уловить изменение моментов вблизи грани, требуется крайне мелкое разбиение».*

При этом имеется определенная трудность в сопоставлении напряжений, полученных на сетках разной густоты, которая связана с тем, что напряжения зачастую определяются в центрах конечных элементов и нужно приложить определенные усилия для того, чтобы иметь возможность сопоставить напряжения в одинаковых точках.

Кроме того, при использовании некоторых типов конечных элементов (например, треугольных элементов с линейной аппроксимацией перемещений для решения плоской задачи теории упругости), поля напряжений имеют вид кусочно-постоянных функций, причем область их постоянства совпадает с треугольниками сетки. Значения напряжений, определенные с использованием этих элементов, сильно меняются при переходе от элемента к элементу, поэтому обычно применяется осреднение напряжений по элементам звезды, и относят их к узловой точке. Сопоставление таких полей напряжений затрудняется еще и наличием операции осреднения.

Организация проверки практической сходимости должна учитывать, что решаемая задача может иметь неприятные особенности, связанные с некорректной идеализацией конструкции. Типичным примером является идеализация нагрузки в виде сосредоточенной силы (практически нереализуемая ситуация), с которой могут быть связаны такие свойства решения задачи, как появление уходящих в бесконечность решений (логарифмическая особенность в выражениях для изгибающих моментов в пластине под сосредоточенной силой) и высокие градиенты поля напряжений.

Необходимо предостеречь от одной опасности, связанной с автоматическим сгущением сетки во время анализа сходимости. Часто забывают о том, что при сгущении сетки следует следить за согласованностью конечно-элементного и геометрического представлений. Поскольку в конечно-элементной модели криволинейные поверхности заменяются многогранником, а кривые линии – ломанными, то если одновременно со сгущением сетки не корректировать геометрическую аппроксимацию расчетной модели, то можно столкнуться с кажущимся отсутствием сходимости.

Таким образом, проверку практической сходимости стоит организовать на примерах, близких к практически интересующему расчетчика классу задач, но таких, для которых имеются точные решения и известны их неприятные особенности. Тогда интерпретация результатов тестирования оказывается более содержательной. Некоторые задачи такого рода рассмотрены в следующем разделе.

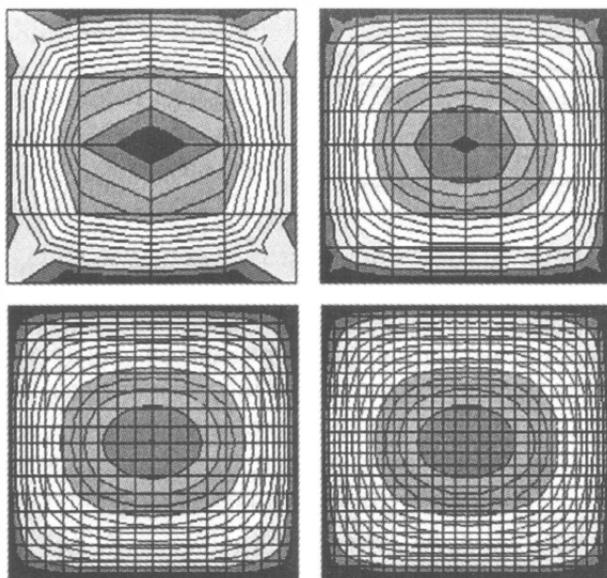
## 4.6. Проверка сходимости для некоторых моделей

Ниже представлены сопоставительные расчеты шарнирно опертой квадратной пластинки, нагруженной по всей площади равномерно распределенной нагрузкой.

Расчеты выполнялись при четырех сетках конечных элементов —  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  и  $24 \times 24$ . Строились изолинии всех результатов расчетного анализа (рис. 4.4), и с их помощью оценивалась общая картина напряженно-деформированного состояния.

Исследовалось изменение прогибов, моментов и поперечных сил по всему полю пластины и в точках, где реализуются их экстремальные значения. Последнее замечание весьма существенно, поскольку для поперечных сил, например, где сходимость не гарантируется (см. таблицу 4.1), именно экстремальные значения являются сомнительными. В целом же по полю пластины результаты конечноэлементного анализа ведут себя гораздо лучше.

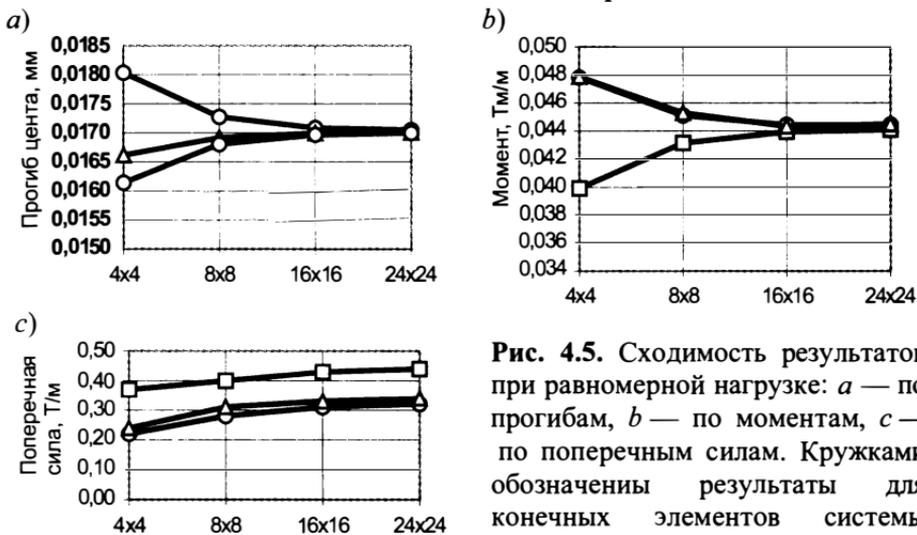
На рис. 4.5 приведены результаты по перемещениям, изгибающим моментам и поперечным силам для конечных элементов различного типа, полученные на упомянутых сетках.



**Рис. 4.4.** Изополя изгибающих моментов для расчетных схем с различными сетками конечных элементов

Как видно из рис. 4.5, практическая сходимость имеет место для прогибов и изгибающих моментов при использовании конечных

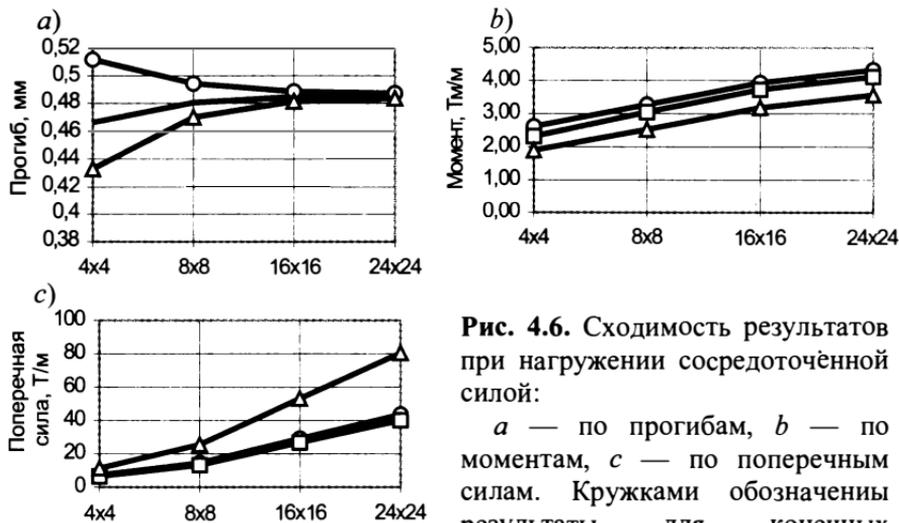
элементов различного типа, а для поперечных сил один из элементов дает значения, заметно отличающиеся от величин, полученных с использованием других конечных элементов. Отметим, что этот элемент (четыреугольный элемент, допускающий от 4 до 8 узлов) был использован в схеме, где он присоединялся только к четырем узлам, хотя имеется возможность ввести узлы на его сторонах. Контрольные расчеты при такой схеме использования показали, что при этом точность результатов существенно возрастает, и они приближаются к данным, получаемым на сетках вдвое большей густоты. Например, для сетки элементов  $8 \times 8$  прогиб равнялся 0,01701, изгибающий момент — 0,0442 и поперечная сила — 0,278.



**Рис. 4.5.** Сходимость результатов при равномерной нагрузке: *a* — по прогибам, *b* — по моментам, *c* — по поперечным силам. Кружками обозначены результаты для конечных элементов системы SCAD типа 11 или 41; квадратами — типа 20 или 50; треугольниками — типа 12 или 42

В другой серии численных экспериментов, когда та же пластинка была загружена сосредоточенной силой, результаты, представленные на рис. 4.6, оказываются менее оптимистичными. Здесь замедляется скорость практической сходимости по моментам, и еще более существенно — по поперечным силам, значения которых взяты в точке, расположенной на расстоянии четверти толщины от центра пластинки. По-видимому, для поперечных сил вообще не следует брать во внимание значения для точек, столь близко расположенных около места приложения сосредоточенной нагрузки.

В заключение этого раздела заметим, что практическая сходимость, проверяемая чисто экспериментально в серии однотипных расчетов, не всегда коррелирует с теоретической сходимостью (посмотрите результаты по поперечным силам!).



**Рис. 4.6.** Сходимость результатов при нагружении сосредоточенной силой:

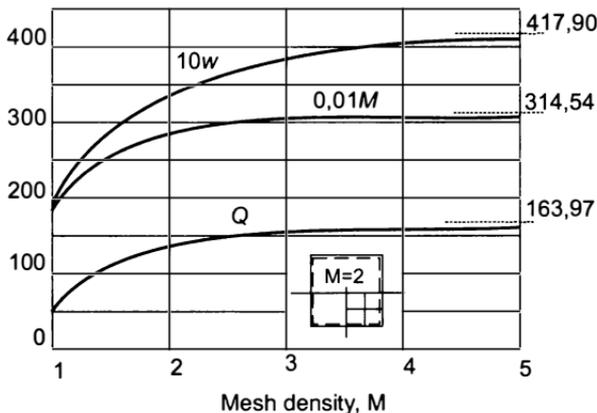
*a* — по прогибам, *b* — по моментам, *c* — по поперечным силам. Кругами обозначены результаты для конечных элементов системы SCAD типа 11 или 41; квадратами — типа 20 или 50; треугольниками — типа 12 или 42.

Это связано с тем, что рассматривается вполне определенная задача, где могут не проявляться те неприятные особенности искомого поля перемещений, которые не позволяют гарантировать сходимость в общем случае. Здесь уместна довольно большая цитата [Блехман и др., 1983]:

*«Интересная проблема возникает в связи с вопросом о полноте системы координатных функций в методах типа Галеркина. Вспомним о том, что даже если мы исходим из полной системы функций, мы реально выбираем из этой системы лишь небольшое число функций. С другой стороны, легко проверить, что любую конечную систему функций можно считать частью некоторой полной системы. Однако, это отнюдь не означает, что с точки зрения полноты конечные системы функций, которые мы выбираем в качестве координатных, ничем не различаются. Выбираемая система должна обладать свойством **практической полноты относительно решаемой задачи** (выделено нами — А.П. и В.С.), т.е. должна быть уверенность (или хотя бы надежда), что такое решение можно с приемлемой точностью аппроксимировать ...».*

Более детально этот вопрос анализируется в следующих разделах, а здесь отметим лишь, что, к сожалению, большинство публикаций стыдливо умалчивает о поведении решения относительно

поперечных сил. Достаточно типичной в этом смысле является монография [Сахаров и др., 1982], специально построенных элементов, учитывающих деформации поперечного сдвига дает удовлетворительные результаты по поперечным силам. На рис. 4.7 это проиллюстрировано графически (пунктиром указаны точные значения).



**Рис. 4.7.** Сходимость результатов при учете сдвига в пластине. Обозначения кривых соответствуют рис. 4.5 и 4.6.

Следует отметить, что более быстрая сходимость результатов для некоторых типов конечных элементов дается за счет заметного увеличения времени счета. Поэтому следует сопоставлять потери времени от использования этих элементов с потерями на решение задачи на более густой сетке при использовании элементов другого типа. Естественно, что в относительно малых задачах, где общее время решения невелико, все эти сопоставления могут не иметь никакого смысла.

## 4.7. Экстраполяция Ричардсона

Если выполнены расчеты на двух геометрически подобных сетках различной густоты, то на основании оценок типа (4.7) и (4.8), можно построить выражение, позволяющее получить прогнозное решение. точность которого превышает точность решения более детальной задачи. В основе такого прогноза лежит известная в математике экстраполяция по Ричардсону [Марчук, Шайдулов, 1979]. Не вдаваясь в математические аспекты обоснования ричардсоновской экстраполяции, коснемся кратко ее основной идеи.

Пусть, например, известно решение  $X_{2h}$ , определенное на сетке конечных элементов с характерным размером  $2h$  и решение  $X_h$ , найденное на сетке размером  $h$ , которая получена из предыдущей сетки дроблением сторон элементов пополам. Будем считать, что форма области в этих задачах одинакова, а геометрия сетки конечных элементов подобна, так что конечные элементы в этих задачах различаются лишь масштабом, но не формой. Предположим, что последовательность решений на сгущающихся на каждом шаге вдвое сетках  $\{X_{2h}, X_h, X_{h/2}, \dots\}$  монотонна и сходится к точному решению  $X_*$  (для определенности примем, что имеет место сходимости снизу, так что  $X_* > X_h$  при любом  $h$ ). Тогда можно считать, что имеет место оценка точности приближенного решения

$$X_* - X_h = C_1 h^\alpha + C_2 h^{\alpha+1} + C_3 h^{\alpha+2} + \dots, \quad (4.9)$$

при произвольном характерном размере сетки  $h$ . Здесь предполагается, что погрешность приближенного решения  $X_h$  представима в виде степенного ряда с главным членом, имеющим порядок  $h^\alpha$ .

Поскольку принято, что разложение (4.9) справедливо при произвольном диаметре сетки  $h$ , то можно, в частности, выписать аналогичную оценку для удвоенной сетки, положив в (4.9)  $2h$  взамен  $h$

$$X_* - X_{2h} = 2^\alpha C_1 h^\alpha + 2^{\alpha+1} C_2 h^{\alpha+1} + 2^{\alpha+2} C_3 h^{\alpha+2} + \dots \quad (4.10)$$

Идея Ричардсона заключается в том, чтобы из двух приближенных (сеточных) решений с помощью линейных комбинаций попытаться сконструировать еще одно решение (обозначим это решение  $X_R$ ), которое по порядку было бы точнее каждого из двух исходных решений. Иначе говоря, положим

$$X_R = a_1 X_h + a_2 X_{2h} \quad (4.11)$$

с неизвестными пока коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ .

Если домножить (4.9) на  $2^\alpha$  и вычесть из полученного (4.10), то главный член в разложении погрешности решения в степенной ряд сократится. В результате придем к следующей оценке

$$X_* - (2^\alpha X_h - X_{2h}) / (2^\alpha - 1) = - (C_2 h^{\alpha+1} + 3C_3 h^{\alpha+2} + \dots) 2^\alpha / (2^\alpha - 1). \quad (4.12)$$

Теперь понятно, что, положив  $a_1 = 2^\alpha / (2^\alpha - 1)$  и  $a_2 = -1 / (2^\alpha - 1)$ , будем иметь для экстраполированного по Ричардсону решения оценку погрешности по порядку, по крайней мере, на единицу более высокую, чем оценка погрешности решения по (4.9). Таким образом,

главным членом в разложении погрешности экстраполированного решения становится член порядка  $h^{\alpha+1}$

$$X_* - X_R = - (C_2 h^{\alpha+1} + 3C_3 h^{\alpha+2} + \dots) 2^\alpha / (2^\alpha - 1). \quad (4.13)$$

Можно построить экстраполяцию на основании информации, полученной на последовательности трех сеточных решений, скажем,  $X_{2h}$ ,  $X_h$  и  $X_{h/2}$  с диаметрами сеток соответственно  $2h$ ,  $h$  и  $h/2$ . Действительно, применяя (4.12) к паре сеток  $h$  и  $h/2$ , получим аналогично

$$X_* - (2^\alpha X_{h/2} - X_h) / (2^\alpha - 1) = - (C_2 h^{\alpha+1}/2 + 3C_3 h^{\alpha+2}/4 + \dots) / (2^\alpha - 1). \quad (4.14)$$

Домножив теперь (4.14) на  $2^{\alpha+1}$  и вычитая из полученного (4.12), приходим к оценке

$$\begin{aligned} (2^{\alpha+1} - 1)X_* - (2^{2\alpha+1} X_{h/2} - 2^\alpha 3X_h + X_{2h}) / (2^\alpha - 1) = \\ = (3C_3 h^{\alpha+2} + \dots) 2^{\alpha-1} / (2^\alpha - 1), \end{aligned} \quad (4.15)$$

откуда видно, что для экстраполяции Ричардсона по трем последовательным решениям следует положить

$$X_R = (2^\alpha X_{h/2} - 2^\alpha 3X_h + 2X_{2h}) / [(2^\alpha - 1)(2^{\alpha+1} - 1)]. \quad (4.16)$$

Основное препятствие в проведении экстраполяции на практике заключается в том, что, как правило, порядок  $\alpha$  в оценке (4.9) заранее не известен, в особенности, если речь идет о таких величинах, как значения усилий (напряжений) в отдельных точках конструкции.

Однако, если известны решения на трех последовательных сетках, то интересующий нас параметр  $2^\alpha$  можно найти, вычитая из (4.12) равенство (4.14). В результате несложных преобразований получим

$$2^\alpha = (X_h - X_{2h}) / (X_{h/2} - X_h) - (2 + 2^\alpha) C_2 h^{\alpha+1} / 2^{2\alpha+1} - \dots \quad (4.17)$$

и, пренебрегая остаточным членом в (4.17), можно приближенно считать, что

$$2^\alpha \approx (X_h - X_{2h}) / (X_{h/2} - X_h). \quad (4.18)$$

Несложно заметить, что в случае сходимости снизу ( $X_h < X_*$  при любом значении  $h$ ) остаточный член в (4.17) отрицателен, и приближение к  $2^\alpha$  по формуле (4.18) дается с недостатком, в противном случае — с избытком.

Для суждения о возможностях такой экстраполяции приведем пример расчета защемленной по контуру квадратной железобетонной плиты, схема которой представлена на рис. 4.8.

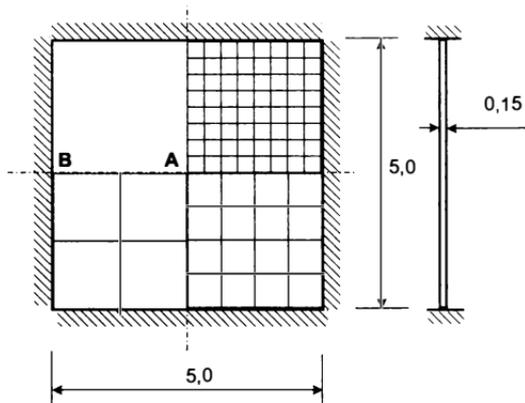


Рис. 4.8. Схема к примеру расчета

Модуль упругости  $E = 880 \text{ кН/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ . Плита нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q = 50 \text{ кН/м}^2$ . Результаты расчета при использовании сеток трех размеров представлены в таблице 4.2. В последнем столбце таблицы 4.2 приведены экстраполированные по Ричардсону значения искомых функций, причем вычисления осуществлялись по формулам (4.18) и (4.16). Для сравнения, в этой же таблице даны точные значения этих же величин, подсчитанные по формулам из работы [Тимошенко, Войновский-Кригер, 1963].

Таблица 4.2.

Результат расчета	Сетка 4×4	Сетка 8×8	Сетка 16×16	Точное реше- ние	$X_R$ по (4.16)
Прогиб в точке А, [мм]	17,25	16,34	16,07	16,00	15,96
Момент в точке А, [тм/м]	26,46	23,41	22,69	22,01	22,47
Момент в точке В, [тм/м]	59,20	63,72	64,95	64,43	65,43
Перерезывающая сила в точке В, [т/м]	66,63	88,60	100,12	111,61	112,83

Наиболее интересно применение экстраполяции Ричардсона к значениям поперечных сил, которые в расчетах имели наибольшие погрешности. Исходя из решений, полученных на последовательности сеток 4×4, 8×8 и 16×16, найдено значение поперечной силы 112,83, ошибка которого составила 1,1% вместо ошибки 10,3% для решения на сетке 16×16. Как видно из приведенных здесь данных, экстраполяция Ричардсона существенно уменьшает ошибку приближенного численного решения.

Экстраполяционная техника обсуждалась много раз и проверялась численно [Стренг, Фикс, 1977], однако опыт ее практического применения относительно невелик. По-видимому, дело состоит в том, что подавляющее большинство коммерческих расчетно-вычислительных комплексов не имеют возможности выполнить операцию (4.11) или (4.16), которая должна быть специально подготовленной за счет доопределения значений  $X_{(2h)}$  в узлах более густой сетки. Тогда экстраполяция по Ричардсону получается достаточно легко. Конечно, можно провести вычисления по формулам (4.11) или (4.16) вручную, выборочно оценивая лишь наиболее значимые результаты, но трудно найти расчетчика, который пошел бы на такой шаг.

И все же, несмотря на трудности программной реализации, нам представляется весьма вероятным (и перспективным!) рост интереса разработчиков промышленных программных продуктов к экстраполяционной процедуре уточнения конечноэлементного решения. Это — одно из немногих, оставшихся практически нетронутыми, мест программной реализации, от которых стоит ожидать прорывных решений. Сказанное тем более справедливо, что теоретические исследования последнего десятилетия по проблемам экстраполяции опережая работу производителей программных комплексов, позволяют надеяться на получение весьма важных для практики двусторонних оценок в сеточных методах, и в частности, в методе конечных элементов [Шварцман, 1992].

Необходимо заметить, что экстраполяция Ричардсона может быть обоснована лишь тогда, когда при дроблении сетки форма элементов не меняется. Если же это не так, то можно столкнуться с тем, что при уменьшении сетки монотонная сходимости отсутствует, что иллюстрируется заимствованным из [Сахаров и др., 1982] результатом решения задачи Кирша о растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Решение найдено на сетках, построенных при различном количестве элементов вдоль радиуса (параметр  $K$ ) и по дуге (параметр  $N$ ). На рис. 4.9 показано, что при фиксированном  $K$  и меняющемся  $N$  погрешность  $\varepsilon$  ведет себя немонотонно. Это связано с изменением соотношения сторон конечного элемента.

С указанным явлением можно встретиться почти во всех случаях, когда сетка конечных элементов строится на основе полярной системы координат. Тогда дробление сетки по углу раскрытия может привести к тому, что появятся элементы «игольчатой» формы, и к борьбе двух тенденций — уточнение решения за счет измельчения

сетки и падение точности за счет вырождения формы элементов. Результат такой борьбы непредсказуем.

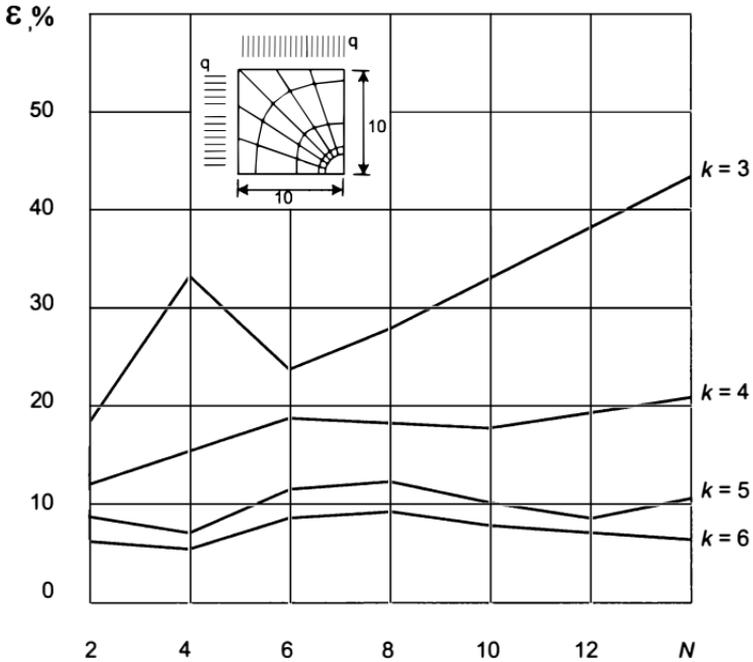


Рис. 4.9. Погрешности решения задачи Кирша

## 4.8. Обход особых точек

Вблизи особых точек — таких, где имеется резкая концентрация напряжений — применение конечных элементов (равно как и других методов дискретизации) обычно затруднено, особенно в представлении поля напряжений. Приходится резко сгущать сетку конечных элементов и существенно увеличивать размер задачи.

Однако упомянутое сгущение сетки может и не привести к результату, что подталкивает к дополнительному анализу ситуации. Одним из наиболее распространенных суждений является следующее: сосредоточенная сила есть не существующая в природе абстракция, и если бы она была создана, то, проткнув бы конструкцию любой прочности и не встречая сопротивления, унеслась бы в бесконечность. Выходит, что эта идеализация создает искусственную трудность, в борьбе с которой можно совершать героические подвиги, но практическая значимость таких подвигов весьма относительна. Следовало бы помнить о том, каким образом

фактически реализована в конструкции та сила, которая идеализируется в форме сосредоточенной; тогда могут отпасть и вопросы о сходимости конечноэлементного решения к точному.

Мы рассмотрим указанную проблему на примере расчета плиты на упругом основании, к которой приложена сосредоточенная сила. Этот пример является часто используемой идеализацией при расчете фундаментных плит (сосредоточенной силой имитируется нагрузка, передаваемая колонной), аэродромных и дорожных покрытий (здесь сосредоточенная сила имитирует давление колеса) и в других практически важных случаях.

Кроме замены сосредоточенной силы распределенной нагрузкой, действующей на малой площадке, предлагались и такие альтернативы:

- использование точного решения для сосредоточенной нагрузки, но действующей в бесконечном теле с передачей перемещений границы фрагмента в модель МКЭ;
- комбинирование двумерной идеализации объекта с уточнениями следующими из расчета в трех измерениях.

Представляется более практичной вторая схема расчета, поскольку ее реализация не требует того, чтобы в программной системе были известны точные решения для сосредоточенной нагрузки для бесконечных тел. Покажем, как это делается на достаточно простом примере шарнирно опертой по контуру круглой пластинки радиуса  $a$  с цилиндрической жесткостью  $D = (Eh^3/12)/(1-\nu^2)$ , нагруженной в центре сосредоточенной силой  $P$ . Для этой задачи имеется точное решение, основанное на обычных гипотезах теории пластин, которое выражается следующими формулами для прогибов  $w$ , радиальных моментов  $M_r$  и поперечных сил  $Q_r$ .

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} (1-\rho^2) + 2\rho^2 \ln \rho \right], \quad (4.19)$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi} (1+\nu) \ln \rho, \quad (4.20)$$

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi a \rho}. \quad (4.21)$$

Поскольку  $\rho^2 \ln \rho \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ , то решение для прогибов не имеет особенностей в центре, где относительный радиус  $\rho = r/a$  равен нулю, тогда как решение для моментов имеет

логарифмическую особенность. При подходе к этой точке значение момента и поперечной силы устремляются к бесконечности (рис. 4.10), что свидетельствует о недостаточной корректности расчетной модели.

Выделим из конструкции фрагмент, границы которого определяются относительным радиусом  $\rho = 0,2$ . Как видно из рис. 4.10, резкий рост внутренних усилий начинается в районе значений  $\rho \leq 0,05$ , таким образом, выбор размера фрагмента осуществлен за границей интервала, справедливость решения в котором проверяется.

Расчет фрагмента выполнен для модели в виде пространственной задачи теории упругости, схема которой представлена на рис. 4.11, на действие реакций от отброшенной части пластины.

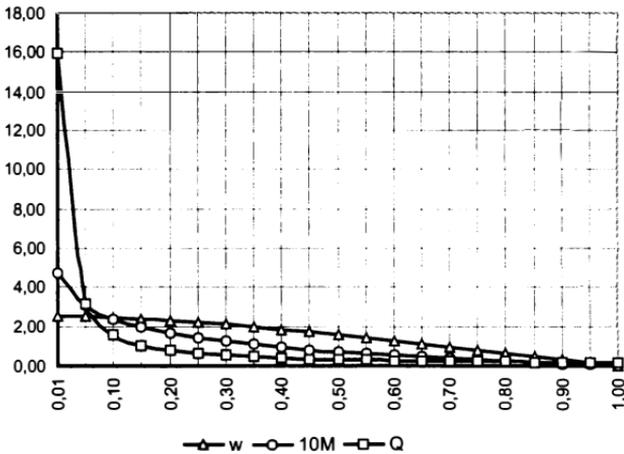


Рис. 4.10. Перемещения и усилия в круглой пластинке, нагруженной в центре сосредоточенной силой

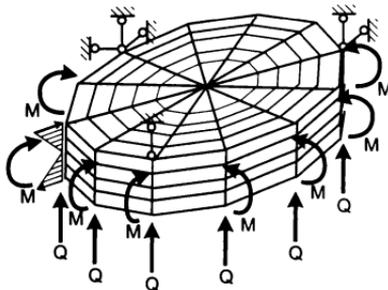
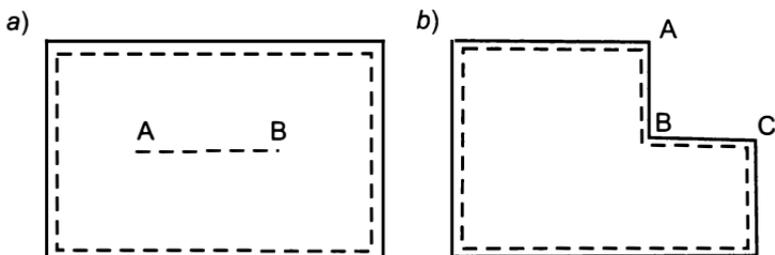


Рис. 4.11. Расчетная схема фрагмента

Эти реакции, приложенные к контуру фрагмента, образуют равновесную систему сил. При расчете на фрагмент были наложены связи, препятствовавшие его перемещениям как твердого тела, но не вносящие статическую неопределимость в опирание. Реакции в этих связях практически равнялись нулю, что служило проверкой точности задания нагрузок, действующих на фрагмент.

Необходимо отметить, что сосредоточенная сила не является единственным типом особенностей, с которым приходится встречаться в практических расчетах. Идеализация опирания плиты на стену в форме введения связей на перемещения узлов для тех случаев, когда такое опирание заканчивается не на краю плиты (рис. 4.12, *a*), также связано с появлением особой точки. Здесь к бесконечности устремляются значения реакций связей на концах полосы опирания, и по сути, можно говорить о том, что плита подвергнута нагружению через полосовой абсолютно жесткий штамп, с помощью которого передается реакция по линии АВ.

Аналогичная картина наблюдается в окрестности входящего угла опертой по контуру L-образной плиты (рис. 4.12, *b*). В обоих случаях происхождение особенности аналогично — полосовая связь вдоль линии АВ (аналогично и вдоль линии СВ на рис. 4.12, *b*) вдруг обрывается, и плита, не имевшая возможности деформироваться вдоль указанных линий, резко включается в работу на продолжении этих линий. Таким образом, кривизна по направлению «оборванной» связи терпит разрыв, что и служит причиной появления особенности.



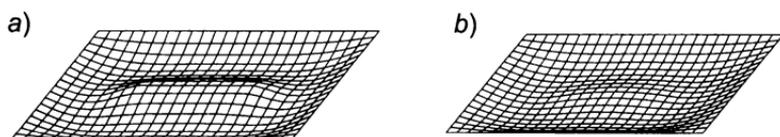
**Рис. 4.12.** Особенности при прерывании опирания вдоль линии

Реакции, вычисляемые в точках А и В, увеличиваются по мере дробления сетки, как это всегда происходит в точке с особенностью. Для обхода этой неприятности можно перестроить расчетную модель двумя способами:

- выделить фрагмент и построить внутри него другую расчетную схему, например схему пространственной задачи теории упругости, как это было сделано в задаче о сосредоточенной силе;

- представить более реалистичной моделью роль той стены, на которую опирается плита, учтя, например, ее податливость (сжимаемость) в вертикальном направлении.

Результаты расчета для задачи по схеме рис. 4.12, *a*, в которой податливость стены по линии опирания АВ учтена введением реальных упругих связей, представлены на рис. 4.13. Из этого рисунка видно, что в реальной модели исчезает излом в точках А и В. Поскольку в области рассматриваемой особенности возникают значительные поперечные силы (формально, стремящиеся к бесконечности), а изгибающие моменты относительно малы, то можно ожидать, что изменение кривизны будет происходить за счет деформаций сдвига. Это подталкивает к использованию модели Рейсснера для изгибаемых плит вместо модели Кирхгофа, несмотря на то, что плита является тонкой.



**Рис. 4.13.** Перемещения в конечноэлементной модели для задачи по рис. 4.12, *a*: *a* — при идеальном опирании; *b* — при опирании на упругие опоры.

Возможно и применение локального моделирования пространственными конечными элементами; результат такого моделирования представлен на рис. 4.14, где показана эпюра реакций вдоль линии АВ (от оси симметрии до обрыва линии опирания), вычисленная по модели пространственной задачи теории упругости (сплошная линия) и модели тонкой плиты (пунктир).

Применительно к особым точкам на границах зоны контакта аналогичная проблема рассматривалась в замечательной книге [Феодосьев, 1966], где подробно анализировалась проблема возникновения сосредоточенной реакции  $P$  при изгибе стержней, опирающихся на бесконечно жесткое основание (см. задачу 56, стр.128–134).

Из сказанного можно было бы сделать вывод, что существование сложных ситуаций с сингулярными решениями, происхождение которых связано с существом решаемой задачи, ориентирует на предупреждение или обход таких ситуаций, или же на применение каких то «сверхтонких» методов решения.



**Рис. 4.14.** Эпюра реакций вдоль линии АВ

Но разработчику программного обеспечения следует помнить, что в огромном числе случаев «сверхтонкости» рождаются для преодоления патологий, которые принципиально возможны, и только. Поэтому имеет полное право на существование пренебрежение некоторыми тонкостями, но при обязательном условии, что пользователь будет об этом предупрежден или, что безусловно лучше, ему будут даны рекомендации по недопущению таких патологий (например, сказано, что сосредоточенную нагрузку следует представлять в виде распределенной на некотором малом пятне, а результатом расчета является момент на границе такого пятна).

## 4.9. Генерация конечноэлементной сетки

Современный персональный компьютер позволяет решать задачи с числом узлов, измеряемым тысячами и десятками тысяч. Естественно, что в таких условиях невозможно себе представить «ручное» составление конечноэлементной сетки, и большинство современных программных средств обладает теми или иными автоматическими сеточными генераторами. При этом качество таких генераторов определяется списком реализованных функциональных возможностей, которые в таких, например, мощных вычислительных системах, как ANSYS исчисляются десятками. К ним, например, относится автоматическая сшивка уже построенных сеток на сопрягаемых поверхностях, создание объемной трехмерной сетки по имеющейся поверхностной, перестройка сетки в соответствии с полученными результатами расчета и многие другие.

Удобство применения треугольников в качестве элементарных областей, занимаемых отдельными конечными элементами, определяется тем, что с их помощью легко описывать границы тел достаточно сложной формы. Кроме того, треугольная сетка полезна при сгущении элементов в той части расчетной области, где предполагаются высокие градиенты напряженного состояния конструкции, например, в местах концентрации напряжений у вырезов, входящих углов и т.п. Треугольники хорошо приспособлены для автоматического построения сетки конечных элементов, причем большинство известных генераторов сеток, включенных в развитые программные комплексы, основаны на триангуляции области. Именно эти преимущества треугольных конечных элементов и обуславливают их широкое использование в программных комплексах.

Для треугольных элементов разработан эффективный аппарат представления функций формы элемента в барицентрических координатах, позволяющий за счет простых формул точного интегрирования полиномов по треугольной области легко получать аналитические выражения для компонент матрицы жесткости элемента [Репан, 1974]. Однако, при построении вектора приведенных к узлам нагрузок возникают определенные сложности, поскольку преимущества барицентрической системы координат реализуются лишь при интегрировании по всей области  $\Delta$ , занимаемой конечным элементом, а большинство нагрузок, действующих на конструкцию, определены на некоторых площадках нагружения, не связанных непосредственно с конечноэлементной сеткой.

Возникает необходимость интегрирования по области  $\Omega$ , являющейся пересечением треугольника  $\Delta$  и площадки нагружения  $\Psi$  (рис. 4.15), и, если  $\Delta \neq \Psi$ , то барицентрические координаты не дают никаких преимуществ.

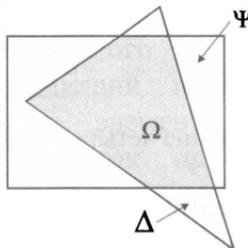


Рис. 4.15. Не полностью нагруженный треугольный элемент.

Именно поэтому в большинстве программ предполагается, что пятно нагружения целиком покрывает треугольный конечный элемент, т. е.  $\Delta = \Psi$ , или принимается какой-нибудь приближенный (часто достаточно грубый) способ приведения нагрузок к узлам треугольной сетки.

Специальный алгоритм, позволяющий формировать компоненты грузового вектора на основе независимой информации о нагрузке и размещении конечного элемента детально описан в работе [Галасова, Сливкер, 1988].

Этот алгоритм дает точное решение задачи для интегралов вида

$$F_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} x^{\alpha} y^{\beta} dx dy \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n; \beta = 0, 1, \dots, m), \quad (4.22)$$

участвующих в вычислениях компонент грузового вектора.

Следует, однако, обратить внимание на то, что имеется определенная тенденция избегать применения треугольных и пирамидальных элементов, поскольку они обычно дают несколько менее точное решение по сравнению с прямоугольными и гексаэдральными элементами. В связи с этим, уже упоминавшийся сеточный генератор ANSYS имеет возможность создания упорядоченных или структурированных сеток из объемных гексаэдров («кирпичей») и построения нерегулярных сеток из четырехугольных элементов на произвольных поверхностях. При этом проблемы, связанные с укрупнением/измельчением сетки в различных частях расчетной области, где традиционно считается, что необходимо применять треугольные элементы, могут быть решены приемами, представленными на рис. 4.16.

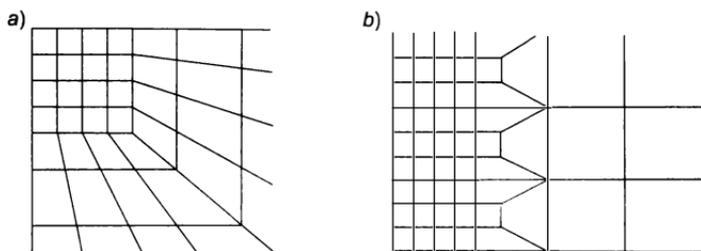
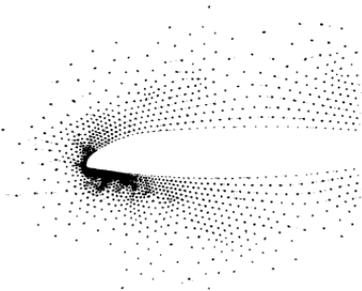


Рис. 4.16. Сгущение четырехугольных элементов

Что касается аппроксимации сложной границы, то здесь полностью обойтись без треугольных элементов, как правило, не удастся. Функция объединения треугольных конечных элементов в четырехугольники во всех местах, где это можно сделать, предусматривается и системой SCAD.

В любом случае, для треугольных или четырехугольных элементов полезно иметь в программе возможность автоматического построения грузовых векторов при независимо задаваемой информации о сеточном разбиении области и о пятнах нагружения. Пользователь оценит также возможность задания переменной интенсивности нагрузки по пятну нагружения, хотя бы по линейному закону.

Важным свойством конечноэлементной сетки является ее гладкость (постепенное изменение размеров элементов), поскольку резкое изменение характерных размеров элемента вносит чувствительное возмущение в картину напряженно-деформированного состояния. Особенно это заметно при рассмотрении напряжений, представленных линиями уровня. В хороших сеточных генераторах имеются возможности управления сгущением (к точке, к линии, к центру или периметру области и др.), которые позволяют выдержать заранее заданную степень гладкости разбиения. Пример плавного изменения сетки, заимствованный из работы Шевчука [Shewchuk, 1997], представлен на рис. 4.17.

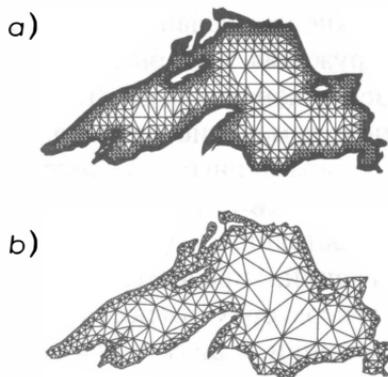


**Рис. 4.17.** Укрупнение сетки по направлению от внутреннего контура

Густота разбиения сетки в автоматических генераторах управляется такими параметрами, как задаваемое максимальное расстояние между узлами и допускаемый минимальный угол в вершине треугольника. Влияние последнего параметра видно из рис. 4.18, заимствованного из того же источника. Кроме этого, применяется такой управляющий параметр, как коэффициент прироста длины стороны элемента, а также алгоритмы автоматического сгущения сеток при локальном увеличении кривизны контура.

Если же в используемой программе отсутствует возможность сглаживания, то, выполняя его вручную, следует придерживаться следующего эмпирического правила — по возможности, не стоит увеличивать шаг сетки более чем вдвое на одном «фронте» сгущения,

а сами эти «фронты» не стоит располагать чаще, чем через 2–3 ряда элементов. При этом следует обращать внимание на реализацию условий симметрии и регулярности.



**Рис. 4.18.** Автоматическая триангуляция области:  
*a* — минимальный угол  $15^\circ$ ;      *b* — минимальный угол  $25^\circ$ .

Иногда эффективной может стать концепция типовых структурных элементов [Хряков, 1986], каждый из которых реализует разбивку некоторой канонической области на конечные элементы с использованием одного или нескольких параметров, определяющих форму элементов и густоту сетки.

#### 4.10. О применении гибридных конечных элементов

Многие авторы настаивают на преимуществах так называемых гибридных моделей метода конечных элементов, где поле перемещений определено только на границах элементов, а все прочие характеристики находятся, исходя из предполагаемого распределения напряжений. При этом используется принцип минимума дополнительной энергии (принципа Кастильяно) или условия стационарности смешанного функционала типа Рейсснера.

Известно несколько вариантов такого рода элементов, в частности, они применены при разработке программного комплекса **MicroFE** [Semenov V., Semenov P., 1998]. Модификация гибридного метода, применяемого в **MicroFE**, воспроизводит идеи, восходящие к создателям этого метода Пиану и Тонгу [Pian, Tong, 1969], которым этот метод обязан и своим происхождением и самим названием. На практике это означает, что отступления от классического варианта метода конечных элементов касаются только построения свойств

отдельных конечных элементов (матриц жесткости и грузовых векторов), что же касается решения дискретизованной задачи, то здесь этот вариант гибридного метода вновь возвращается к уже испытанному методу перемещений. Заметим, что, к сожалению, в общем случае теоретическое обоснование сходимости для этих элементов представляет собой трудноразрешимую задачу, хотя для отдельных классов задач такое обоснование получено. Надо отдать должное этим элементам, в том смысле, что во многих численных экспериментах гибридные конечные элементы действительно демонстрируют прекрасные результаты, в особенности на умеренных по размерам сетках. Однако, утверждение о том, что гибридные элементы в любых ситуациях превосходят классические конечные элементы, построенные на аппроксимациях полей перемещений, не только сильно, но и неверно. Не так уж сложно построить контрпримеры, в которых классические конечные элементы переигрывают свои гибридные аналоги.

Есть и еще одно обстоятельство, вследствие которого гибридные элементы могут считаться скорее суррогатом, чем полноценным заменителем классических элементов. Дело в том, что в задачах о спектре (скажем, в частотном анализе конструкций) классические совместные конечные элементы гарантируют знак ошибки, что является чрезвычайно важным для расчетов фактором (см. раздел 1.6 о мажорантных и минорантных моделях). Гибридные же конечные элементы не обеспечивают односторонней сходимости в этих задачах.

Если говорить о пользовательском интересе, то с учетом всего сказанного выше наиболее предпочтительным для программы промышленного применения представляется вариант наполнения библиотеки конечных элементов как классическими конечными элементами, так и различными вариантами гибридных элементов (и не только ими!). Навязывание пользователю исключительно гибридных элементов — это то же самое, что попытка ограничить рацион питания одной икрой. К чему это приводит, знает всякий, кто хоть раз видел знаменитый вестерн с Луспекаевым<sup>8</sup>.

Авторы работы [Semenov V., Semenov P., 1998] как на основное преимущество своей разработки, указывают на возможность уточнения поля напряжений даже при весьма грубых сеточных моделях, а также на успешное преодоление проблемы «сдвигового

---

<sup>8</sup> При чтении первого издания этой книги Ю.Б.Гольдштейн остроумно заметил, что с учетом географии действия следовало бы говорить не о *вестерне*, а об *остерне* (там покорение дикого запада, а тут — восток, т. е. "дело тонкое").

запирания». «Заедание», «сдвиговое запирание», «эффект ложного сдвига» [Сахаров и др., 1982] — это различные наименования явления, при котором элемент изгибаемой пластины Рейсснера с интегрированием по толщине не воспроизводит решение Кирхгофа, ожидаемое при уменьшении толщины пластинки. Элементы плиты Рейсснера с малым отношением толщины к длине оказываются чрезмерно жесткими при использовании их для описания чистого изгиба<sup>9</sup>. Это связано с тем, что возможная сдвиговая форма деформирования (рис. 4.19, а) в той или иной степени подменяет действительную форму деформирования при чистом изгибе (рис. 4.19, б). Сама сдвиговая форма связана с точным выполнением условий совместности деформаций внутри конечного элемента, которые не соответствуют кирхгофовой гипотезе прямых нормалей.

Для ликвидации эффекта ложного сдвига применяют искусственные приемы снижения точности численного интегрирования, которые по сути уменьшают число степеней свободы для напряжений. Здесь, однако, необходима высокая осторожность, поскольку чрезмерное смягчение условий в напряжениях может привести к вырождению матрицы жесткости.

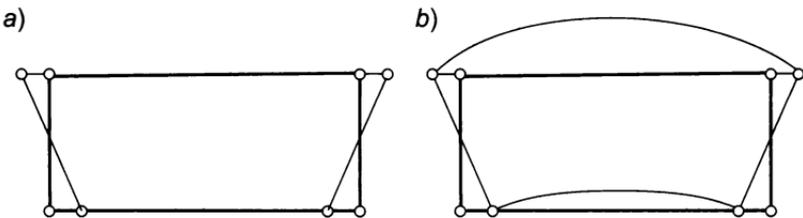


Рис. 4.19. К объяснению эффекта ложного сдвига

Надо сказать, что эффект ложного сдвига возрастает вместе с понижением относительной толщины плиты и, таким образом, проявляется в особенностях метода конечных элементов, связанных с возможным вырождением в постановках задач и приводящих к так называемым *вырождающимся* задачам. Не имея возможности останавливаться здесь на обсуждении этой темы, отошлем заинтересованного читателя к некоторым публикациям учеников школы Л.А.Розина [Болдычев, 1985], [Баенхаев, 1985], [Болдычев, 1979]. В этих работах, в частности, установлено, что для вырождающихся задач применение гибридного метода действительно

<sup>9</sup> Иногда теорию изгиба пластин средней толщины, в которой учитывается работа деформаций сдвига и, в некоторых вариантах, работа нормальных напряжений  $\sigma_{zz}$  в сечениях, параллельных срединной поверхности пластины, называют теорией Тимошенко—Миндлина [Васидзу, 1987].

эффективно. Однако, наряду с гибридным методом, к таким же по точности результатам приводят и другие методы, не выводящие за рамки метода перемещений в смысле процесса дискретизации. В этом отношении отметим *моментную схему метода конечных элементов* (А.С. Сахаров [1982]) и оригинальный *способ двойной аппроксимации* (В.П. Болдычев [1979]). Возможность подавления эффекта ложного сдвига вытекает также и из круга идей, связанных с построением оптимальных аппроксимаций в методе перемещений [Сливкер А., 1987], что продемонстрировано на одномерной задаче об изгибе балки Тимошенко в рамках *метода связанных аппроксимаций* [Сливкер А., 1986]. Результаты отмеченных работ отчетливо свидетельствуют, что для вырождающихся задач возможности дискретизации по методу перемещений не исчерпываются стандартной схемой метода конечных элементов и ничуть не уступают гибриднему методу.

Многие практические примеры указывают на хорошее качество решений, получаемых с помощью гибридных элементов на относительно грубых сетках [Semenov V., Semenov P., 1998]. Однако разница между точностью решения для усилий довольно быстро сглаживается, что видно, например, из рассмотрения решения задачи, схема которой (рис. 4.20) заимствована из учебника [Александров и др., 1983]. В этой схеме толщина плиты и ребер равна 0.1 м; нагрузка интенсивностью 10 кН/м приложена на линиях вдоль ребер.

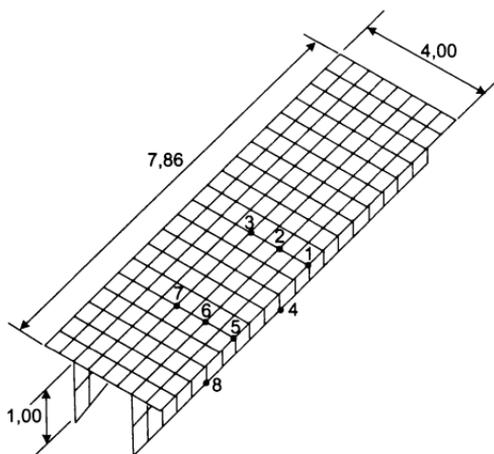


Рис. 4.20. Схема к примеру расчета

В таблице 4.3 представлено сопоставление напряжений для трех решений: найденного суммированием трех членов тригонометрического ряда в [Александров и др., 1983], полученного с использованием гибридных элементов по программе **MicroFe** и

полученного обычным методом конечных элементов по программе SCAD.

Таблица 4.3.

Точка	Напряжения по результатам:		
	работы [Александров и др., 1983]	MicroFe	SCAD
1	471,7	456,6	446,7
2	522,6	550,8	536,2
3	487,9	484,4	469,7
4	2642,9	2633,4	2564,2
5	344,8	344,8	368,4
6	405,5	405,5	436,9
7	359,8	359,8	362,2
8	1959,9	1959,8	2064,5

Как видно из этой таблицы, различия решений не превышают 3–5%, что целиком соответствует необходимой точности. Что касается затрат машинного времени и дисковой памяти, то о них вообще не приходится говорить в силу абсолютной незначительности.

Результаты расчетов квадратной плиты, шарнирно опертой (рис. 4.21, *a*) и защемленной (рис. 4.21, *b*) по контуру, полученные Олманом [1974] с использованием гибридных элементов, и вычисленные с помощью программы, сопоставлены в таблице 4.4 с аналитическим решением, взятым из монографии [Тимошенко, Войновский-Кригер, 1963]. Значения узловых моментов для SCAD приведены после простого осреднения по элементам пластины, примыкающим к рассматриваемому узлу.

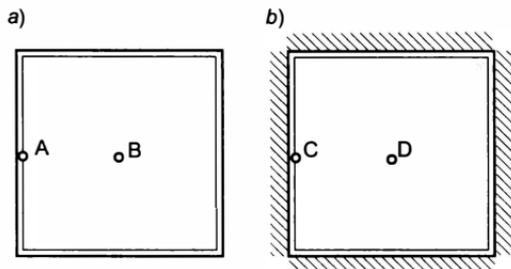


Рис. 4.21. Квадратная пластина: *a* — шарнирно опертая, *b* — защемленная

Из таблицы 4.4 также видно, что продекларированное для гибридных конечных элементов уточнение напряженного состояния довольно быстро перекрывается уже при использовании вполне умеренной сетки конечных элементов.

В заключение этого раздела стоило бы упомянуть о некоторых общих вопросах сопоставления вариантов конечноэлементного метода. В настоящее время, в связи с повсеместным использованием современных персональных компьютеров, обладающих весьма высокой скоростью и громадным ресурсом дисковой памяти, почти несущественным становится такая характеристика реализации МКЭ, как необходимая экономия времени вычислений (особенно с учетом данных, представленных на рис. 2.2). Только для очень больших задач может оказаться существенным объем необходимой дисковой памяти. Поэтому возможность использования очень грубых сеток перестает быть определяющей характеристикой, а на первый план выступают такие качества конечных элементов, как универсальность, математическая обоснованность и доказанная сходимость, возможность более простого выявления и локализации патологических ситуаций и т.п.

Таблица 4.4.

Результат	Сетка	Числовые значения:		
		по [Тимошенко, Войновский- Кригер, 1963]	по [Олман, 1974]	SCAD
$w_B/(pL^4D)$	4×4	0,00406	0,00386	0,00426
	8×8	0,00406	0,00401	0,00411
$w_D/(pL^4D)$	4×4	0,00126	0,00132	0,00136
	8×8	0,00126	0,00128	0,00129
$V_N/pL$	4×4	-0,4200	-0,2850	0,2273
	8×8	-0,4200	-0,3400	0,2344
$M_{B,x}/pL^2$	4×4	0,0479	0,0515	0,0387
	8×8	0,0479	0,0487	0,0468
$M_{B,y}/pL^2$	4×4	0,0479	0,0504	0,0387
	8×8	0,0479	0,0482	0,0348
$M_{C,x}/pL^2$	4×4	-0,0513	-0,0473	0,0456
	8×8	-0,0513	-0,0495	0,0492
$M_{D,x}/pL^2$	4×4	0,0231	0,0314	0,0204
	8×8	0,0231	0,0250	0,0221
$M_{D,y}/pL^2$	4×4	0,0231	0,0316	0,0204
	8×8	0,0231	0,0247	0,0221

В связи с этим, нам представляется, что во многих случаях классический вариант МКЭ вполне конкурентоспособен с гибридными элементами, а попытки настойчивого «продавливания»

гибридных схем в ущерб классическим продиктованы скорее маркетинговыми амбициями разработчиков некоторых программных продуктов нежели стремлением завоевать симпатии потребителя безоговорочно лучшим качеством предлагаемого товара. Еще раз: если уж говорить о нашем призыве к разработчикам, то предоставьте право пользователю самостоятельно сделать выбор в каждом конкретном случае, обеспечив его как стандартной схемой МКЭ, основанной на классическом варианте метода перемещений, так и гибридным вариантом. Надо сказать, что разработчики некоторых программ, например **GTSTRUDL**, именно так и поступают.

## 5. ОШИБКИ И ЛОВУШКИ

*В древние времена каждый человек знал и назначение, и устройство своих орудий: молотка, лука, стрелы. Прогрессирующее разделение труда уменьшило это индивидуальное знание, и в современном промышленном обществе существует отчетливая граница между теми, кто обслуживает устройства (рабочие, техники) или пользуется ими (человек в лифте, у телевизора, за рулем автомашины), и теми, кто знает их конструкцию.*

С. Лем

### 5.1. Фрагментация

Под фрагментацией мы будем понимать выделение из конструкции некоторой ее части в целях последующего включения в расчетную схему только этой выделенной части конструкции, называемой *фрагментом*. Этот прием, в частности, был использован нами выше в разделе 4.8. Теперь мы рассмотрим его с несколько более общей точки зрения. Мы будем анализировать следующую двухэтапную процедуру:

- Пренебрегая локальными особенностями конструктивного решения, строится закругленная расчетная схема полной конструкции в первом приближении, которая дает возможность оценить напряженно-деформированное состояние объекта в целом, и выполняется ее расчет.
- Выделяется фрагмент конструкции, содержащий интересующую нас особенность. К этому фрагменту прикладываются силы, непосредственно приложенные к выделенной части конструкции. Полная граница фрагмента  $\Gamma$  образуется объединением двух частей:  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  — часть границы фрагмента (которая может быть и нулевой), являющаяся одновременно и границей полной расчетной схемы, тогда как  $\Gamma_2$  — часть границы фрагмента,

образуемая при его выделении из полной конструкции и не являющаяся границей полной конструкции.

Краевые условия фрагмента на границе  $\Gamma_1$  наследуют соответствующие краевые условия полной конструкции на той же границе. Что касается краевых условий на  $\Gamma_2$ , то здесь возможны следующие три варианта: постановка статических краевых условий на  $\Gamma_2$ , постановка кинематических краевых условий на  $\Gamma_2$ , постановка смешанных краевых условий на  $\Gamma_2$ .

Если на  $\Gamma_2$  ставятся статические краевые условия, то это означает, что к данной границе фрагмента прикладываются в качестве внешних сил усилия взаимодействия между фрагментом и отброшенной частью полной конструкции — реакции, полученные при отбрасывании остальной части конструкции. Если на  $\Gamma_2$  ставятся кинематические краевые условия, то эта граница полностью закрепляется от всех смещений, а внешние воздействия на фрагмент пополняются заданными на  $\Gamma_2$  перемещениями, величины которых определены ранее из расчета заглубленной расчетной схемы. При смешанных краевых условиях вдоль границы фрагмента  $\Gamma_2$  прикладываются частично силовые, частично — кинематические внешние воздействия.<sup>1</sup>

Далее фрагмент рассчитывается с использованием более детальной расчетной схемы, и из полученного таким образом решения используется та часть, которая относится к точкам, расположенным на некотором удалении от границ фрагмента.

Такой подход согласуется с практикой выбора серии расчетных схем для анализа различных особенностей поведения конструкции, но он требует определенной интуиции и опыта для исключения опасности, связанной с наличием неустранимой погрешности решения заглубленной задачи. Представленный ниже анализ возможного происхождения погрешности должен облегчить выбор решений для расчетчика.

---

<sup>1</sup> Определение сил взаимодействия между фрагментом и остальной частью конструкции (и, в особенности, их задание в качестве внешней нагрузки на фрагмент) — процесс трудоемкий, а потому утомительный для пользователя. На наш взгляд, элегантное решение реализовано в системе SCAD, разработчики которой не забыли позаботиться об интересах пользователей, заинтересованных в применении фрагментации. С этой целью SCAD предоставляет в распоряжение расчетчика отдельную услугу, реализованную специальным режимом «Нагрузка от фрагмента схемы». Включение этого режима автоматизирует вычисление усилий, передаваемых от отброшенной части конструкции на выделяемый фрагмент, переводя эти усилия в класс внешних воздействий.

Остановимся вначале на случае постановки чисто статических краевых условий на границе  $\Gamma_2$ .

Будем помечать нижним индексом \* любые величины, относящиеся к точному решению задачи, индексом  $H$  — величины, относящиеся к решению полной задачи на грубой сетке, и наконец, индексом  $h$  — те же величины, но относящиеся к решению на мелкой сетке.

При расчете фрагмента вдоль границы  $\Gamma_2$  в качестве краевых условий задаются усилия взаимодействия между фрагментом и отбрасываемой частью конструкции (для упрощения рассуждений, будем считать, что речь идет о плоской задаче теории упругости), то есть в качестве нормальных  $p^n$  и касательных  $p^t$  к  $\Gamma_2$  внешних для фрагмента сил положим

$$p^n(s) = \sigma^{ij} n_i n_j, \quad p^t(s) = \sigma^{ij} n_i t_j, \quad (5.1)$$

где  $\sigma^{ij}$  — компоненты тензора напряжений в точках границы  $\Gamma_2$ ,  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе  $\Gamma_2$  (внешней для фрагмента),  $t_j$  — компоненты единичного касательного к  $\Gamma_2$  вектора (здесь подразумевается, как обычно, суммирование по повторяющимся индексам).

Если в качестве тензора  $\sigma$  в (5.1) взять тензор напряжений  $\sigma_*$  из точного решения полной задачи, то тогда при расчете фрагмента каким угодно методом погрешность анализа фрагмента будет определяться исключительно погрешностью избранного метода расчета — в нашем случае это будет погрешность, наводимая методом конечных элементов на мелкой сетке диаметром  $h$ . Однако, тензор  $\sigma_*$  нам неизвестен, поэтому при постановке статических краевых условий на  $\Gamma_2$  вместо  $\sigma_*$  в (5.1) принимается его приближение, в качестве которого берется решение полной задачи на крупной сетке  $H$ , то есть в (5.1) полагается  $\sigma = \sigma_H$ . В результате уже в постановку задачи расчета фрагмента вносится неустранимая погрешность в виде «шума» по статическим краевым условиям на  $\Gamma_2$

$$\Delta p^n(s) = (\sigma_*^{ij} - \sigma_H^{ij}) n_i n_j, \quad \Delta p^t(s) = (\sigma_*^{ij} - \sigma_H^{ij}) n_i t_j. \quad (5.2)$$

Поскольку выделение фрагмента осуществляется по линиям разреза полной конструкции (это и есть  $\Gamma_2$ ), где не предвидятся высокие градиенты напряженного состояния и, следовательно, точность решения в окрестности  $\Gamma_2$  на грубой сетке достаточно высока, то шум (5.2) в краевых условиях будет незначительным и мало повлияет на решение для фрагмента с использованием мелкой сетки  $h$ . Это будет тем более справедливо для той части фрагмента, в которой имеет место интересующая расчетчика особенность в

решении и которая находится на достаточном удалении от  $\Gamma_2$ , если шум в (5.2) представляет собой локально самоуравновешенную на участках границы  $\Gamma_2$  систему усилий.

Для упрощения рассуждений ограничимся случаем, когда  $\Gamma_2$  представляет собой замкнутый контур, при этом выделяемый фрагмент не закреплен от жестких смещений. Поскольку контурные усилия  $p_*$ , равно как и усилия  $p_H$  уравнивают всю внешнюю нагрузку, приходящуюся на выделенный фрагмент, то отсюда следует, что компоненты «шумовых» контурных сил  $\Delta p^n(s)$  и  $\Delta p^l(s)$  удовлетворяют однородным уравнениям равновесия. Иначе говоря, шум на контуре выделенного фрагмента самоуравновешен. Но самоуравновешенности шума в краевых условиях в целом на контуре  $\Gamma_2$  мало, нам хотелось бы обосновать его самоуравновешенность и в локальном смысле.

Из теории метода конечных элементов [Стренг, Фикс, 1977] известно, что ошибки в напряжениях в пределах сеточного размера  $H$  меняют знак (отсюда, кстати говоря, следует существование особых точек напряжения, называемых точками Барлоу, о которых будет идти речь в разделе 5.2). Если теперь разложить шумовые усилия (5.2) в ряд Фурье вдоль контура  $\Gamma_2$ , то несложно догадаться, что главным членом в этом разложении будет гармоника с длиной полуволны порядка  $H$ . А эта гармоника как раз и является самоуравновешенной нагрузкой с зоной локальной самоуравновешенности протяженностью  $2H$ .

Известно, что локально действующие самоуравновешенные нагрузки вносят в решение добавку, затухающую обычно по мере удаления от места их приложения. В этом, собственно, и состоит принцип Сен-Венана, и для систем, где этот принцип соблюдается<sup>2</sup>, ошибка локализации будет быстро убывать по мере удаления от источника самоуравновешенных сил. К таким источникам принадлежит и локально самоуравновешенная часть шума в краевых условиях на  $\Gamma_2$ . Чем меньше локальный участок границы  $\Gamma_2$ , на котором шумы  $\Delta p^n(s)$  и  $\Delta p^l(s)$  самоуравновешены, тем меньше зона их чувствительного влияния на напряженно-деформированное состояние фрагмента. Фактически это означает, что в оценке погрешности решения для фрагмента  $\|\sigma_* - \sigma_H\|$  в некоторой норме роль шума в краевых условиях не является главной ролью.

<sup>2</sup> Имеются и такие системы, где принцип Сен-Венана несправедлив. По этому поводу рекомендуем [Феодосьев, 1975], стр. 62, а также специально посвященную обоснованию и условиям применимости принципа Сен-Венана интересную работу [Джанелидзе, Пановко, 1950].

Из всего сказанного выше следует, что при расчете фрагмента существует приграничная к  $\Gamma_2$  зона, напряженное состояние в которой чувствительно реагирует на погрешности в напряженном состоянии всей конструкции, определенном на грубой сетке. На достаточном удалении от этой зоны, скажем, на расстоянии  $\delta$  от границы  $\Gamma_2$ , влиянием этой погрешности можно пренебречь (рис. 5.1).

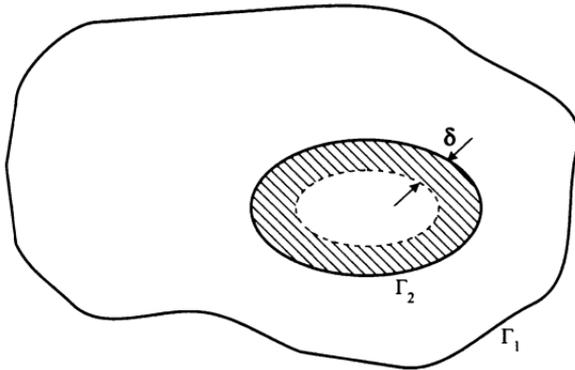


Рис. 5.1. Полная конструкция, фрагмент и зона чувствительности

Чтобы прикинуть размер зоны чувствительности и оценить скорость убывания ошибки в решении от шума в краевых условиях<sup>3</sup>, рассмотрим тестовую задачу о напряженном состоянии фрагмента в виде круговой области радиуса  $R$  под воздействием радиальных  $q_r$  и тангенциальных  $q_t$  контурных усилий

$$q_r = q \sin(k\theta), \quad q_t = q \cos(k\theta), \quad (5.3)$$

где  $k$  — четное положительное число,  $\theta$  — угловая координата.

Несложно проверить, что усилия (5.3) самоуравновешены как в целом по всему контуру  $\Gamma_2$ , так и в локальных пределах  $-\pi/2k \leq \theta \leq 3\pi/2k$ , то есть главный вектор и главный момент этих сил равны нулю. Можно считать, что контурная нагрузка (5.3) соответствует шумовым усилиям на  $\Gamma_2$ , получаемым на грубой сетке с характерным шагом сетки

$$H = \pi R/k. \quad (5.4)$$

Для определения напряженного состояния фрагмента воспользуемся известным из курса теории упругости [Папкович, 1979] решением. Если, из условия ограниченности перемещений

<sup>3</sup> Оценка скорости затухания напряжений, вызванных локальной самоуравновешенной системой сил для различных типов задач строительной механики и теории упругости приведена в работе [Джанелидзе, Пановко, 1950].

центра пластины, исключить из этого решения члены, содержащие  $r$  (текущую радиальную координату) в отрицательной степени, то для компонент тензора напряжений в полярной системе координат  $(r, \theta)$  получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q [-k(k-1)Ar^{k-2} - (k-2)(k+1)Cr^k] \sin(k\theta), \\ \sigma_\theta &= q [k(k-1)Ar^{k-2} + (k+2)(k+1)Cr^k] \sin(k\theta), \\ \tau_{r\theta} &= -q [k(k-1)Ar^{k-2} + k(k+1)Cr^k] \cos(k\theta).\end{aligned}\quad (5.5)$$

Константы интегрирования  $A$  и  $C$  находим из условий на контуре

$$\text{при } r = R: \quad \sigma_r = q_r, \quad \tau_{r\theta} = q_t. \quad (5.6)$$

В результате получаем  $A = 1/[k(k-1)R^{k-2}]$  и  $C = 0$ , что после подстановки в (5.5) дает

$$\sigma_r = -q\rho^{k-2}\sin(k\theta), \quad \sigma_\theta = q\rho^{k-2}\sin(k\theta), \quad \tau_{r\theta} = -q\rho^{k-2}\cos(k\theta), \quad \rho = r/R. \quad (5.7)$$

Введем в рассмотрение относительную глубину зоны чувствительности  $\beta$ :

$$\beta = \delta/H = k\delta/\pi R, \quad (5.8)$$

тогда на границе зоны чувствительности (при  $r = R - \delta$ ) падение напряжений по сравнению с точками контура  $\Gamma_2$  будет определяться общим параметром  $\eta$ , характеризующим затухание напряжений по мере удаления от границы  $\Gamma_2$ :

$$\eta = \sigma_r(r)/\sigma_r(R) = \sigma_\theta(r)/\sigma_\theta(R) = \tau_{r\theta}(r)/\tau_{r\theta}(R) = (1 - \beta\pi/k)^{k-2}. \quad (5.9)$$

Положив, например,  $\beta = 1$  и приняв  $k = 12$ , получим по формуле (5.9)  $\eta = 0,048$ . Увеличив зону чувствительности вдвое, то есть положив  $\beta = 2$ , получим  $\eta = 0,0006$ . Отсюда следует вывод о том, что зона чувствительности равная одному-двум шагам сетки  $H$  достаточна даже для весьма грубой сетки (при  $k = 12$  получаем  $H \approx R/4$ ).

Рассмотрим теперь вариант постановки на  $\Gamma_2$  кинематических краевых условий. Опять таки, в точной постановке эти краевые условия записываются в виде

$$u(s) = u_*(s), \quad v(s) = v_*(s). \quad (5.10)$$

Однако, при использовании вместо  $u_*$  и  $v_*$  их приближений, взятых из решения полной задачи на грубой сетке, приходим к шуму в кинематических краевых условиях

$$\Delta u(s) = u_*(s) - u_H(s), \quad \Delta v(s) = v_*(s) - v_H(s). \quad (5.11)$$

Здесь и в (5.10) под  $u$  и  $v$  понимаются компоненты вектора перемещений точек границы  $\Gamma_2$ . Кинематический шум (5.11) порождает, в свою очередь, шум в напряженном состоянии на  $\Gamma_2$ . Считая, что этот вторичный шум напряженного состояния на  $\Gamma_2$  локально самоуравновешен, вновь приходим к возможности апеллировать к принципу Сен-Венана.

Разумеется, все приведенные выше рассуждения носят качественный характер и не являются строгим математически выдержанным доказательством определения зоны чувствительности при выделении фрагмента конструкции. Тем не менее, ориентировочно можно считать, что вне пределов зоны, приграничной к  $\Gamma_2$ , ширина которой приблизительно равна  $H \dots 2H$ , влияние погрешности решения полной задачи на грубой сетке на результаты расчета фрагмента незначительно, и этой погрешностью можно пренебречь.

Если считать, что при расчете полной конструкции для напряжений имеет место оценка сходимости по порядку  $\alpha$ , то есть

$$\|\sigma_* - \sigma_H\| \leq CH^\alpha, \quad \|\sigma_* - \sigma_h\| \leq Ch^\alpha, \quad (5.12)$$

то при расчете фрагмента с закругленными краевыми условиями, полученными из решения на крупной сетке, вне пределов зоны чувствительности будем иметь

$$\|\sigma_* - \sigma_h\| \leq \eta CH^\alpha + Ch^\alpha. \quad (5.13)$$

Понимание источников погрешностей, вносимых при фрагментации, необходимо для осознанного применения этого метода.

При использовании метода фрагментации на стыке фрагмента с основной схемой может оказаться, что узлы фрагмента не имеют соответствующих им узлов по другую сторону стыка (рис. 5.2).

Возможна и такая ситуация, когда возникает несовпадение сеток разбиения на двумерных и трехмерных конечных элементах, расположенных по разную сторону стыка. Таким образом, возникает проблема использования специальных конечных элементов для заполнения стыков на границе между фрагментом и остальной системой, у которых предусмотрена возможность расстановки дополнительных узлов по сторонам четырехугольника. В общем случае, постановка дополнительных стыкующих узлов может быть выполнена с использованием техники наложения полисвязей по типу, показанному на рис. 2.21, — опять эти полисвязи! По-видимому,

важную роль может сыграть оптимизация сглаживания сетки (постепенное изменение размеров ее элементов), на что обращалось внимание в работе [Schiermeier et al., 1996].

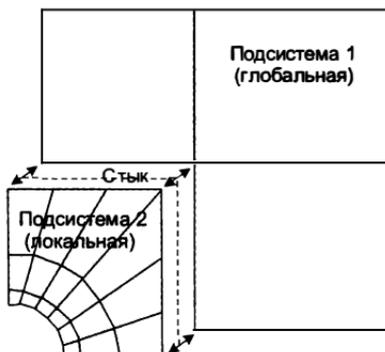


Рис. 5.2. Конструкция стыка

Следует заметить, что при выделении из системы фрагмента, последний может оказаться изменяемым. Если изменяемость является следствием самой структуры фрагмента (*внутренняя изменяемость*), то постановка чисто статических краевых условий на  $\Gamma_2$  недопустима, и нужно переходить к кинематическим или смешанным краевым условиям, сохраняющим геометрическую неизменяемость фрагмента. Если же фрагмент внутренне неизменяем, но имеет степени свободы твердого тела, то его следует раскрепить статически определенным способом.

Поскольку все внешние нагрузки, действующие на фрагмент, являются самоуравновешенными (рассматривается случай, когда граница  $\Gamma_1$  или не существует, или на ней поставлены статические краевые условия), то при статически определенном закреплении реакции в дополнительно наложенных связях должны оказаться нулевыми. Это рассуждение верно лишь теоретически, поскольку не учитывает неизбежную погрешность численного решения. Накопление ошибок округления приводит к тому, что вместо нулевой реакции мы получаем малые, но все же ненулевые значения реакций. Это свидетельствует о том, что в реальном численном представлении дело обстоит так, как если бы имела место некоторая небольшая ненулевая сила, действующая на фрагмент.

Поскольку упомянутая сила воспринимается условно наложенными связями, то значения полученных реакций оказываются зависящими от способа наложения этих связей. Заметим, что такая же проблема возникает не только при фрагментации, но и в других случаях, приводящих к необходимости

расчета летящих конструкций — так на профессиональном жаргоне называют задачи расчета конструкций без внешних связей под действием самоуравновешенных внешних сил.

Если такие связи расположить, по возможности, далеко друг от друга, реакции окажутся малыми и не внесут заметного возмущения в напряженное состояние. Если же, например, закрепить изгибаемую плиту в одной точке от двух поворотов и одного смещения, что теоретически является возможным, то возмущение может оказаться заметным, и результаты расчета в окрестности такого узла окажутся искаженными.

В работе С.А. Алексеева [1977] рассматривался вопрос о наилучшем, в смысле минимизации возможного значения реакций, статически определимом закреплении тела. Было показано, что для плоского случая (закрепление диска) наилучшим будет такое закрепление, при котором треугольник, образованный линиями расположения связей, является максимально возможным из всех описанных вокруг данного диска (рис. 5.3, а). Ему соответствует характеризующий качество закрепления, детерминант системы уравнений равновесия диска относительно опорных реакций  $\Delta = 1,673d$ . Для схемы по рис. 5.3, б этот детерминант  $\Delta = d$ , а для схемы по рис. 5.3, в он будет равным  $\Delta = 1,414d$ . Для пространственного блока наибольшее возможное значение детерминанта достигается в том случае, когда на направлениях расположения связей можно построить наибольший возможный параллелепипед, описанный около блока.

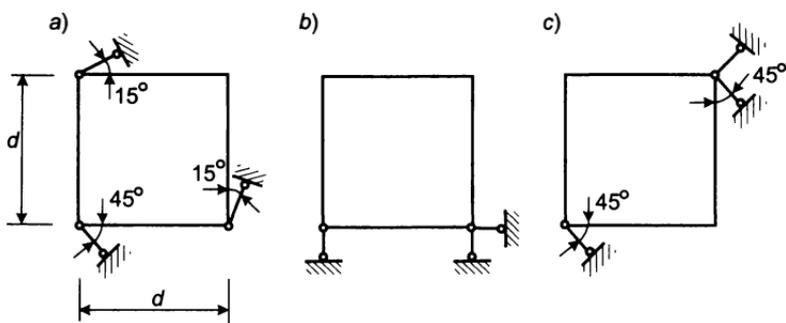


Рис. 5.3. Наложение связей, парирующих изменяемость

*Все сказанное выше относится к любому случаю раскрепления системы, имеющей свободу перемещений, как жесткого тела.*

Надо сказать, что максимизация детерминанта порождает теоретически наиболее устойчивую систему уравнений равновесия относительно усилий во введенных связях. Но сама эта система

уравнений крошечного порядка, так что главная погрешность связана не с ее решением, а с погрешностями, накопленными при ее формировании. Поэтому, не менее (а может быть и более) важным является вопрос о минимизации именно этой погрешности, которая для задач со многими неизвестными может оказаться весьма существенной. Забегая несколько вперед, отметим здесь, что в этом смысле целесообразно закреплять те узлы, которые приводят к наименее податливой из раскрепленных внешними связями конструкций. Обоснование этой рекомендации и некоторые детали даны в разделе 5.5.

Отметим, что в инженерной практике фрагментация используется не только в целях выделения части конструкции, работу которой нередко фрагментация оказывается полезным приемом. Пользователь хотел бы исследовать с существенно более густой сеткой. Нюхшим перейти от неограниченных областей занимаемых полной расчетной схемой, к ограниченным областям. Типичный пример представляют собой задачи расчета балочных и плитных конструкций, покоящихся на упругом основании, когда в качестве механической модели упругого основания принимается упругий слой конечной толщины (рис. 5.4).

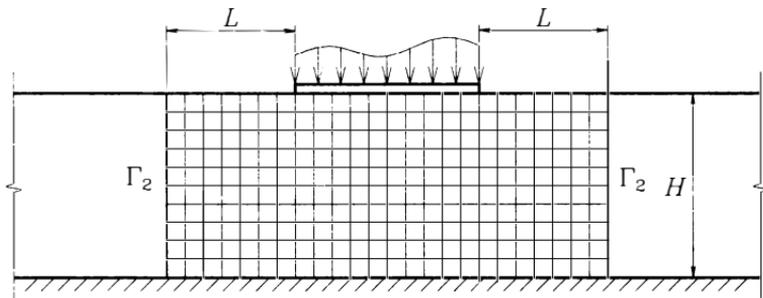


Рис. 5.4. Фрагментация при замене неограниченного упругого слоя слоем конечных размеров

Как правило, расчетчика интересует напряженное состояние самой конструкции, тогда как распределение напряжений в упругом слое представляет собой менее содержательную информацию для понимания работы конструкции. Чтобы применить программное обеспечение метода конечных элементов, приходится ограничивать размеры слоя в плане, пренебрегая работой той части упругого основания, которая находится на достаточном удалении от края конструкции. И первый же вопрос, который возникает в связи с этим — насколько нужно отступить в упругом слое от края конструкции.

чтобы отдаленной частью упругого слоя можно было пренебречь в расчетной схеме.

Эмпирическое правило, известное опытным расчетчикам, говорит о том, что вполне достаточно включить в расчетную схему упругий слой, находящийся с каждой стороны от края конструкции на расстоянии  $L = H \dots 1,5H$ , где  $H$  — высота сжимаемой толщи (рис. 5.4).

Оценку искажающего влияния такой фрагментации на напряженное состояние конструкции можно получить сопоставлением двух решений с различными краевыми условиями по вертикальному разрезу упругого слоя (это и будет границей  $\Gamma_2$  фрагмента). В первом случае краевые условия по вертикальному разрезу слоя принимаются статическими с нулевыми внешними силами вдоль  $\Gamma_2$ . Во втором случае на  $\Gamma_2$  принимаются условия полного закрепления от смещений. Если угодно, такие две модели фрагмента играют роль мажорантной и минорантной моделей, о которых говорилось ранее в разделе 1.6.

## 5.2. Построение непрерывных полей напряжений в МКЭ

При использовании конечноэлементного подхода в перемещениях вычисление напряжений связано с рядом проблем. Локальный поэлементный подсчет напряжений приводит к полям напряжений, имеющим разрывы на межэлементных границах (рис. 5.5). Для получения узловых напряжений в этих случаях прибегают к тому или иному методу усреднения вкладов напряжений отдельных элементов в их общий узел (усреднение по звезде элементов<sup>4</sup> узла).

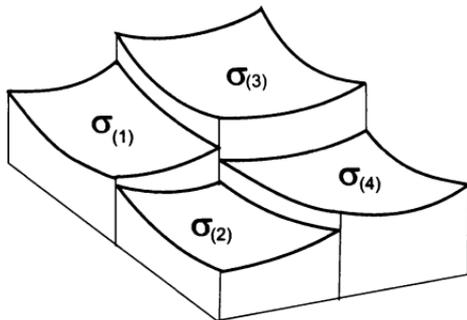


Рис. 5.5. Разрывное поле напряжений

<sup>4</sup> Под звездой элементов узла понимается область, состоящая из конечных элементов, примыкающих к данному узлу. Сам этот узел называют *центром звезды*.

По-видимому, полезно знать значения уровня несогласованности напряжений в узлах. Для этого можно, например, в каждом узле вычислить значение  $\Delta$  по формуле (5.14), где максимум и минимум берется по всем элементам, примыкающим к  $i$ -му узлу. По ним же выполняется и суммирование

$$\Delta = \frac{\left| \max_i \sigma_{(i)} - \min_i \sigma_{(i)} \right|}{\sum_i \left| \sigma_{(i)} \right|}. \quad (5.14)$$

Средняя по системе в целом (или по некоторой заданной подобласти) оценка величины  $\Delta$  является полезной дополнительной информацией, позволяющей выработать правильное отношение к выдаваемым результатам.

Проблема отображения разрывного поле напряжений и его свойств лучше всего может быть решена, если в программе предусмотрена возможность использования нескольких вариантов выдачи результатов. Одной из самых удачных в этом отношении является система **ADINA**, где имеются возможности выдачи на экран (и на печать) следующих результатов:

- разрывные значения (**None**);
- значения, усредненные в узлах (**Average**);
- максимальная из величин, вычисленная на всех элементах в окрестности узла (**Maximum**);
- минимальная из величин, вычисленная на всех элементах в окрестности узла (**Minimum**);
- абсолютная разность максимального и минимального значения (**Difference**);
- относительная разность максимального и минимального значения (**Error**).

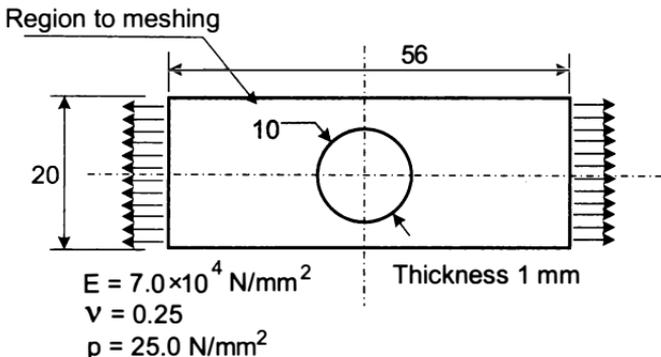


Рис. 5.6. Иллюстративная задача

Решение задачи по рис. 5.6 в виде изополей напряжений, соответствующих указанным выше режимам представлены на рисунке 5.7.

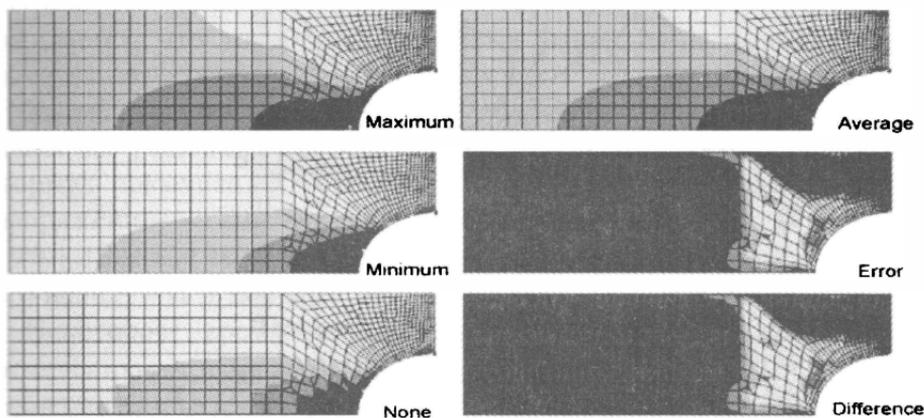


Рис. 5.7. Различные способы выдачи полей напряжений

К осреднению полей напряжений необходимо относиться с определенной долей осторожности, когда речь идет об узлах, на которые наложены связи. Например, в прямоугольной пластинке, полностью защемленной по контуру ABCDEF и по некоторой внутренней линии BE, которая нагружена в прямоугольнике BCDE, не должно быть моментов на ABEF. Но за счет осреднения моментов на линии BE возникает картина, представленная на рисунке рис. 5.8.

Поскольку проблема определения напряжений является исключительно важной для расчетчиков, имеет смысл остановиться на этом вопросе подробнее. Дело в том, что основной недостаток МКЭ в форме метода перемещений является, как это ни парадоксально, продолжением его основного преимущества. В самом деле, важнейшей особенностью вариационной постановки задачи, использующей функционал Лагранжа, является ослабление требований на гладкость решения. По терминологии Ж. Деклу [1976], используется симметричная или *полуслабая* формулировка обобщенного решения задачи. Такое расширение области определения решения, с одной стороны, помогает строить пространство допустимых к сравнению функций перемещений, а с другой стороны, оно оказывается слишком «слабым» для напряжений, так как операция дифференцирования, требуемая при переходе от перемещений к напряжениям, нарушает непрерывность компонент напряженного состояния.

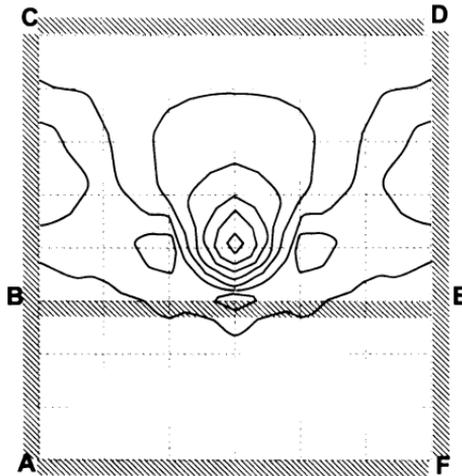


Рис. 5.8. Ошибка за счет осреднения

Пусть  $\mathbf{u}_h$  — векторное поле для перемещений, полученное на основании минимизации лагранжиана на некотором конечномерном подмножестве пространства кинематически допустимых перемещений<sup>5</sup>. Пусть  $\mathbf{Q}$  — оператор, отображающий перемещения  $\mathbf{u}$  в напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\mathbf{u} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{Q}\mathbf{u}_h \quad (5.15)$$

Во многих случаях инженер владеет априорной информацией с гладкости напряжений при точном решении задачи в классическом смысле и, если эта информация вступает в противоречие с наблюдаемой (ожидаемой) гладкостью  $\boldsymbol{\sigma}_h$ , то возникает желание «облагородить» это решение, отобразив его на более гладкое множество

$$\boldsymbol{\sigma}_{h*} = \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_h. \quad (5.16)$$

<sup>5</sup> Понятие кинематически допустимых перемещений нуждается в уточнении. В учебной и научной литературе часто встречается определение кинематически допустимых перемещений в сугубо механическом смысле как перемещений, не противоречащих связям, наложенным на систему. Следует четко понимать, что на формально математическом уровне под этим определением подразумевается выполнение двух требований:

- перемещения должны удовлетворять кинематическим краевым условиям;
- перемещения должны быть достаточно гладкими функциями.

Поскольку в различных определениях решения задачи (*сильное, слабое, полуслабое решение* [Деклу, 1976]) требуется различная гладкость перемещений, то и само множество кинематически допустимых перемещений изменяется вместе с изменением определения решения задачи.

Таким образом, существо проблемы заключается в построении сглаживающего оператора  $\mathbf{P}$ , проецирующего разрывное решение  $\sigma_h$  на некоторую поверхность, гладкость которой согласована с имеющейся априорной информацией. При таком отображении ожидается, что точность сглаженных напряжений  $\sigma_{h^*}$  будет выше точности  $\sigma_h$ .

Кроме рассмотренного выше оператора осреднения известны попытки решения этой задачи на основе использования разностных формул повышенной точности при определении узловых значений напряжений — см., например, работы [Fan Yuan-Xun, Wang Szing, 1979], [Beres, 1980]. Этот путь, однако, не алгоритмичен, неясно как его использовать на нерегулярных сетках.

Некоторое время надежды возлагались на идею Барлоу, отмеченную в известной книге Стренга и Фикса [1977], по которой решение  $\sigma_h$  ищется по формулам (5.15), но в некоторых *оптимальных точках*, отличных от узловых, в которых погрешность напряжений гарантированно минимальная. Эта идея также не нашла широкого применения в силу затруднений, возникающих при поиске оптимальных точек, а кроме того, пользователь интересуется, как правило, напряжениями в узловых точках сетки конечных элементов или в других вполне конкретных точках, положение которых он может задать.

Своеобразный способ получения непрерывных полей напряжений предложен и реализован Лубиньяком, опубликовавшим это предложение вместе с соавторами в [Loubignac et al., 1977]. Для рассуждений Лубиньяка конкретный вид оператора  $\mathbf{P}$ , отображающего разрывные напряжения  $\sigma_h$  в поле непрерывных напряжений  $\sigma_{h^*}$ , несущественен и может быть взят в простейшей форме, например, как оператор осреднения. Именно так практически и поступает Лубиньяк. Существенными в этом способе являются два момента:

- распределение напряжений по самим конечным элементам принимается по тем же самым функциям формы  $U(X)$ , каковые используются для аппроксимации перемещений;
- разность полей напряжений  $\sigma_0 = \sigma_{h^*} - \sigma_h$  рассматривается как система начальных напряжений.

Если  $\sigma_0(X)$  есть поле начальных напряжений, то, приводя эту своеобразную распределенную нагрузку к узловой, можно записать основное разрешающее уравнение в виде [Зенкевич, 1978]

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{h^*} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = \mathbf{p}, \quad (5.17)$$

где  $\mathbf{B}^T$  — транспонированная матрица связи узловых перемещений с деформациями. Эту систему уравнений Лубиньяк решает итерационно, приписывая индекс  $(k)$  величинам, получающимся в результате  $k$ -ой итерации

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^{(k)} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}_h^{(k-1)} - \boldsymbol{\sigma}_h^{(k-1)}) d\Omega = \mathbf{p}. \quad (5.18)$$

Вводя в рассмотрение матрицу упругости материала  $\mathbf{C}$ , получаем [Зенкевич, 1978]

$$\boldsymbol{\sigma}_h^{(k-1)} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k-1)}, \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}\mathbf{B} d\Omega, \quad (5.19)$$

и итерационный процесс (5.18) окончательно переписывается в виде

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}) + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(k-1)} d\Omega = \mathbf{p}. \quad (5.20)$$

Итерации выполняются до тех пор, пока разность  $(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)})$  не станет достаточно малой. Окончательные непрерывные поля напряжений по каждому из конечных элементов принимаются при этом в виде

$$\boldsymbol{\sigma}_e(X) = \mathbf{U}(X)_e (\boldsymbol{\sigma}_{cp})_e, \quad (5.21)$$

где  $(\boldsymbol{\sigma}_{cp})$  — вектор узловых напряжений, полученных в результате осреднения по звезде каждого из узлов элемента.

Этот алгоритм опробован Лубиньяком в задаче о консольной балке под действием нагрузки, распределенной по закону квадратной параболы на свободном конце, а также в задаче о толстостенной трубе, нагруженной внутренним давлением. В этих задачах результаты расчетов показывают существенное увеличение точности в определении напряжений при пяти итерациях.

На рис. 5.9, *a* приведен пример из работы [Loubignac et al., 1977], с помощью которого иллюстрируются результаты описанного расчета. Рассмотрена консольная балка-стенка, на конце которой приложена сила, распределенная по параболическому закону. На рис. 5.9, *b* представлены значения напряжений в точке А. Решения находились на различных сетках конечных элементов; при этом оказалось, что даже грубая сетка дает хорошие результаты, очень близкие к теоретическому значению.

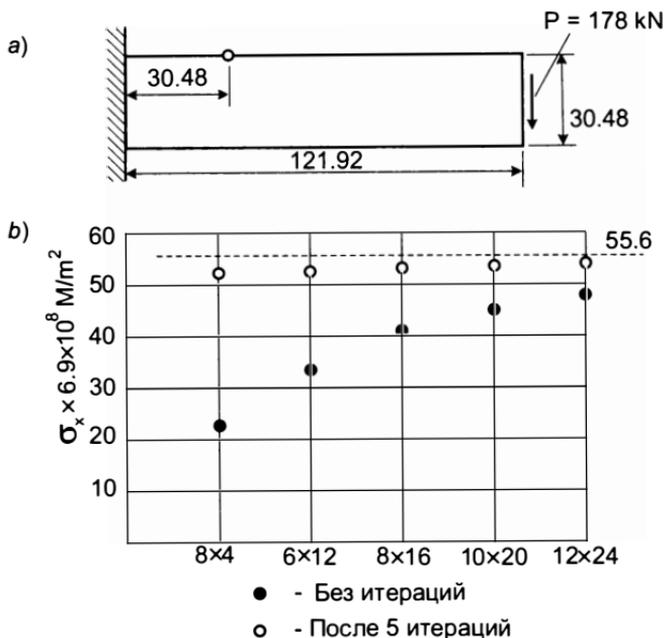


Рис. 5.9. Расчет консольной балки-стенки

К сожалению, способ Лубиньяка до сих пор не получил теоретического обоснования, не ясны условия сходимости итерационного процесса. Кроме того, как отмечает и сам Лубиньяк, возникают алгоритмические осложнения в задачах с разрывными полями усилий. Наконец, итеративный характер процедуры Лубиньяка делает ее малоприменимой в задачах со многими нагружениями, поскольку временные затраты приблизительно пропорциональны количеству нагружений.

Интересная идея получения узловых значений напряжений принадлежит А.В. Вовкушевскому [1979]. В соответствии с предложением Вовкушевского вместе с узлом, в котором отыскиваются напряжения, рассматривается звезда элементов этого узла<sup>6</sup>. Пусть  $k$  — число узлов звезды, включающее ее центр.

Для конкретности рассмотрим задачу изгиба плит. В пределах звезды вводится новая аппроксимация перемещений  $w$ , не связанная, вообще говоря, с той аппроксимацией, которая применялась при определении узловых значений перемещений. В соответствии с этой новой аппроксимацией полагается

<sup>6</sup> Под звездой узла понимается совокупность конечных элементов, инцидентных данному узлу.

$$w = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_{ij} f_i(x) f_j(y), \quad (5.22)$$

где  $f_i(x)$  и  $f_j(y)$  — полиномы степени  $i$  и  $j$  от  $x$  и  $y$ ,  $a_{ij}$  — подлежащие определению коэффициенты. Всего в разложении (5.22) имеется  $(s+1)^2$  неизвестных коэффициентов  $a_{ij}$ .

Потребуем, чтобы в каждом узле звезды аппроксимации (5.22) удовлетворяли тем обобщенным перемещениям, которые получены на основании конечноэлементного решения. Каждый узел при этом обеспечивает  $N$  уравнений, где  $N$  — число степеней свободы узла.

Так, для конечных элементов с твердотельными узлами  $N = 3$ , и для  $m$ -го узла звезды будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_{ij} f_i'(x_m) f_j(y_m) + \theta_{ym} &= 0, \\ \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_{ij} f_i'(x_m) f_j(y_m) - \theta_{xm} &= 0, \\ \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s a_{ij} f_i(x_m) f_j(y_m) - w_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, \dots, k), \quad (5.23)$$

где  $w_m$ ,  $\theta_{xm}$ ,  $\theta_{ym}$  — перемещения и повороты  $m$ -го узла. Выберем число  $s$  таким образом, чтобы число условий типа (5.23) было не меньше, чем количество подлежащих определению коэффициентов  $a_{ij}$  в представлении (5.22), то есть

$$(s+1)^2 \leq Nk. \quad (5.24)$$

Система уравнений (5.23) при условии строгого неравенства в (5.24) является переопределенной, поэтому ее решение можно искать, например, по методу наименьших квадратов. Заметим, что предварительно эту систему целесообразно несколько облагородить, поставив центр звезды в более привилегированное положение по отношению к остальным узлам. Этого можно добиться введением весового множителя  $p > 1$  в те уравнения системы (5.23), которые отвечают центру звезды.

После определения коэффициентов  $a_{ij}$  напряжения в центре звезды определяются дифференцированием (5.22) с последующим использованием физических соотношений.

Надо сказать, что сам Вовкушевский применял свою идею к плоской задаче теории упругости. Попытка применения этого же способа к задаче об изгибе плит наталкивается на ту трудность, что, хотя окончательная система уравнений метода наименьших квадратов

и имеет невысокий порядок, однако она крайне плохо обусловлена и потому весьма чувствительна даже к небольшим изменениям в величинах  $w_m, \theta_{xm}, \theta_{ym}$  ( $m = 1, \dots, k$ ). Другим недостатком способа Вовкушевского является его ориентация на сугубо непрерывные поля напряжений, а также алгоритмические проблемы, возникающие при стыковке конечных элементов различных типов.

В зарубежной литературе большой популярностью пользуется так называемый *метод сопряженных аппроксимаций* Одена—Редди [1973], в рецептурном виде (без попыток истолкования) проникающий даже в учебную литературу [Сегерлинд, 1979]. Подробное изложение метода Одена-Редди можно найти в книге [Оден, 1976], однако изложение его там запутано громоздкими индексными преобразованиями и несущественными деталями, мешающими выделить основную идею.

Если внимательно проследить за схемой Одена—Редди, связав его с вариационной постановкой задачи о поиске напряжений при заданном поле перемещений, то можно придать ей следующее истолкование. Поле напряжений разыскивается в виде разложения по тем же базисным функциям, каковые были использованы при минимизации лагранжиана. Далее можно составить функционал следующего вида, который мы назовем функционалом Одена (хотя сам Оден свой метод не рассматривает как вариационный):

$$O(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma^{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{kl} C^{ijkl} (u_{i,j} + u_{j,i})] d\Omega, \quad (5.25)$$

где  $C^{ijkl}$  компоненты тензора упругости, связывающие тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  с тензором деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ . Условия стационарности функционала  $O(\boldsymbol{\sigma})$  приводят к физическим уравнениям задачи теории упругости

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (5.26)$$

Пусть совокупность функций  $\varphi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) образует систему базисных функций, использованных при минимизации лагранжиана в процессе конечноэлементного решения задачи для поиска перемещений.

Раскладывая напряжения в конечные суммы по тем же базисным функциям и подставляя эти разложения в функционал (5.25), переводим этот функционал в квадратичную форму, условия стационарности которой дают систему уравнений для отыскания коэффициентов разложения напряжений по системе базисных функций  $\{\varphi_k\}$ .

Метод сопряженных аппроксимаций Одена, приводя к непрерывным полям усилий (напряжений), обладает и целым рядом недостатков:

- для определения коэффициентов разложения напряжений по функциям  $\{\varphi_k\}$  требуется составление и решение системы линейных алгебраических уравнений;
- статические краевые условия в методе Одена по-прежнему точно не удовлетворяются;
- аппроксимация усилий жестко связана с аппроксимацией перемещений и не оставляет свободы выбора иных координатных функций;
- вариационная постановка метода Одена показывает, что разрешающие уравнения этого метода следуют из условия стационарности функционала  $O(\sigma)$ , не имеющего четкого выраженного энергетического смысла, что видно хотя бы из рассмотрения размерности величин, входящих в подынтегральное выражение в (5.25);
- метод ориентирован на получение непрерывных полей напряжений и не позволяет учесть разрывы, вызываемые, например, разрывами в константах упругости в двумерных и трехмерных задачах.

Отметим, наконец, предложенный в работе [Сливкер, 1982] *метод двух функционалов*. В определенном смысле (процедурно) этот метод близок методу Одена—Редди, так как он также требует формирования и решения дополнительной системы уравнений. Поэтому первый из отмеченных недостатков сопряженных аппроксимаций Одена—Редди сохраняется и в методе двух функционалов. Однако, недостатки, перечисленные в остальных пунктах, устраняются. Не останавливаясь здесь на деталях обоснования метода двух функционалов, опишем кратко его основную идею.

Как и в случае сопряженных аппроксимаций Одена, приближенное решение задачи в методе двух функционалов находится в два этапа. На первом этапе минимизацией лагранжиана отыскивается обычное конечноэлементное решение  $\mathbf{u}^h$  для перемещений. Далее, строится функционал  $D(\sigma)$ , зависящий от компонент напряжений

$$D(\sigma) = E_\sigma(\sigma) - \Pi_\sigma(\sigma), \quad (5.27)$$

где  $E_\sigma(\sigma)$  — функционал дополнительной энергии,  $\Pi_\sigma(\sigma)$  — потенциал реактивных сил

$$E_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} d\Omega, \quad \Pi_{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = - \int_{\Omega} u_i \sigma_{,j}^{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \sigma^{ij} n_j d\Gamma. \quad (5.28)$$

Здесь обозначено:

- $D_{ijkl}$  — компоненты тензора упругой податливости, обратного тензору коэффициентов упругости  $C^{ijkl}$ ;
- $\Gamma_u$  — часть границы области  $\Omega$ , на которой поставлены кинематические краевые условия в виде заданных перемещений  $\bar{u}_i$ ;
- $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе  $\Gamma_u$ .

После подстановки в функционал  $D(\boldsymbol{\sigma})$  вместо перемещений  $u_i$  их приближений  $u_i^h$ , полученных на первом этапе, приходим к вариационной постановке второго этапа решения задачи, связанного с определением только напряжений. На этом этапе разыскивается минимум функционала  $D(\boldsymbol{\sigma})$  не на произвольных полях напряжений, а на так называемых *статически полудопустимых* полях напряжений. Статически полудопустимыми считаются напряжения, удовлетворяющие статическим краевым условиям и условиям разрывности полей напряжений, известных априорно, то есть до решения задачи. В качестве базисных функций при минимизации  $D(\boldsymbol{\sigma})$  могут приниматься, как и в методе сопряженных аппроксимаций, те же функции  $\{\varphi_k\}$ , но может быть использована и другая система координатных функций, подобранная применительно к специфике задачи. Не имея возможности останавливаться более подробно на изложении особенностей метода двух функционалов, отсылаем заинтересованного читателя за деталями и примерами к статье [Сливкер, 1982].

Надо сказать, что в существующих коммерческих программных разработках метод сопряженных аппроксимаций Одена, так же, как и метод двух функционалов, применения пока не нашел, так что надежда остается только лишь на программные реализации будущего. Впрочем, у авторов нет сомнения в том, что коллектив разработчиков, первым осмелившийся пойти на дополнительные затраты и выпустить на рынок программной продукции расчетный комплекс с повышенной точностью в определении полей напряжений, получит серьезные преимущества на этом непростом рынке.

### 5.3. Ошибки и ловушки при стыковке элементов различной размерности

Лишь в редких случаях вся конструкция представлена элементами одинакового типа (например, только элементами плиты); чаще встречаются случаи, когда в одной расчетной модели присутствуют и стержневые, и оболочечные, и другие элементы.

Современный расчетный программный комплекс допускает почти произвольную комбинацию конечных элементов самых разнообразных типов, размерностей, размеров и геометрической формы, а также с различными числовыми характеристиками жесткости. Такая гибкость в руках опытного пользователя является благом, позволяющим ему проявлять свою изобретательность для расширения сферы применения программы, и давая возможность раскусывать такие орехи расчетного характера, о произрастании которых разработчики могли и не догадываться. С другой стороны, эта же программная гибкость таит в себе и опасности, иногда лежащие на поверхности, а иногда — скрытые и поэтому наиболее коварные<sup>7</sup>. В любом случае корректность расчетной схемы, с точки зрения постановки задачи механики и обеспечения адекватности конечноэлементной модели реальной конструкции, лежит в сфере ответственности пользователя — см. по этому поводу рис. 2.1.

В этом разделе мы сосредоточимся на некоторых ловушках, подстерегающих пользователя в связи с сочетанием в расчетной схеме конструктивных элементов, в математической постановке относящихся к задачам различной размерности. Такие ситуации возникают, например, при наличии в расчетной схеме одномерных (стержневых) и двумерных (плитных и/или пластинчатых) элементов, хотя это и не единственный источник опасностей подобного рода.

В табл. 5.1 показаны возможные варианты комбинирования частей конструкции с элементами разной размерности, при этом знаком «←» помечены опасные, в отношении корректности расчетной схемы, комбинации конструктивных элементов.

---

<sup>7</sup> Специалист в области языков программирования и разработки компиляторов назвал бы входные языки расчетных программных комплексов языками со слабой типизацией, а, как известно, слабая типизация подталкивает к трудноуловимым ошибкам, которые, следуя странной англоязычной традиции в программировании, принято называть тараканами или клопами (bugs). В этой терминологии речь здесь идет о щелях в расчетных схемах, в которые могут заползти эти неприятные насекомые.

Как будет показано ниже, такое объединение «разнокалиберных» элементов в общей расчетной схеме требует пристального внимания, в особенности — в местах соединения элементов различной размерности.

Таблица 5.1.

Размерность задачи	Элементы		1	2	3	4	5
Одномерные задачи	Стержни	1	+	-	-	-	-
Двумерные задачи	Плиты	2		+	-	-	-
	Пластины	3			+	-	-
	Оболочки	4				+	-
Трехмерные задачи	Объемные элементы	5					+

Общее правило таково:

*при стыковке элементов различной размерности нельзя полагаться на формальный инструмент вычислений, предоставляемый программами метода конечных элементов. Как правило, для сохранения корректности расчетной схемы требуется более детальный анализ условий сопряжения конечных элементов разной размерности.*

Остановимся на некоторых из отмеченных в табл. 5.1 ситуациях.

### 5.3.1. Стержни + плиты

В качестве примера комбинации плитных<sup>8</sup> и стержневых элементов рассмотрим расчет пространственного стержневого каркаса совместно с плитным фундаментом.

Уже в предисловии к этой книге отмечалось, что пользователи тяготеют ко все большему усложнению расчетных схем и, в частности, за последние годы популярными стали расчеты каркасов зданий и сооружений совместно с фундаментными конструкциями. Раздельный расчет каркаса и, скажем, плитного фундамента здания сегодня, при доступности и массовой распространенности мощного программного инструментария проектировщика, выглядит не только как анахронизм, но в сообществе проектировщиков рассматривается почти как неприличное на профессиональном уровне поведение. А между тем «подводные камни», лежащие на пути подобного плавания, известны далеко не всем мореходам от расчетов

<sup>8</sup> В строительной механике понятия *плита* и *изгибаемая пластина* синонимичны. Мы будем для краткости придерживаться термина «плита».

конструкций, да и не всегда под рукой надежный лоцман. В то же время ни одна из доступных авторам для обозрения лоцманских карт (читай: «документации по применению программного комплекса») не содержит предупреждений об опасности.

Итак, рассмотрим дискретную расчетную схему, сочетающую в себе конечные элементы плиты и стержневые элементы, жестко присоединенные к плите (то, что плита расположена на упругом основании, не имеет значения для обсуждаемых здесь проблем). Сетка конечных элементов плиты выбирается так, чтобы стержни каркаса здания попадали в узлы сеточного разбиения плиты. Если не предпринимать никаких дополнительных мер, то описанная выше расчетная схема в узлах стыковки плитных и стержневых элементов обеспечит совместность как вертикальных перемещений плиты и каркаса (перемещений в направлении, перпендикулярном плоскости плиты), так и соответствующих углов поворота. Однако, получаемые в этой расчетной схеме изгибающие моменты в сечениях стоек, примыкающих к плите, не имеют отношения к истинному распределению внутренних усилий. А если это так, то это скажется и на распределении внутренних усилий в остальных элементах каркаса здания. Действительно, представим себе, что сетка плиты сгущается, и пользователь, убежденный заверениями разработчиков программного комплекса в отношении сходимости задействованного в программе конечного элемента плиты, ожидает все большего уточнения результатов расчета. Однако, если в программе все сделано правильно, то, начиная с некоторой сеточной разбивки, дальнейшее дробление сетки должно приводить к уменьшению абсолютных значений изгибающих моментов в стержнях в местах их заделки в плиту. В пределе, при устремлении максимального размера сеточной ячейки к нулю эти изгибающие моменты также должны стремиться к нулю, а это означает, что данная расчетная схема обеспечивает не жесткое, а шарнирное присоединение элементов каркаса к плите. То, что пользователь формально при избранной им сетке получает некоторые отличные от нуля численные значения изгибающих моментов, свидетельствует лишь о погрешности дискретизации в методе конечных элементов, но нет же никаких оснований погрешность дискретизации принимать за достойный доверия результат!

Фактически, при фиксированной сетке на плите пользователь использует расчетную схему, в которой элементы каркаса, грубо говоря, упруго защемлены внешними связями, препятствующими повороту соответствующих сечений стержней, причем коэффициенты жесткости этих внешних «часовых пружин» зависят от размеров

сеточного разбиения плиты и понижаются до нуля вместе со стремлением к нулю максимального размера сеточного элемента.

В самом деле, изгибающий момент в стержне в описанной выше расчетной схеме, вне зависимости от размеров сетки, передается на плиту как момент, сосредоточенный в узле сетки (сосредоточенность момента вытекает из одномерности стержневого элемента). С другой стороны, плита под действием сосредоточенного изгибающего момента получает бесконечный угол поворота в плоскости действия момента в месте его приложения, а точнее, в выражении для угла поворота возникает особенность логарифмического типа. Таким образом, плита не оказывает сопротивления на сосредоточенный поворот, а значит, и не защемляет элементов каркаса.

Чтобы не быть голословными, сошлемся на точное решение задачи о расчете круглой шарнирно опертой плиты, нагруженной в центре внешним моментом  $M$ , как это показано в разрезе на рис. 5.10.

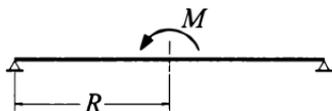


Рис. 5.10. Схема нагружения круглой плиты

Если обозначить:  $R$  — радиус плиты,  $D$  — цилиндрическая жесткость плиты,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала плиты,  $\rho$  и  $\varphi$  — текущие радиальная и угловая полярные координаты, то выражение для прогиба плиты  $w$  принимает следующий вид [Тимошенко, Войновский-Кригер, 1963]

$$w = \frac{MR}{8\pi D} \left[ \frac{1+\nu}{3+\nu} (\rho^3 - \rho) - 2\rho \ln \rho \right] \cos \varphi, \quad (5.29)$$

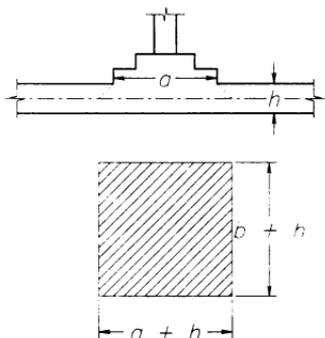
при этом угол поворота нормали к срединной поверхности плиты  $\theta$  в плоскости действия момента  $M$  (т.е. при  $\varphi = 0$ ) будет равен

$$\theta = \left. \frac{\partial w}{\partial \rho} \right|_{\varphi=0} = \frac{MR}{8\pi D} \left[ \frac{1+\nu}{3+\nu} (3\rho^2 - 1) - 2 - 2 \ln \rho \right], \quad (5.30)$$

откуда (при  $\rho \rightarrow 0$ ) и видна указанная выше логарифмическая особенность, порождающая бесконечно большое значение угла поворота  $\theta$  в месте приложения сосредоточенного момента<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Решения иных задач для плит под воздействием сосредоточенного изгибающего момента можно найти в книге [Лукаевич, 1982]. Во всех случаях выражение для

Для того, чтобы откорректировать расчетную схему, следует рассмотреть конструктивное решение в месте прикрепления каркаса к плите. Если стойки каркаса присоединены к плите с помощью подколонников, то последние могут рассматриваться, например, как абсолютно жесткое тело, не меняющее своих размеров при любых изменениях сетки конечных элементов плиты. Размеры же самого жесткого тела можно назначить, исходя из размеров подколонника ( $a \times b$ ) с учетом распределения давления от него на плиту под углом  $45^\circ$  (рис. 5.11) до срединной поверхности плиты, что вполне отвечает традиционной инженерной практике.



**Рис. 5.11.** Присоединение стойки через подколонник:  $a$  и  $b$  — размеры подошвы подколонника в плане

В этой схеме сосредоточенный момент от стоек каркаса передается на плиту через жесткую шайбу, размеры которой  $a+h$  и  $b+h$  не связаны с размерами сетки конечных элементов, а значит, и с погрешностью дискретизации. Хотя погрешность дискретизации и будет влиять на численные значения изгибающих моментов в стойках, она не окажет такого катастрофического воздействия на отклонение расчетной схемы от реальной конструкции, как это было в исходной постановке задачи без введения в расчетную схему жесткого тела. В том случае, когда подколонники отсутствуют, можно в качестве размеров жесткого тела принять размеры

---

поворота нормали к срединной поверхности плиты в месте приложения сосредоточенного момента содержит сингулярный член, подтверждающий бесконечное значение поворота. Кстати говоря, там же показано, что рассматриваемая сингулярность не является свойством, присущим только теории изгиба тонких плит (плиты Кирхгофа-Лява). В теории плит средней толщины, учитывающей влияние поперечных сдвигов (плиты Рейсснера), также возникает сингулярность в решениях аналогичных задач.

поперечного сечения стойки с учетом 45-градусного распределения давления на плиту, как это показано на рис. 5.11.

В качестве подтверждения всего сказанного выше, и как тестовый пример приведем, наконец, результаты расчета защемленной по контуру квадратной плиты с одиночной стойкой, заделанной в центре плиты.

На свободном верхнем конце стойки приложена внешняя сосредоточенная сила  $P$ , направленная вдоль глобальной оси  $X$  (рис. 5.12). В данном случае изгибающий момент в нижнем сечении стойки будет величиной постоянной, не зависящей от размеров сетки конечных элементов, так как система статически определима в отношении стойки. Однако, тот же эффект проявляется в горизонтальном перемещении вершины стойки, неограниченно нарастающем при сгущении сетки за счет роста угла поворота в центральном узле плиты.

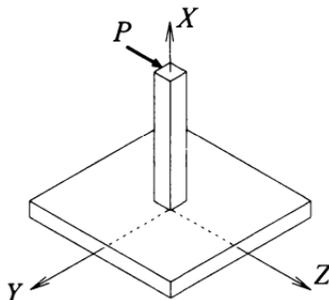


Рис. 5.12. Стойка, защемленная в плите

Во второй строке табл. 5.2 приведены результаты вычисления перемещения  $w_n$  свободного конца стойки в направлении оси  $Z$  в зависимости от используемой сетки ( $n \times n$ ) конечных элементов на четверти плана плиты.

При расчете приняты следующие исходные данные к задаче:

- толщина плиты  $h = 0,5$ ;
- полные размеры плиты в плане  $10,0 \times 10,0$ ;
- размеры поперечного сечения стойки  $0,5 \times 0,5$ ;
- характеристики материала плиты и стойки  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0,25$ .

Таблица 5.2.

$n \times n$	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64
$w_n \cdot 10^4$	11,826	11,996	12,162	12,326	12,492	12,659
$\underline{w}_n \cdot 10^4$	–	11,209	11,194	11,180	11,172	11,169

Легко заметить, что при каждом удвоении сетки рост прогиба  $w_n$  происходит практически на одну и ту же величину  $\Delta \cong 0,167 \cdot 10^{-4}$ , иначе говоря, прогиб стойки растет линейно вместе с ростом  $\log_2 n$ , точнее

$$w_n = w_2 + \Delta \cdot \log_2(n-1),$$

откуда, как и следовало ожидать, и вытекает неограниченное возрастание угла поворота корневого сечения стойки вместе с измельчением сетки конечных элементов.

Посмотрим теперь, как изменятся результаты расчетов, если в расчетную схему включить абсолютно жесткое тело, образуемое подколонником. Заимствуя обозначения из рис. 5.11, полагаем  $a + h = b + h = 2,50$ .

В третьей строке табл. 5.2 представлены перемещения  $\underline{w}_n$  свободного конца стойки для расчетной схемы плиты, включающей абсолютно жесткое тело указанных выше размеров. Уже беглый взгляд на эти величины подтверждает быструю сходимости решения при сгущении сетки.

Если присмотреться внимательнее, то можно заметить одно странное обстоятельство, сопутствующее расчетной схеме с жестким телом. В самом деле, сходимости  $\underline{w}_n$ , хотя и имеет место быть, но идет по убыванию. Поскольку  $\underline{w}_n$  представляет собой (с точностью до постоянного множителя) работу внешних сил, то, по всем канонам метода конечных элементов, величина  $\underline{w}_n$  должна была бы расти вместе со сгущением сетки. На языке механики это объясняется снятием все большего количества связей с дискретной системы при сгущении сетки, то есть увеличением общего числа степеней свободы системы. Однако, это соображение справедливо только в случае использования полностью совместных конечных элементов. При несовместных (иногда их называют *неконформными*) конечных элементах эти рассуждения рассыпаются, так как сгущение сетки, с одной стороны, увеличивает податливость системы за счет роста числа степеней ее свободы, а с другой стороны, накладывает на систему новые связи, закрывая образуемые в процессе деформации системы щели между несовместными элементами. Какая из этих двух тенденций (ужесточение системы или увеличение ее податливости вместе со сгущением сетки) будет превалировать в каждой конкретной задаче, заранее предсказать затруднительно.

Обратим также внимание на то обстоятельство, что фактически в расчетной схеме участвует не непрерывное абсолютно жесткое тело, а *дискретное абсолютно жесткое тело*.

Для того, чтобы выяснить, что мы понимаем под дискретным абсолютно жестким телом, посмотрим на рис. 5.13, где изображена четверть плана плиты с абсолютно жестким телом и сеткой конечных элементов  $8 \times 8$ . По линии 2–3–4 условия абсолютно жесткого тела выполняются не вдоль всей границы, а только в узлах сетки, выходящих на эту границу. С учетом имеющейся симметрии, можно записать соотношения между перемещениями узлов

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = 0,625\theta_y, \quad u_4 = u_5 = u_6 = 1,25\theta_y,$$

где  $u_i$  — вертикальное (вдоль мыслимой оси X) перемещение  $i$ -го узла, изображенного на рис. 5.13,  $\theta_y$  — угол поворота абсолютно жесткого тела вокруг оси Y.

*Для непрерывного абсолютно жесткого тела эти условия выглядели бы так:*

$$u(z) = z\theta_y$$

для всех значений  $z$  в пределах абсолютно жесткого тела.

Итак, дискретное абсолютно жесткое тело накладывает соответствующие условия связи на перемещения только заданных узлов этого тела.

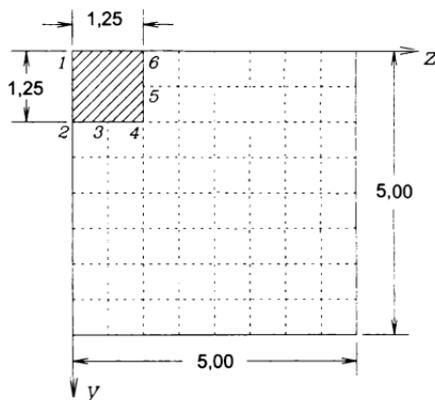


Рис. 5.13. Иллюстрация дискретного абсолютно жесткого тела

На примыкающих к отрезкам прямых 2–3, 3–4, 4–5 и 5–6 конечных элементах условия линейности перемещений, вообще говоря, не обязаны выполняться, а тогда в промежуточных точках между узлами будут нарушаться условия совместности вертикальных перемещений  $u$  абсолютно жесткого тела и соседствующих конечных элементов. Но тогда сгущение сетки, снимая с системы дополнительные связи в плите, одновременно накладывает новые связи между абсолютно жестким телом и плитой (устраняет допустимые разрывы в

перемещениях). Впрочем, для использованного нами конечного элемента Адина-Клафа [1960] можно показать, что разрывов в перемещениях  $u$  между абсолютно жестким телом и примыкающими к нему конечными элементами не будет (соответствующие рассуждения приведены в пункте 5.3.4 настоящего раздела). Однако, для иных типов конечных элементов плиты такая несовместность в перемещениях вполне возможна и может быть интерпретирована различием в поведении дискретной и непрерывной моделей абсолютно жесткого тела.

Подчеркнем здесь, что осознанное использование моделей абсолютно жестких тел возможно только при ясном понимании различия между понятиями непрерывного и дискретного абсолютно жесткого тела.

Отметим, что в обоих случаях расчеты выполнялись по программе **GTSTRUDL** с типом конечного элемента BPR (Bending Plate Rectangle) — прямоугольным конечным элементом плиты. Это популярный среди пользователей и хорошо зарекомендовавший себя несовместный конечный элемент с тремя степенями свободы в узле — элемент Адина-Клафа. Впрочем, выбор типа конечного элемента для изгибаемой плиты в этой задаче не принципиален. Для любых типов конечных элементов, гарантирующих сходимость, выводы будут аналогичными.

Наконец, обратим внимание читателя еще на одно обстоятельство, связанное с совместным расчетом пространственного каркаса и фундаментной плиты. Предполагая, что стойки каркаса ортогональны плоскости плиты, получим, что плита не оказывает сопротивления закручиванию стоек, а также смещениям  $v$ ,  $w$  низа стоек в направлении осей  $Y$ ,  $Z$  соответственно, поскольку у конечных элементов плиты просто нет соответствующих степеней свободы для сопротивления этим линейным перемещениям и закручиванию.

Если иных внешних горизонтальных связей (лежащих в плоскости  $Y, Z$ ) расчетная схема не содержит, то механическая система окажется незакрепленной и геометрически изменяемой, так что программа вынуждена будет отреагировать на это обстоятельство. Форма этой реакции зависит от предусмотрительности и изобретательности разработчиков программы. Возможен, например, незамысловатый останов программы, однако наиболее вероятной формой реакции. характерной для лучших образцов расчетной программной продукции, является попытка вежливо поправить пользователя. установив автоматически внешние связи. Дж. Эджер [1999] придумал даже особую аббревиатуру **DWIMNIS** для обозначения подобной логики работы программ:

*«Do what I mean, not what I say».*

Места автоматической установки внешних связей зависят от логики, принятой разработчиками. Само собой разумеется, что программа обязана информировать пользователя о внесении корректив в расчетную схему по своей инициативе, выдавая предупреждающие сообщения (warnings).

И все же более каверзным «тараканом» является отсутствие связей на закручивание стоек, поскольку для пространственного каркаса это не приводит к геометрической изменяемости системы, а у программы может и не быть механизмов обнаружения ошибок подобного рода. Это обстоятельство также необходимо иметь в виду при формировании расчетной схемы объединенной конструкции.

В качестве одного из возможных решений при стыковке плитных и стержневых элементов можно предложить наложение внешних связей на повороты узлов в плоскости плиты. При этом инженер должен быть уверен в невозможности таких поворотов.

Вообще, проблема построения надежных алгоритмов кинематического анализа механической системы сама по себе является нетривиальной задачей и заслуживает отдельного и обстоятельного разговора, который мы отложим до более удобного случая. Некоторые соображения по этому поводу изложены в разделе 3.2. Здесь мы лишь слегка затронули эту тему в связи с рассмотрением конкретного примера, в котором эта проблема обозначается в явном виде.

### **5.3.2. Стержни + пластины**

При расчете на горизонтальные нагрузки зданий повышенной этажности, содержащих в составе несущих конструкций как стержневой каркас, так и диафрагмы жесткости, в расчетную схему естественным образом входят разнородные элементы. Некоторые особенности расчетных схем, возникающие в том случае, когда диафрагма жесткости моделируется стержнем Тимошенко, а стержневой каркас — классическими стержнями Бернулли-Эйлера, рассмотрены далее в разделе 5.4. Здесь мы сосредоточимся на ситуации, когда относительные размеры диафрагмы жесткости не позволяют отнести ее к стержневому элементу даже с учетом деформаций сдвига. В таком случае диафрагма рассматривается как балка-стенка, и ее работа описывается решением плоской задачи теории упругости.

Итак, пусть расчетная схема конструкции содержит *пластину*<sup>10</sup> и стержневой каркас, как показано, например, на рис. 5.14.

Если к формированию дискретной расчетной схемы подходить совершенно формально, описывая пластину совокупностью конечных элементов плоского напряженного состояния, а стержневой каркас одномерными элементами, и не предпринимать никаких дополнительных мер, то в ригелях, примыкающих к узлам сопряжения каркаса с диафрагмой (узлы 1 и 2 на рис. 5.14), как изгибающие моменты, так и продольные и поперечные силы будут получаться какими угодно, но только не имеющими отношения к действительности.

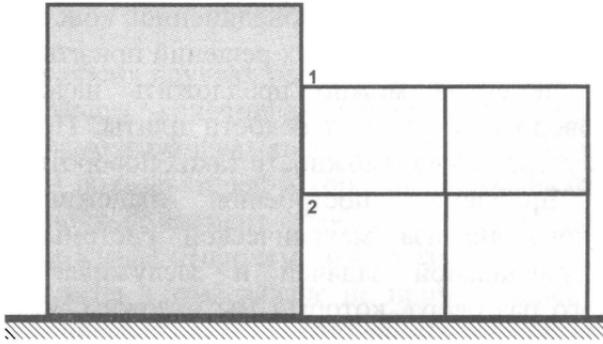


Рис. 5.14. Примыкание стержневого каркаса к пластине

Разберемся сначала с изгибающими моментами. Пусть для диафрагмы используются простейшие конечные элементы с двумя степенями свободы в узле (линейные перемещения  $u$  и  $v$  в двух взаимно ортогональных направлениях); тогда эти конечные элементы не окажут сопротивления повороту примыкающего к ним узла, поскольку у них (у элементов) просто отсутствуют соответствующие степени свободы, и, таким образом, эти конечные элементы не передадут на примыкающие узлы каких-либо моментных усилий. Поскольку расчетная программа потребует формального выполнения всех условий равновесия, в том числе и равновесия каждого из узлов по моментам, то отсюда примыкающие жестко к этим узлам ригели обязаны будут передать на узлы строго нулевые моменты. В результате изгибающие моменты в ригелях в этих узлах окажутся равными нулю, что соответствует расчетной схеме с шарнирным присоединением ригелей к диафрагме и не будет отвечать замыслу

<sup>10</sup> Мы будем понимать под пластиной двумерный конструктивный элемент, работающий в условиях плоского напряженного состояния.

пользователя, сориентированного на защемление ригелей в диафрагме.

Для того, чтобы избежать подобного искажения расчетной схемы, пользователи иногда вводят в узлы сопряжения ригелей с диафрагмой внешние связи, препятствующие поворотам узлов. Однако, такой прием вряд ли можно одобрить, так как в этом случае мы вновь сталкиваемся с искажением расчетной схемы, причем в сторону завышения общей жесткости системы — в реальной конструкции такие внешние связи отсутствуют.

Любопытно следующее: несмотря на то, что проблема эта давно известна пользователям, дискуссии на обсуждаемую тему продолжают возникать вновь и вновь, причем среди изобретаемых рекомендаций можно услышать даже призывы перехода к моментной теории упругости в отношении моделирования работы диафрагмы, хотя, как мы покажем далее, проблема решается в рамках простых моделей, вполне адекватно отображая работу реальной конструкции — для этого необходимо лишь рассмотреть конструктивные особенности присоединения ригелей к диафрагме и отразить эти особенности в расчетной схеме.

Среди распространяемых рекомендаций, которые мы не можем поддержать по обсуждаемым ниже причинам, есть и рекомендация по использованию в рассматриваемых задачах конечных элементов плоского напряженного состояния, включающих дополнительные степени свободы, которым придается смысл поворотов узлов<sup>11</sup>. Сами по себе конечные элементы этого типа вполне работоспособны и имеют право на существование как один из вариантов построения конечноэлементных моделей с повышенной степенью аппроксимации перемещений/усилий, так что следуемый ниже текст нельзя рассматривать как нанесение негативного окраса на эти типы конечных элементов. Здесь же мы обратим внимание читателя на то обстоятельство, что попытка ухода от сформулированной выше проблемы в рамках изменения дискретной модели сама по себе бесплодна и, более того, опасна, так как создает у пользователя иллюзию решения, которое таковым не является. И опять щель для этой новой разновидности «тараканов» не закрывается, а всего лишь замаскировывается (увы, не от «таракана», а от пользователя)

---

Например, в документации для пользователя к программному комплексу **STARK\_ES** из семейства программ **MicroFE** при описании типов конечных элементов плоского напряженного состояния сказано: «Использование трех степеней свободы в узле позволяет повысить точность расчета и легко согласовать степени свободы для комбинированных систем (например, балка-стенка — стержень)».

погрешностью дискретизации — изгибающие моменты в ригелях действительно получаются отличными от нуля.

Как и в задаче о сопряжении плиты со стержнем, суть дела здесь не в пороках дискретной модели, а в том, что исходная математическая постановка задачи, молчаливо предполагающая точечное сопряжение двумерной задачи теории упругости для диафрагмы и одномерной для стержня, при точном ее решении приводит к нулевым моментам в ригелях в местах их примыкания к диафрагме. Для обоснования этого вывода достаточно убедиться в том, что для плоской задачи теории упругости соответствующая компонента вращения  $\omega_z$  в окрестности точки приложения сосредоточенного момента имеет особенность, то есть принимает бесконечно большое значение.

Действительно, рассмотрим изображенную на рис. 5.15 круглую пластину радиуса  $R$ , закрепленную от всех смещений на внешнем контуре. Пусть в центре пластины впаяна круглая абсолютно жесткая шайба радиуса  $c$ , к которой приложен вращающий момент  $M$ .

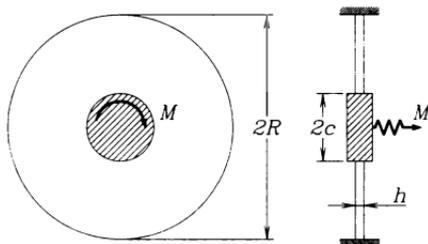


Рис. 5.15. Круглая пластина, нагруженная вращающим моментом

Если обозначить через  $u$  и  $v$  радиальные и тангенциальные перемещения точек пластины, то несложно убедиться в том, что компоненты вектора перемещений в любой точке пластины (вне жесткой шайбы) определяются выражениями

$$u = 0, \quad v = \frac{M}{4\pi Gh} (1/\rho - \rho/R^2), \quad (5.31)$$

где  $\rho$  — текущая радиальная координата,  $G$  — модуль сдвига,  $h$  — толщина пластины.

Действительно, в этом случае все уравнения равновесия, равно как и граничные условия, выполняются.

Обозначая через  $\omega_z$  угол поворота жесткой шайбы, получим

$$\omega_z = v(c) / c = \frac{M}{4\pi Gh} (1/c^2 - 1/R^2), \quad (5.32)$$

откуда и видно, что при устремлении размера шайбы  $c$  к нулю угол поворота  $\omega_z$  стремится к бесконечности.

Возвращаясь к рекомендации системы **STARK\_ES**, отмеченной в сноске<sup>11</sup>, по согласованию степеней свободы стержневых элементов и конечных элементов плоской задачи теории упругости (авторы этой рекомендации под согласованием понимают, по-видимому, отождествление поворотов и линейных перемещений всех примыкающих к узлу элементов) можно заметить, что как раз именно этого и не надо делать. Повороты поперечных сечений стержней и компоненты вращения  $\omega_z$  — вещи совершенно разные, так что их отождествление способно только лишь запутать расчетную схему. Расчетчику нужно ясно отдавать себе отчет в том, что введение дополнительных параметров  $\omega_z$  в конечноэлементную модель может быть оправдано и полезно для понижения погрешности дискретизации при той же сетке конечных элементов, но нет никаких причин придавать этим параметрам геометрический смысл поворотов узлов, к которым присоединены примыкающие стержни.

Еще один аргумент, высказываемый иногда в пользу введения дополнительных параметров  $\omega_z$  в конечноэлементную модель, связан с проблемой сопряжения плоской задачи теории упругости и стержня не «точечно», а непрерывно по длине стержня. Такие задачи встречаются при окаймлении пластин вдоль всей или части границы акцентированными ребрами, моделируемыми стержневыми элементами. В традиционной схеме метода конечных элементов совместность перемещений стержня и примыкающей к нему пластины обеспечивается только в узлах, тогда как в промежуточных точках (между узлами) неизбежны разрывы в перемещениях стержня и примыкающих элементов пластины в направлении, ортогональном оси стержня. Введение параметров  $\omega_z$  позволяет избавиться полностью (или хотя бы частично, в зависимости от используемых аппроксимаций для полей перемещений пластины) от этой несовместности. Все это так, однако посмотрим какой ценой достигается указанное восстановление совместности перемещений.

Рассмотрим постановку задачи о решении плоской задачи теории упругости для некоторой области с участком прямолинейной границы  $\Gamma$ , оснащенной по всей длине этой границы стержнем.

Если ввести декартову систему координат  $(X, Y)$  так, чтобы ось  $X$  совпадала с продольной осью стержня, и обозначить  $u^o(x)$  и  $v^o(x)$  перемещения сечений стержня вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно, то на границе  $\Gamma$  следует поставить следующие краевые условия, точнее — условия сопряжения

$$u(x,0) = u^\circ(x), \quad v(x,0) = v^\circ(x), \quad (5.33)$$

где под  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$  понимаются, как обычно, компоненты вектора перемещений относительно осей  $X$  и  $Y$  соответственно. Если, кроме того, пытаться отождествлять также на  $\Gamma$  повороты сечений стержня  $\theta_z = dv^\circ/dx$  с компонентами вращения  $\omega_z$ , то получим на границе  $\Gamma$  дополнительное условие.

Рассмотрим для конкретности вариант введения компоненты вращения  $\omega_z$  как усредненного поворота в окрестности рассматриваемой точки упругой среды<sup>12</sup>, то есть

$$\omega_z = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/2. \quad (5.34)$$

В этом случае указанное дополнительное условие на границе  $\Gamma$  сводится к требованию отсутствия сдвигов  $\gamma_{xy}$ . Действительно, приравнявая выражения для  $\theta_z(x)$  и  $\omega_z(x,0)$ , получаем

$$\gamma_{xy}(x,0) = (\partial v/\partial x + \partial u/\partial y)|_{y=0} = 0, \quad (5.35)$$

следовательно, на границе  $\Gamma$  вместо двух краевых условий, требуемых для бигармонического уравнения, получаются три условия, что приводит к математически некорректной постановке задачи. Это легко себе представить и на уровне механики. В самом деле, условие (5.35) на основании физических соотношений для изотропного упругого тела приводит к отрицанию касательных напряжений  $\tau_{xy}$  вдоль границы  $\Gamma$ , т.е. тело скользит вдоль границы  $\Gamma$ , а с другой стороны, из (5.33) следует, что вдоль границы  $\Gamma$  заданы произвольные, но фиксированные значения всех компонент перемещений, так что одно противоречит другому.

Указанные соображения, по крайней мере, настораживают. Вот почему без необходимого тщательного (а еще лучше — теоретического) исследования условий безопасного применения рассматриваемого приема вряд ли можно его рекомендовать к широкому практическому использованию. Справедливости ради, следует сказать, что опубликованные результаты расчетов тестовых примеров действительно демонстрируют снижение погрешности дискретизации при введении обсуждаемых здесь дополнительных степеней свободы у конечных элементов плоской задачи теории

<sup>12</sup> Дополнительная степень свободы конечного элемента плоской задачи теории упругости, которой придается смысл компоненты вращения  $\omega_z$  (угла поворота узла), может быть введена различными способами. Критический обзор и анализ предложений различного рода, связанных с введением вращательной степени свободы в узлы конечных элементов, приведен в статье [Свойский, 1986].

упругости. Но эти тесты построены на классических примерах и не охватывают, например, проблемы сопряжения плоской задачи теории упругости со стержнями.

В этом месте авторы посчитали необходимым развить свою аргументацию. Дело в том, что сформулированный выше тезис о незаконности приравнивания так называемой «угловой степени свободы»  $\omega_z$  конечных элементов пластины плоского напряженного состояния углам поворота  $\theta_z$  примыкающих в этом же узле элементов иного типа, и в частности стержневых элементов, вызвал продолжительную дискуссию. Аргументы наших оппонентов сводились к тому, что даже, если такое приравнивание и вносит некоторое искажение в окончательное решение задачи, то оно, скорее всего, имеет локальный характер.

Прежде, чем отвечать по существу вопроса, мы хотели бы признать, что принимаем вину на себя, но не по сути дела, а лишь за инициацию самой дискуссии, вызванной нарушением нами блестяще сформулированного в латинском изречении принципа убедительности:

*«Говорите не так, чтобы Вас могли понять, а так, чтобы Вас не могли не понять».*<sup>13</sup>

Отметим, что в наше намерение не входит критика какого-либо конкретного способа, введения дополнительной степени свободы в пластину плоского напряженного состояния. Порочен не способ введения параметра  $\omega_z$ , а сам принцип, согласно которому этот параметр отождествляется с параметром  $\theta_z$ . Каким бы хитроумным способом бы мы не вводили  $\omega_z$  в расчетную схему, все равно нет никаких оснований для равенства

$$\omega_z = \theta_z . \quad (?)$$

С нашей точки зрения, само это равенство возникло благодаря лишь интерпретации параметра  $\omega_z$  как угла поворота узла, а дальше идет не вполне безобидная игра слов, приводящая к подмене понятий со следующей схемой рассуждений: если параметру  $\omega_z$  придать смысл угла поворота узла, и в этот же узел приходит стержневой элемент с углом поворота его поперечного сечения  $\theta_z$ , то эти величины геометрически суть одно и то же.

В том то и дело, что это разные величины! Недаром сказано, что

<sup>13</sup> Считаю уместным сослаться на книгу Я.Г. Пановко [1985], откуда мы и заимствовали это изречение.

«...истинный смысл термина следует искать не в его определении, а в его употреблении» [Янг, 1974]<sup>14</sup>.

Чтобы наша мысль была понята отчетливо и не оставляла лазеек для дальнейших словесных спекуляций, остановимся на совсем уж прозрачном примере, сопроводив его формально математической постановкой задачи – что может быть убедительнее математического формализма!

Итак, рассмотрим задачу об определении напряженно-деформированного состояния пластины, занимающей область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  в плоскости  $(X, Y)$ . И пусть на части границы  $\Gamma_1$ , которую для конкретности будем считать расположенной строго вдоль оси  $X$ , пластина оконтурена стержнем Тимошенко – именно стержнем Тимошенко, а не стержнем Бернулли, поскольку в этом случае противоречия, порождаемые равенством (?), проявляются наиболее выпукло.

Пусть на оставшейся части границы  $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$  пластина закреплена от всех смещений. Будем считать, что координата  $x$  продольной оси контурного стержня изменяется от 0 до  $l$ . Легко понять, что вариационная постановка этой задачи сводится к минимизации лагранжиана  $L$ , который не поленимся привести здесь полностью в стандартных обозначениях<sup>15</sup>

$$L = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} [u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + v_{,x}^2 + 2\nu u_{,x} v_{,x} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,x} + v_{,x})^2] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l [EI \theta_{z,x}^2 + GF(v_{,x}^\circ - \theta_z)^2 + EA(u_{,x}^\circ)^2] dx - \Pi,$$

где первый интеграл представляет энергию деформации, запасаемую в самой пластине, второй интеграл энергию деформации, аккумулируемую в стержне, а  $\Pi$  представляет собой падение потенциала внешних сил. Понятно, что лагранжиан  $L$  является функционалом от трех независимо варьируемых функций

<sup>14</sup> Еще один пример наглядной демонстрации опасностей терминологической неразборчивости, на недопустимость которой вообще в механике обращал внимание Я.Г. Пановко [1985]. Вот уж действительно:

«Как Вы лодку назовете, так она и поплывет».

<sup>15</sup> Для упрощения записи здесь использовано соглашение об обозначении производных по некоторой координате указанием этой координаты в качестве нижнего индекса, установленного после запятой. Например,  $u_{,x} = \partial u / \partial x$ . Заметим, также, что в подинтегральном выражении у лагранжиана  $L$  под  $F$  понимается площадь сдвига сечения, отличающаяся от геометрической площади  $A$  коэффициентом формы сечения.

$$L = L(u, v, \theta_z),$$

поскольку  $v^\circ(x) = v(x, 0)$  и  $u^\circ(x) = u(x, 0)$ , и следовательно  $u^\circ(x)$  и  $v^\circ(x)$  не являются независимо варьируемыми функциями. Минимум функционала  $L$  отыскивается на множестве функций  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $\theta_z(x)$ , удовлетворяющих главным (кинематическим) краевым условиям

$$u = 0, v = 0 \in \Gamma_2,$$

и имеющих обобщенные квадратично суммируемые первые производные. И это все, что требует вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии. Никакой, заранее предписанной связи, между поворотами сечений стержня  $\theta_z(x)$  и перемещениями пластины  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  вариационный принцип Лагранжа не устанавливает. Если теперь ввести каким-либо способом выражение для «угла поворота»  $\omega_z$  в некоторой точке  $(x, y)$  пластины, то в любом случае оно будет иметь вид  $\omega_z(x, y) = A(u, v)$ , где оператор  $A$  как раз и определяет способ введения параметра  $\omega_z$ . Теперь ясно, что использование соотношения (?), есть просто наложение на систему дополнительной связи вида

$$A(u, v) \Big|_{y=0} = \theta_z(x),$$

которая вносит в исходную постановку задачи ничем не оправданное искажение при любом виде оператора  $A$ .

Действительно, независимость функции  $\theta_z$  от функций  $u$  и  $v$  благодаря условию (?) утрачена. Кстати говоря, это искажение направлено в сторону ужесточения системы (как и при любой дополнительной связи), откуда следует, что по энергетической норме искаженное конечноэлементное решение находится дальше от точного решения задачи, чем аналогичное конечноэлементное решение, лишённое дополнительной связи (?). Иначе говоря, приходим к неравенству

$$E \geq E_h \geq E_h^+,$$

где  $E$  – энергия системы при точном решении задачи,  $E_h$  – энергия обычного конечноэлементного решения,  $E_h^+$  – энергия конечноэлементного решения, возмущенного дополнительной связью (?). Само собой разумеется, что эти оценки справедливы лишь при условии использования полностью совместных конечных элементов. Кроме того, в этих оценках молчаливо предполагается, что внешнее воздействие на систему является чисто силовым.

Но раз так, то отпадает необходимость обсуждать второй тезис наших оппонентов, то есть утверждение о локальном характере возмущения, накладываемого на решение этой связью. Стоит ли преодолевать трудности, создаваемые ради их преодоления?

Есть и другие задачи, для решения которых бесосновательное применение этих конечных элементов сопряжено с риском искажения результатов и/или потери точности расчета. Так, в плоских задачах, когда расчетная область состоит из двух или более регионов, упругие характеристики которых различны (различный материал в задачах строительного проектирования возможен, например, при возведении кирпичной стены на железобетонной стеновой панели), вдоль линий стыковки разнородных материалов производные от перемещений, как известно, терпят разрывы. Объединение в узлах этой линии всех примыкающих конечных элементов по параметру  $\omega_z$  насильственно ликвидирует часть скачков в производных от перемещений. Иначе говоря, на конечноэлементное решение заранее накладывается требование излишней гладкости — ситуация, в некотором смысле, противоположная проблеме несовместности, и по аналогии может быть названа *сверхсовместностью*. Для пользователей программных комплексов не безразличен ответ на вопрос о том, как эта сверхсовместность повлияет на точность расчета.

Мы не можем более фиксировать внимание читателя на обсуждении комплекса вопросов по анализу условий применения обсуждаемых конечных элементов. В конце концов, это все должно составлять предмет специальных публикаций исследовательского характера — для других читателей и, как мы полагаем, другими авторами, которые с большим основанием могут считать себя специалистами в теоретических вопросах обоснования метода конечных элементов. Здесь мы лишь ограничимся рассмотрением всего одного примера, в котором формально отождествляются компоненты вращения  $\omega_z$  с углами поворота  $\theta_z$  соответствующих узлов. С этой целью рассмотрим расчет квадратной пластины, изображенной на рис. 5.16.

Будем считать, что вдоль верхней границы пластины (при  $y = 0$ ) размещен стержень, абсолютно жесткий на изгиб и на растяжение-сжатие, так что в данном случае  $v^\circ(x) = x\theta$ , где  $\theta$  — угол поворота стержня в плоскости  $(X, Y)$ . Закрепляя один из узлов верхней границы пластины (скажем, узел, расположенный в начале системы координат) от горизонтального перемещения, получим, что  $u^\circ(x) = 0$ . При расчете приняты следующие исходные данные к задаче:

- толщина пластины  $h = 1,0$ ;

- габаритные размеры пластины в плоскости (X,Y)  $16,0 \times 16,0$ ;
- характеристики материала  $E = 3 \cdot 10^5$ ,  $\nu = 0,25$ ;
- действующая нагрузка  $P = 1000$ .

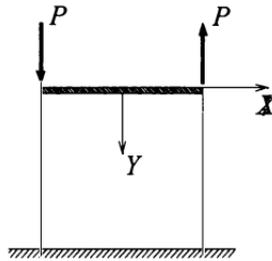


Рис. 5.16. Квадратная пластина, оконтуренная стержнем

Результаты численного эксперимента, проведенного для рассматриваемой задачи, приведены в табл. 5.3 в зависимости от используемой сетки конечных элементов ( $n \times n$ ) и от используемой расчетной модели:

- Случай «А» соответствует бесхитростной модели, содержащей традиционные конечные элементы прямоугольной формы с билинейной аппроксимацией перемещений, то есть конечные элементы с двумя степенями свободы в узле.
- В случае «В» приведены аналогичные данные, полученные с использованием конечных элементов с тремя степенями свободы в узле, причем, в силу объединения узлов верхней границы упругой среды с узлами стержня, эти узлы получают одинаковые повороты, равные общему повороту  $\theta_n$  абсолютно жесткого стержня. Кроме того, нулевые повороты заданы вдоль нижней границы рассматриваемой области.
- Наконец, в случае «С» использованы те же конечные элементы с тремя степенями свободы в узле, но углы поворота узлов балки и соответствующих узлов прямоугольных конечных элементов плоской задачи теории упругости приняты в качестве независимых друг от друга переменных. На нижней границе прямоугольной области углы поворота узлов не включены в краевые условия.

Для каждой из трех моделей в таблице 5.3 представлен угол поворота  $\theta_n$  жесткого стержня и значения соответствующих реактивных сил  $H_n$ , развивающихся во внешней связи, препятствующей горизонтальному перемещению стержня.

Как видно из этой таблицы, погрешность расчета в энергетической метрике (угол поворота  $\theta$  с точностью до постоянного множителя представляет собой работу внешних сил), порождаемая тремя рассматриваемыми моделями, практически мало различается. Однако тенденция все равно заметна, так как из приведенных результатов видно, что  $E_C > E_B$ , что в иных обозначениях есть не что иное как установленное ранее неравенство  $E_n \geq E_n^+$ . Более того, начиная с сетки  $4 \times 4$ , даже и  $E_A > E_B$ , и это несмотря на то, что число задействованных степеней свободы для модели «В» примерно в полтора раза больше числа степеней свободы для модели «А».

Таблица 5.3.

Модель	$n \times n$	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32	64×64
«А»	$\theta_n \cdot 10^4$	11,979	13,314	13,785	13,929	13,972	13,985
	$H_n$	915	890	878	874	873	872
«В»	$\theta_n \cdot 10^4$	12,111	13,302	13,754	13,908	13,960	13,978
	$H_n$	863	877	875	874	873	872
«С»	$\theta_n \cdot 10^4$	14,371	14,123	14,033	14,006	13,996	13,994
	$H_n$	961	886	872	872	872	872

Отметим, что расчеты с традиционными элементами (модель «А») были выполнены по программе **GTSTRUDL**, тогда как для элементов с тремя степенями свободы была использована программа **MicroFE** версии 6.13. Реализованные в **MicroFE** конечные элементы [Семенов В., Семенов П., 1998] используют третью степень свободы в узлах, следуя идеям, восходящим к статье Олмана [Allman, 1984].

Следует также сказать, что, поскольку в **MicroFE**, в отличие от **GTSTRUDL**, отсутствует прямая возможность задания абсолютно жестких тел, горизонтальному стержню была придана конечная жесткость большой величины, а именно в исходных данных на расчет было положено  $EI = 3 \cdot 10^{12}$ ,  $EA = 3 \cdot 10^{15}$ .

В то же время, касательные напряжения в приграничной к горизонтальному стержню зоне при использовании модели «В» падают, как это и следовало ожидать из предшествующих рассуждений. Это отчетливо видно из рис. 5.17, на котором изображены изолинии касательных напряжений, построенные программой **MicroFE** при сетке конечных элементов  $8 \times 8$ .

Кстати говоря, эти изолинии показывают и на подозрительное отсутствие равновесия в указанной зоне — площадь эпюры касательных усилий по горизонтальному сечению пластины непосредственно вблизи стержня значительно меньше аналогичной

площади по сечениям  $y = 4$ ,  $y = 6$  и  $y = 8$ , хотя все они должны равняться величине реактивной силы  $H$ . В случае модели «С» этот эффект пропадает.

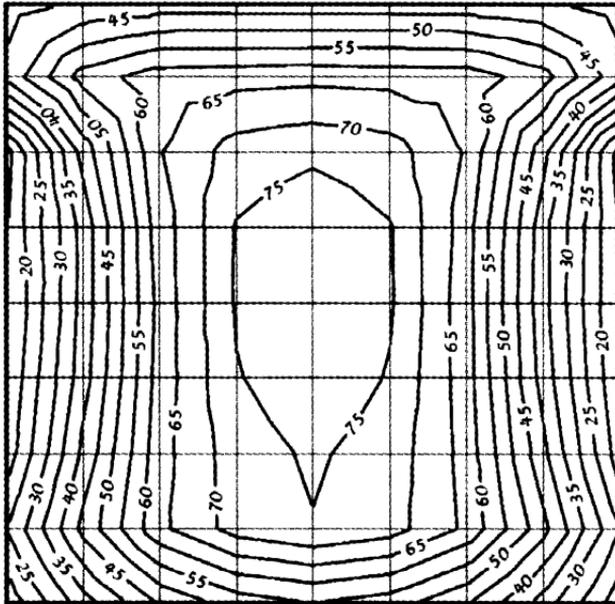


Рис. 5.17. Изолинии касательных напряжений для модели «В»

Перейдем теперь к рассмотрению продольных и поперечных сил в стержневых элементах, примыкающих к пластине. Можно показать, что при действии сосредоточенной силы в плоской задаче теории упругости перемещение точки приложения этой силы в направлении действия силы имеет особенность.

Например, в той же самой задаче о круглой, закрепленной от перемещений по контуру пластине (рис. 5.15), но под действием приложенной к шайбе и направленной вдоль радиуса силы  $P$ , соответствующее перемещение  $u$  шайбы будет [Лукаевич, 1982] равно

$$u = \frac{P}{8\pi Gh} \left[ (3-\nu) \ln \frac{c}{R} - \frac{(1+\nu)^2 (c^2/R^2 - 1)}{(3-\nu)(c^2/R^2 + 1)} \right], \quad (5.36)$$

и, таким образом, при  $c \rightarrow 0$  имеется логарифмическая особенность.

Повторяя предшествующие рассуждения для изгибающего момента, мы приходим к выводу, что при точном решении задачи с точечным сопряжением (т.е. сопряжением в одиночном узле) стержня и плоской задачи теории упругости передающееся на стержень

усилие должно равняться нулю. И опять-таки, отличные от нуля значения поперечных и продольных сил, формально получающиеся в стержнях в результате расчета дискретной модели, обязаны своим происхождением исключительно погрешности дискретизации. Сама же расчетная схема (не путать с ее дискретным аналогом!) наводит как нулевые моменты, так и нулевые усилия в стержнях.

К этому же выводу можно придти и в результате численных экспериментов, если внимательно проанализировать результаты расчетов, получающихся при сгущении сетки в случае действия сосредоточенной силы на пластину. С этой целью вновь вернемся к задаче, изображенной на рис. 5.16, однако на этот раз будем считать, что граница  $y = 0$  не подкреплена каким-либо стержнем, и система нагружена не двумя, а одной вертикальной силой  $P$ , приложенной непосредственно к пластине в точке с координатами  $(0,0)$ .

В табл. 5.4 приведены результаты решения этой задачи, где  $v_n$  — перемещение точки приложения силы  $P$  в направлении оси  $Y$ , и ясно, что отслеживаемое перемещение, как и следовало ожидать, неограниченно нарастает вместе со сгущением сетки конечных элементов.

Итак, общий вывод таков: точечное сопряжение стержневых элементов и элементов плоской задачи теории упругости, в принципе приводит к некорректной постановке задачи.

Таблица 5.4.

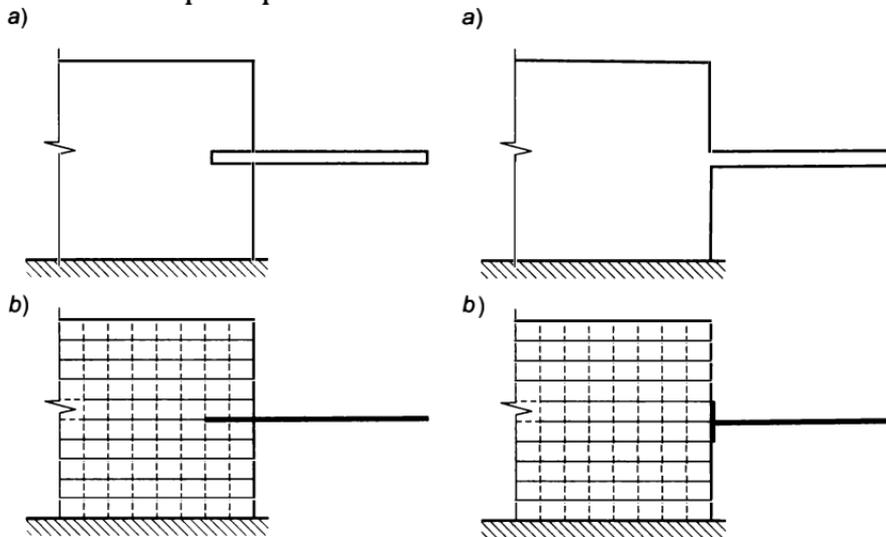
$n \times n$	2x2	4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
$v_n \cdot 10^4$	55,278	68,282	82,665	97,296	111,989	126,695

Каким же образом откорректировать исходную механическую модель или, что то же самое, математическую постановку задачи, позволяющую адекватно отобразить работу реальной конструкции? Как уже было сказано выше, для этого нужно детальнее рассмотреть конструктивные особенности сопряжения стержня и диафрагмы.

Пусть, например, стальной ригель двутаврового сечения заведен на части своей длины в кирпичную стену, как это показано на рис. 5.18,а. Тогда в расчетной схеме, в том числе и в дискретном ее аналоге, достаточно учесть проникающий на соответствующую длину в область плоской задачи одномерный элемент-стержень, как это показано на рис. 5.18,б.

Иной вариант расчетной схемы можно предложить в случае монолитного сопряжения железобетонной стеновой панели и ригеля каркаса здания — рис. 5.19,а. Здесь можно учесть фактические размеры сечения — высоту ригеля, на протяжении которой вдоль

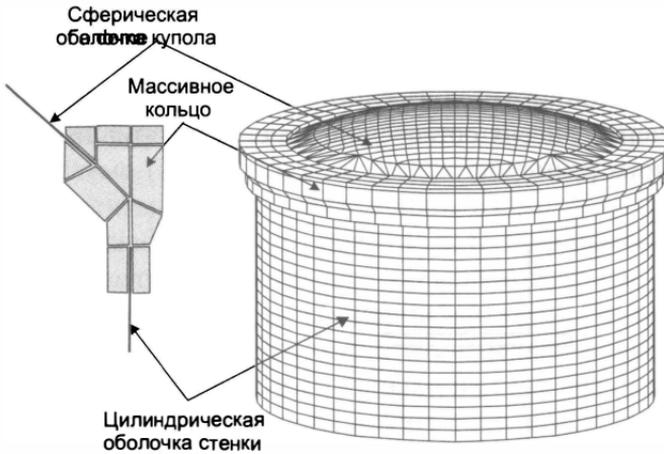
границы стены уместно разместить абсолютно жесткое тело, как это показано на рис. 5.19, *b*. Это абсолютно жесткое тело для самого ригеля корреспондируется с гипотезой плоских сечений, согласно которой сечение ригеля остается после его деформации плоским и не изменяет своих размеров.



**Рис. 5.18.** Заделка консоли в стенку **Рис. 5.19.** Монолитное сопряжение

Разумеется, приведенные здесь два варианта формирования расчетных схем не исчерпывают всего многообразия возможных ситуаций, так что в каждом конкретном случае расчетчик должен исходить из конструктивных особенностей задачи, а не из неких заранее выдуманных, условных и подходящих на все случаи жизни схем.

Вместе с тем следует отметить, что прием «разноса области тримыкания» по типу рис. 5.18 может использоваться и в других случаях сопряжения элементов различной размерности. На рис. 5.20 показан пример такого сопряжения, в котором цилиндрическая оболочка стенки и сферическая оболочка крышки защитной конструкции атомного реактора сопрягается с массивным кольцом. Необходимо заметить, что в месте взаимопроникновения конструкций появляется некоторое возмущение жесткостных параметров за счет суммирования жесткостей оболочки и трехмерного тела в тех частях, которые занимают одно и то же положение в пространстве. Это следует учесть при назначении величин жесткости.



**Рис. 5.20.** Сопряжение стенки и крышки защитной оболочки реактора с массивным кольцом.

### 5.3.3. Стержни + объемные элементы

Задачи, в расчетных схемах которых участвуют как стержневые элементы, так и объемные элементы, возникают, например, при совместном расчете стержневого каркаса здания и массивных фундаментов под колонны. Порождаемые такими ситуациями проблемы формирования корректных расчетных схем аналогичны рассмотренным в предыдущем пункте, и мы не будем останавливаться на них подробно. Как и в случае сопряжения стержней с элементами плоской задачи теории упругости, формальная узловая стыковка здесь также недопустима, и в расчетную схему необходимо внести коррективы, отвечающие конструктивным особенностям сопряжения стержня с трехмерным телом. На деталях мы не останавливаемся.

### 5.3.4. Плиты + пластины (сопряжение оболочечных элементов)

При расчете пространственных листовых конструкций, складчатых оболочек, а также гладких оболочек при аппроксимации геометрии последних кусочно-линейными поверхностями, возникает задача сопряжения элементов плоского напряженного состояния (пластин) с плоскими изгибаемыми элементами (плитами), стыкуемыми вдоль общей границы под некоторым углом  $\alpha$  (рис. 5.21). Если каждый из

конечных элементов, участвующих в формировании дискретной расчетной схемы, является одновременно и плитой, и пластиной (такой конечный элемент часто называют плоским элементом оболочки), то обычно такой конечный элемент наделяют пятью степенями свободы в узле.

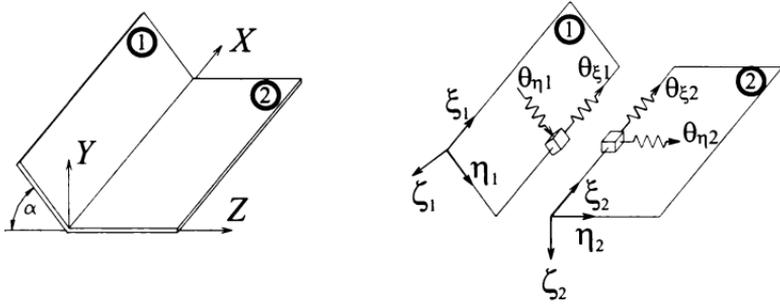


Рис. 5.21. Сопряжение плоских элементов оболочки под углом

Введем местную декартову правоориентированную координатную систему  $(\xi, \eta, \zeta)$ , связанную с отдельным плоским элементом так, что оси  $\xi, \eta$  совмещаются со срединной плоскостью элемента, а ось  $\zeta$  ортогональна первым двум осям.

Пусть  $u, v, w$  — линейные перемещения точек срединной поверхности оболочки относительно местной системы координат,  $\theta_\xi, \theta_\eta$  — углы поворота нормалей к срединной поверхности оболочки вокруг осей  $\xi, \eta$  соответственно, причем

$$\theta_\xi = \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \theta_\eta = -\frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (5.37)$$

Эти 5 параметров —  $u, v, w, \theta_\xi, \theta_\eta$  (точнее, значения этих функций в узловых точках конечных элементов) отвечают пяти степеням свободы каждого из узлов плоского конечного элемента оболочки.

Пусть  $(X, Y, Z)$  — глобальная координатная система, которую будем всегда считать ортогональной декартовой правоориентированной системой координат. Введем в рассмотрение матрицу направляющих косинусов  $\Lambda$ , определяющую взаимную ориентацию глобальной и местных координатных систем. Имеем

$$\Lambda = \begin{array}{ccc|c} \xi & \eta & \zeta & \\ \hline \lambda_{x\xi} & \lambda_{x\eta} & \lambda_{x\zeta} & \mathbf{X} \\ \lambda_{y\xi} & \lambda_{y\eta} & \lambda_{y\zeta} & \mathbf{Y} \\ \lambda_{z\xi} & \lambda_{z\eta} & \lambda_{z\zeta} & \mathbf{Z} \end{array}.$$

Компоненты полного вектора поворота  $\theta$  узла отдельного конечного элемента относительно глобальной координатной системы  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  можно теперь выразить через его составляющие относительно местной координатной системы  $(\theta_\xi, \theta_\eta, 0)$ :

$$\theta_x = \lambda_{x\xi}\theta_\xi + \lambda_{x\eta}\theta_\eta + \lambda_{x\zeta}0,$$

$$\theta_y = \lambda_{y\xi}\theta_\xi + \lambda_{y\eta}\theta_\eta + \lambda_{y\zeta}0,$$

$$\theta_z = \lambda_{z\xi}\theta_\xi + \lambda_{z\eta}\theta_\eta + \lambda_{z\zeta}0.$$

Если угол  $\alpha$ , под которым пересекаются две соседние плоскости оболочки (рис. 5.21), отличен от нуля и от  $\pi$ , то любой лежащий на пересечении этих плоскостей узел будет наделяться тремя линейно независимыми поворотами, т.е. тремя вращательными степенями свободы. Действительно, как это видно из рис. 5.21, две пары вращений  $(\theta_{\xi_1}, \theta_{\eta_1})$  и  $(\theta_{\xi_2}, \theta_{\eta_2})$  не компланарны (не лежат в одной плоскости) и поэтому образуют в трехмерном пространстве три линейно независимых поворота. Таким образом, лежащий на границе узел будет обладать всеми шестью степенями свободы. Теперь представим себе, что хотя бы для одной пары плоскостей угол  $\alpha$  равен  $\pi$ . Тогда лежащий на стыке этих плоскостей узел потеряет одну из трех вращательных степеней свободы, поскольку все четыре вращения  $(\theta_{\xi_1}, \theta_{\eta_1})$  и  $(\theta_{\xi_2}, \theta_{\eta_2})$  лежат в одной плоскости и не образуют компоненты вектора поворота, ортогональной этой плоскости.

Здесь возникает первая проблема, связанная с сопряжением плоских оболочечных элементов. Часть узлов наделяется шестью степенями свободы, а часть — только пятью. Некоторые, наиболее продвинутые программные разработки отслеживают эту ситуацию, автоматически назначая каждому узлу только те степени свободы, которые наводятся всеми инцидентными этому узлу конечными элементами. В иных случаях пользователь вынужден будет вручную управлять этим процессом, накладывая внешние связи на повороты узлов, которым не сопротивляются примыкающие к узлу элементы.

Во многих разработках традиционно принимается концепция наделения расчетной схемы типовым для данной схемы узлом. Во входной информации это выражается таким понятием, как *тип конструкции (тип схемы)*, под которым понимается совокупность степеней свободы типового узла. Например, тип конструкции «пространственная ферма» связывается с наделением узла тремя степенями свободы, отвечающими его линейным перемещениям в трех некомпланарных направлениях; типу конструкции «плоская рама» отвечают узлы с двумя линейными неколлинеарными

перемещениями и поворотом, вектор которого ортогонален плоскости линейных перемещений.

Концепция типа конструкции не бессмысленна — она полезна, например, для отслеживания некоторых типов ошибок во входной информации. Если, скажем, в расчетной схеме с типом конструкции «плоская рама» встречается конечный элемент изгибаемой плиты, то программа имеет возможность выплеснуть в лицо пользователя всё, что о квалификации такого пользователя издевательски успели подумать разработчики. Однако, по нашему мнению, если уж следовать этой концепции, то стоит быть последовательными и идти до конца. Ну почему всего только 5 типов конструкции предусматривается во входной информации к задаче? Зачем же заранее ограничивать фантазию пользователей?

Если с каждым из узлов связать свою локальную систему координат (простая, но полезная идея, в настоящее время реализованная уже во многих разработках), то, ограничиваясь здесь твердотельными узлами (см. по этому поводу раздел 4.2), можно придать каждому из этих узлов до 6 степеней свободы, соотнося соответствующие этим степеням свободы линейные  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_\gamma$  и угловые  $\theta_\alpha$ ,  $\theta_\beta$ ,  $\theta_\gamma$  перемещения узлов с их компонентами относительно локальной системы координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . В таком случае «тип конструкции» может быть определен табличкой:

$u_\alpha$	$u_\beta$	$u_\gamma$	$\theta_\alpha$	$\theta_\beta$	$\theta_\gamma$

где в нижней строке пользователю разрешается проставлять пометки (единички, галочки, плюсики — в зависимости от персональных предпочтений разработчика), свидетельствующие о наделении типового узла соответствующей степенью свободы. Ясно, что таким образом всего можно построить  $2^6 - 1 = 63$  «типов конструкции» — есть, где разгуляться пользовательской фантазии. Вариант конструкции с узлами, вообще не наделенными какими либо степенями свободы, мы исключаем из рассмотрения, как вырожденный случай.

И все же, что лучше: концепция «тип конструкции» или присваивание каждому из узлов степеней свободы, наводимых инцидентными этому узлу элементами? Мы предпочитаем ответ «оба лучше», так как лишняя степень свободы пользователя (не узла!) обеспечивает этого пользователя большей возможностью для маневра. Кстати говоря, вариант с пустыми полями в приведенной выше табличке может быть использован для отказа пользователя от

концепции «тип конструкции» и передаче программе ответственности за автоматическое наделение каждого из узлов необходимыми степенями свободы.

Возвратимся теперь к нашей задаче о сопряжении плоских оболочечных элементов, предполагая, что с проблемой согласования степеней свободы узлов по их количеству мы тем или иным способом справились. Представим себе для простоты, что две пересекающиеся плоскости взаимно ортогональны, т.е. угол  $\alpha$  на рис. 5.21 равняется  $\pi/2$ . Тогда участок линии пересечения двух плоскостей, расположенный между двумя соседними узлами на этой линии, принадлежа одновременно двум конечным элементам, в одном из элементов получит межузловые перемещения, распределенные по одному закону (скажем, по линейному закону при перемещениях границы в плоскости элемента), а в другом элементе — по другому закону (скажем, по полиномиальному закону при перемещениях границы из плоскости элемента). Понятно, что в такой ситуации на межузловой границе возникнут разрывы уже в самих перемещениях, иначе говоря, конечные элементы изгибаемой плиты и пересекающейся с ней (под углом, не кратным  $\pi$ ) пластины плоского напряженного состояния несовместны между собой.

Первый же вопрос, естественным образом возникающий у пользователя, таков: насколько эта несовместность опасна с точки зрения нарушения условий сходимости конечноэлементной схемы?

Качественная картина влияния отмеченной несовместности на сходимость конечноэлементной схемы может быть получена на основе следующего простого рассуждения.

В нашей задаче с ортогональным пересечением двух смежных плоскостей введем глобальную систему декартовых координат  $(X, Y, Z)$ , как это показано на рис. 5.21. Пусть  $u_1(x, y)$ ,  $v_1(x, y)$ ,  $w_1(x, y)$  — перемещения точек плоскости 1 в направлении осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно, а  $u_2(z, x)$ ,  $v_2(z, x)$ ,  $w_2(z, x)$  — перемещения точек плоскости 2 в тех же направлениях. Тогда условия сопряжения на общей границе двух плоскостей можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(0, x), & v_1(x, 0) &= v_2(0, x), \\ w_1(x, 0) &= w_2(0, x), & \theta_{1x}(x, 0) &= \theta_{2x}(0, x), \end{aligned} \quad (5.38)$$

где

$$\theta_{1x}(x, 0) = \frac{\partial w_1}{\partial y}(x, 0), \quad \theta_{2x}(0, x) = -\frac{\partial w_2}{\partial z}(0, x).$$

И это все! Любые дополнительные условия сопряжения, не вытекающие непосредственно из соотношений (5.38) приводят к математически некорректной постановке задачи.

Понятно, что беспокоящие нас разрывы в перемещениях связаны с нарушениями второго и третьего из условий сопряжения (5.38). Достаточно остановиться на одном из них, скажем, на втором условии, которое выполняется в узловых точках, лежащих на линии пересечения двух плоскостей, и нарушается между этими узлами. Пометим индексами  $i$  и  $i+1$  координаты и компоненты перемещений, относящиеся к двум смежным узлам, лежащим на рассматриваемой линии пересечения двух плоскостей. Тогда для всех  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , полагая

$$l = x_{i+1} - x_i, \quad \xi = (x - x_i) / l,$$

имеем

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) &= v_i L_1(\xi) + v_{i+1} L_2(\xi), \\ v_2(0, x) &= v_i H_1(\xi) + \theta_{i,z} l H_2(\xi) + v_{i+1} H_3(\xi) + \theta_{i+1,z} l H_4(\xi), \end{aligned} \quad (5.39)$$

где помимо уже введенных обозначений положено:

- $L_1(\xi) = 1 - \xi$ ,  $L_2(\xi) = \xi$  — линейные функции,
- $H_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$ ,  $H_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi$ ,
- $H_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2$ ,  $H_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2$  — полиномы Эрмита,
- $\theta_{i,z}, \theta_{i+1,z}$  — повороты узлов  $i$  и  $i+1$  соответственно вокруг оси  $Z$ ,
- $v_i, v_{i+1}$  — линейные перемещения узлов  $i$  и  $i+1$  в направлении оси  $Y$ .

Отметим, что выражение для  $v_2(0, x)$  по (5.39) справедливо для прямоугольных элементов Адини-Клафа.

При сгущении сетки расстояние  $l$  между соседними узлами стремится к нулю, так что углы поворотов узлов  $\theta_{i,z}$  и  $\theta_{i+1,z}$  могут быть заменены разностными отношениями, выполняющимися с тем большей точностью, чем меньше величина  $l$ . С учетом принятого правила знаков для поворотов можно записать

$$\theta_{i,z} = \theta_{i+1,z} = (v_{i+1} - v_i) / l. \quad (5.40)$$

Заменив теперь повороты в (5.39) разностными отношениями по (5.40), получим, что  $v_1(x, 0) = v_2(0, x)$ , то есть в пределе при сгущении сетки разрывы в перемещениях ликвидируются.

В попытках одновременного решения как проблемы согласования по количеству степеней свободы узлов, лежащих и не лежащих в одной плоскости со всеми примыкающими к ним плоскими оболочечными элементами, так и проблемы несовместности перемещений у элементов, стыкуемых под углом, не равным нулю или  $\pi$ , в некоторых программных комплексах вводятся конечные элементы плоской оболочки, оснащаемые шестой степенью свободы, причем этой степени свободы придается геометрический смысл поворота узла в плоскости конечного элемента. Несовместность перемещений для этих элементов полностью устранить не удастся, но сходимости конечноэлементной схемы при этом гарантируется за счет выполнения условий кусочного тестирования. Однако, в этом случае вдоль линии пересечения двух плоскостей расчетная программа фактически требует выполнения не четырех условий сопряжения, указанных в (5.38), а шести, при этом два дополнительных условия сопряжения нарушают корректность постановки задачи. Для иллюстрации вернемся к нашему примеру об ортогональном пересечении двух плоскостей.

Если для плоскости 1 ввести компоненту вращения  $\omega_{1z}$  (скажем, как средний поворот в окрестности рассматриваемой точки, т.е. узла), и вдоль общей границы двух плоскостей потребовать совпадения  $\omega_{1z}$  с поворотом  $\theta_{2z}$  нормали к срединной поверхности в плоскости 2, то получим

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) \right] = \frac{\partial v_2}{\partial x}(0,x), \quad (5.41)$$

откуда с учетом (5.38) приходим к условию отсутствия сдвигов в плоскости 1 в месте сопряжения ее с плоскостью 2, то есть

$$\gamma_{1xy}(x,0) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,0) + \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,0) = 0. \quad (5.42)$$

Совершенно аналогично получается и второе дополнительное условие вдоль линии сопряжения двух плоскостей, а именно:

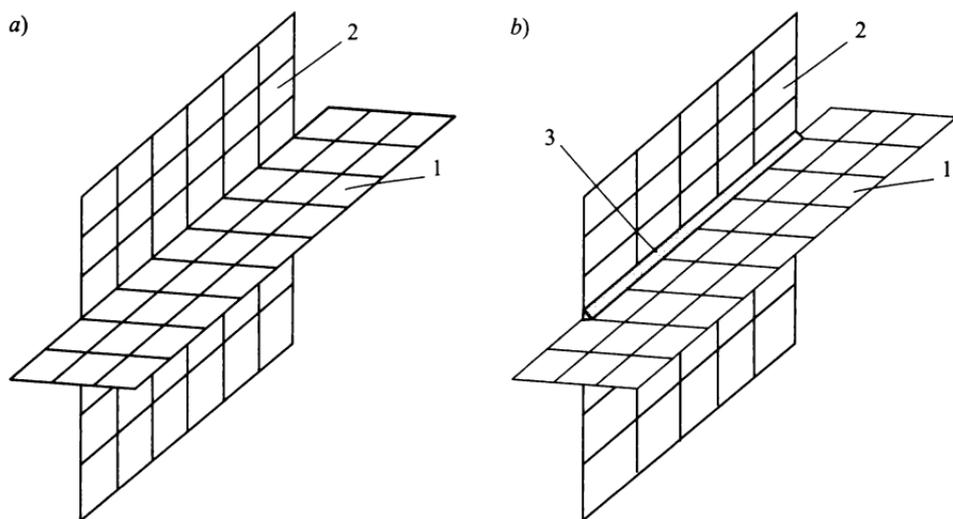
$$\gamma_{2zx}(0,x) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(0,x) + \frac{\partial w_2}{\partial x}(0,x) = 0. \quad (5.43)$$

Понятно, что соотношения (5.42) и (5.43) представляют собой условия взаимного проскальзывания двух плоскостей вдоль координатной оси X, то есть противоречат первому из условий сопряжения в (5.38), на механическом уровне интерпретируемых как раз как условия «склеивания» двух плоскостей.

Итак, еще раз повторим: нет ничего плохого во введении дополнительной шестой степени свободы, однако пользователь должен ясно понимать ее смысл и не отождествлять формально с углом поворота соответствующего узла. Это особенно существенно при формулировке краевых условий и условий сопряжения стыкуемых под углом различных плоскостей складчатой оболочки.

### 5.3.5. Использование специальных методов стыковки элементов

Сказанное выше о сопряжении оболочечных элементов предполагало, что у сопрягаемых частей конструкции (например, у элементов стены и перекрытия) по линии стыка совпадают узлы конечноэлементного разбиения (рис. 5.22,а). Такое требование является обязательным для большинства расчетных конечноэлементных программ. Более того, многие программы снабжены функцией автоматического обеспечения такой стыковки за счет построения соответствующего сеточного разбиения.



**Рис. 5.22.** Согласование сеточного разбиения:

1 — перекрытие, 2 — стена, 3 — зона контакта («замок»)

Здесь возможна сдвигка узлов, добавление в стыкуемые части узлов и дополнительное дробление сетки, и другие приемы. Однако их автоматическое использование не всегда приводит к хорошим результатам, часто здесь возможна заметная потеря точности, поскольку переходные элементы могут сильно искажаться по

сравнению с другими элементами, что особенно небезопасно в местах сингулярности напряженно-деформированного состояния (а такое часто наблюдается именно в местах стыковки отдельных плоскостей).

Имеются также предложения по применению специальных соединительных элементов-замков (в англоязычной литературе используется название Zirreg-метод), с помощью которых реализуются условия сопряжения сеток.

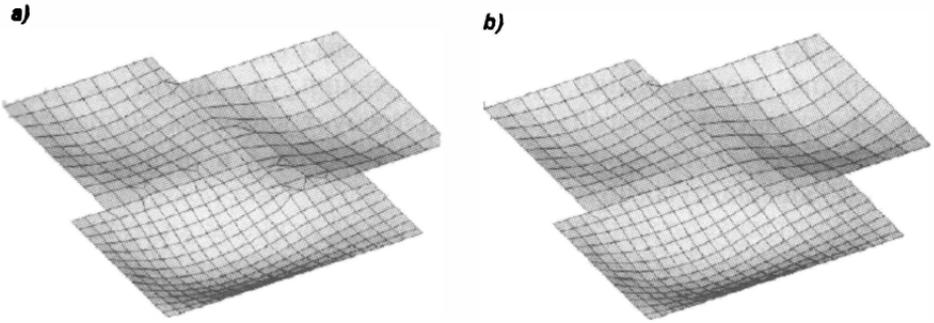
Существуют, однако, и другие подходы к решению этой задачи. В основу их положено использование дополнительных условий, задаваемых на сопрягаемых поверхностях или линиях [Семенов & Семенов, 2006]. Полагая всю рассматриваемую конструкцию как объединение отдельных частей, вместо функционала потенциальной энергии всего тела рассматривают некоторый вспомогательный функционал, включающий сумму частных функционалов потенциальной энергии отдельных тел и условия их сопряжения, включаемые в функционал с помощью стандартной техники множителей Лагранжа.

На этом пути получают вариационные условия, оперирующие полями перемещений в отдельных частях тела как независимыми переменными, что дает возможность для разных частей тела использовать различные аппроксимации перемещений. Что же касается условий сопряжения решений на общих границах различных частей тела, то эти условия (как статические, так и кинематические выполняются лишь в интегральном смысле - за счет выбора соответствующих лагранжевых множителей.

Реализация подобного подхода предусматривает модификацию схемы построения глобальной матрицы жесткости, когда вместо прямого суммирования элементов матриц жесткостей используются специальные алгоритмы, зависящие от типов контактирующих конструктивных элементов и от принятого метода реализации взаимодействия между узлами. Здесь возможен и максимальный полный учет реальных размеров конструкций и условий их контакта для стен и колонн, стен и балок, плит и ребер жесткости, стержневых и объемных элементов [Семенов & Семенов, 2006], все зависит от того каков набор типовых ситуаций предусмотрен в программе.

На рисунке 5.23 показан результат расчета описанным методом заимствованный из документации к программе Ing+, поставляемой фирмой ТЕХСОФТ.

Результаты хорошие, хотя гарантировать такое качество во всех случаях трудно, ввиду недоказанности сходимости использованного подхода.



**Рис. 5.23.** Расчетные прогибы перекрытия:  
 $a$  — на совместной сетке,  $b$  — на несовместной сетке.

#### 5.4. Об одном парадоксе при сочетании стержней Бернулли и стержней Тимошенко в расчетной схеме

В предыдущем разделе были рассмотрены некоторые проблемы, которые могут возникнуть при расчете сложных систем, имеющих в своем составе конечные элементы различной размерности. Продолжая эту тему, покажем здесь, что источники опасных ошибок не исчерпываются различием в размерностях конечных элементов расчетной схемы.

Сочетание в одной расчетной схеме элементов (стержней) одинаковой размерности, но базирующихся на различных теориях, также требует внимательного отношения расчетчика к формированию расчетной схемы конструкции. Комплексные механические модели подобного рода могут провоцировать получение некорректных результатов расчета.

В качестве иллюстрации высказанного положения рассмотрим следующую простую по своей постановке задачу, приводящую к парадоксальному, на первый взгляд, результату.

Пусть требуется произвести расчет однопролетной многоэтажной (40 этажей) рамы (так называемой «этажерки»), изображенной на рис. 5.24.

Представим себе, что обе стойки рамы выполнены из одного и того же материала и имеют сечения в виде прямоугольников одинаковой ширины  $b$  (размер сечения в направлении, перпендикулярном плоскости рамы), но различной высоты  $h$  (размер сечения в плоскости

рамы). Пусть высота сечения  $h_1$  более мощной стойки рамы (стойки 1 на рис. 5.24) относится к полной высоте рамы  $l$  как  $1/5$ . Известно, что для таких соотношений высоты сечения и длины стержня классическая теория изгиба стержней требует внесения поправки за счет существенного влияния деформаций сдвига в общей картине деформированного состояния стержня.

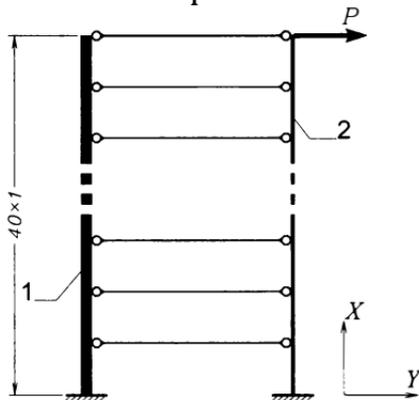


Рис. 5.24. Схема этажерки

В этих условиях расчетчик обычно принимает решение о необходимости учета деформаций сдвига. Иначе говоря, для стойки 1 в расчетной схеме используется теория Тимошенко для изгибаемого стержня. Пусть, далее, высота сечения  $h_2$  стойки 2 в три раза меньше, чем  $h_1$ . Поскольку при этом  $h_2/l = 1/15$ , то для стойки 2 логично принять решение об использовании классической теории изгиба стержней, то есть теории Бернулли—Эйлера, основанной на гипотезе плоских сечений при пренебрежении деформациями сдвига. Что касается шарнирно присоединенных к стойкам ригелей, то будем считать их недеформируемыми в продольном направлении, то есть абсолютно жесткими на растяжение-сжатие.

Для прямоугольного сечения размерами  $(b \times h)$  несложно найти соотношение между изгибной  $EI$  и сдвиговой  $GF$  жесткостями стержня как функции основного безразмерного параметра  $h/l$  и длины стержня  $l$ . Здесь и далее  $I$  — момент инерции сечения стержня,  $F$  — площадь сдвига, учитывающая так называемый коэффициент формы сечения, который для сечения прямоугольной формы равен  $6/5$ , так что

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad F = \frac{5}{6}bh.$$

Имея в виду, что модуль упругости материала  $E$  и модуль сдвига  $G$  связаны соотношением  $G = E/(2+2\nu)$ , где  $\nu$  — коэффициент Пуассона, и полагая для определенности  $\nu = 0,25$ , получим отсюда

$$EI = l^2 GF \left(\frac{h}{2l}\right)^2. \quad (5.44)$$

Расчет изображенной на рис. 5.24 рамы не представляет каких либо затруднений, и может быть выполнен по любой из имеющихся в распоряжении инженера-расчетчика программных систем, способных обрабатывать как стержни Тимошенко, так и классические стержни Бернулли—Эйлера. Возьмем для примера следующую (условную и заданную в условных единицах измерения) жесткостную характеристику, а именно положим

$$GF_1 = 0,25 \cdot 10^9.$$

Тогда

$$EI_1 = (40)^2 \times 0,25 \cdot 10^9 \times (1/5)^2/4 = 4,0 \cdot 10^9, \quad EI_2 = EI_1 (h_2/h_1)^3 = 1,481 \cdot 10^8.$$

Естественно ожидать, что основная часть нагрузки будет восприниматься более мощной стойкой, то есть стойкой 1, так как ее изгибная жесткость  $EI_1$  в 27 раз превышает аналогичную жесткость  $EI_2$  стойки 2. Однако, результаты выполненного расчета неожиданно (на первый взгляд) показывают, что значение поперечной силы в нижнем сечении стойки 1 равняется  $Q_1(0) = 0,444P$ , тогда как на стойку 2 передается вся оставшаяся часть нагрузки, то есть  $Q_2(0) = 0,556P$ . Подобное распределение поперечных сил  $Q_1(0) < Q_2(0)$  противоречит (и правильно противоречит!) привычной инженерной интуиции, ожидающей как раз противоположного результата.

Для того, чтобы понять причины происхождения этого эффекта, представим себе близкую к изображенной на рис. 5.24 идеализированную модель, а именно: предположим, что обе стойки по всей высоте  $l$  соединены непрерывно расположенными связями, обеспечивающими полную совместность поперечных перемещений стоек 1 и 2 — перемещений  $v(x)$  в направлении оси  $Y$ . Краевые условия в месте заделки стоек записываются при этом в виде

$$\begin{aligned} \text{для стойки 1:} \quad & v(0) = 0, \quad \theta_1(0) = 0, \\ \text{для стойки 2:} \quad & v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где через  $\theta_1(x)$  обозначен угол поворота поперечного сечения стойки 1, расположенного на расстоянии  $x$  по вертикали от заделки. Для стержня Тимошенко угол сдвига  $\gamma_1(x)$  определяется разностью угла

наклона касательной к изогнутой оси стержня  $v'(x)$  и угла поворота  $\theta_1(x)$  поперечного сечения стержня

$$\gamma_1(x) = v'(x) - \theta_1(x), \quad (5.46)$$

а поперечная сила  $Q_1(x)$  пропорциональна углу сдвига с коэффициентом пропорциональности, равным сдвиговой жесткости стержня  $GF_1$ , то есть

$$Q_1(x) = GF_1 \gamma_1(x). \quad (5.47)$$

Для рассматриваемой нами идеализированной схемы соединения двух стержней, имея в виду краевые условия (5.45), из (5.46) и (5.47) немедленно получим, что  $Q_1(0) = 0$ , откуда и из уравнения равновесия для рамы в целом в проекциях на ось  $Y$  следует, что  $Q_2(0) = P$ .

Итак, в идеализированной модели из двух стоек с непрерывно распределенными связями вся нагрузка в месте заделки воспринимается целиком стержнем Бернулли, причем этот вывод справедлив **вне зависимости от соотношения изгибных жесткостей двух стоек, а также от относительного (но, что существенно, конечного) значения сдвиговой жесткости в стойке 1!**

В исходной задаче о 40-этажной раме связи, обеспечивающие совместность поперечных перемещений двух стоек, распределены не непрерывно, а заданы в конечном множестве точек, поэтому поперечная сила в месте заделки стойки 2 рамы несколько ниже полной величины нагрузки  $P$ . Следует заметить, что проявление этого эффекта для рамной конструкции существенным образом зависит не только от частоты расположения поперечных связей (в нашем случае — ригелей рамы), но и от относительных величин жесткостных характеристик стоек на изгиб и сдвиг соответственно.

Рассмотрим подробнее работу идеализированной модели, однако для большей общности будем считать, что обе стойки работают в соответствии с теорией стержней Тимошенко. Вариант этой же задачи со стойкой 2 как стойкой Бернулли будет получен как частный случай более общей задачи о двух стойках Тимошенко с помощью предельного перехода.

Проще всего получить разрешающую систему дифференциальных уравнений для рассматриваемой задачи, воспользовавшись вариационным принципом Лагранжа. С этой целью выпишем выражение для полной потенциальной энергии системы — функционал Лагранжа  $L$ . Имеем

$$L(v, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_1(\theta_1')^2 + EI_2(\theta_2')^2 + GF_1(v' - \theta_1)^2 + GF_2(v' - \theta_2)^2] dx - Pv(l), \quad (5.48)$$

где первые два слагаемых под знаком интеграла определяют накапливаемую в стержнях энергию деформации изгиба, а следующие два — энергию деформации сдвига. Здесь, как и ранее, нижним индексом 1 помечены величины, относящиеся к стойке 1, а индексом 2 — аналогичные величины для стойки 2. Указанные в круглых скобках функциональные аргументы в левой части формулы (5.48) подчеркивают независимость этих параметров при варьировании функционала  $L$ .

Необходимые условия минимума полной потенциальной энергии системы  $\delta L = 0$  отыскиваются на множестве независимо варьируемых функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) краевым условиям

$$v(0) = 0, \quad \theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0. \quad (5.49)$$

Приравнявая первую вариацию функционала  $L$  нулю, получим после применения формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{ [GF_1(v' - \theta_1)' + GF_2(v' - \theta_2)'] \delta v + [EI_1\theta_1'' + GF_1(v' - \theta_1)] \delta \theta_1 + \\ & + [EI_2\theta_2'' + GF_2(v' - \theta_2)] \delta \theta_2 \} dx + [EI_1\theta_1' \delta \theta_1] \Big|_0^l + [EI_2\theta_2' \delta \theta_2] \Big|_0^l + \\ & + \{ [GF_1(v' - \theta_1) + GF_2(v' - \theta_2)] \delta v \} \Big|_0^l - P \delta v(l) = 0, \end{aligned} \quad (5.50)$$

откуда, с учетом главных краевых условий (5.49), получаем для функционала  $L$  уравнения Эйлера

$$\begin{aligned} GF_1(v'' - \theta_1'') + GF_2(v'' - \theta_2'') &= 0, \\ EI_1\theta_1'' + GF_1(v' - \theta_1) &= 0, \\ EI_2\theta_2'' + GF_2(v' - \theta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

и естественные краевые условия

$$\theta_1'(l) = 0, \quad \theta_2'(l) = 0, \quad GF_1[v'(l) - \theta_1(l)] + GF_2[v'(l) - \theta_2(l)] = P. \quad (5.52)$$

Первые два из краевых условий в (5.52) вызваны отсутствием изгибающих моментов на свободных концах стоек, тогда как третье

краевое условие в (5.52) обеспечивает равенство суммарной поперечной силы на концах стоек действующей нагрузке  $P$ .

Интегрируя один раз первое из уравнений в (5.51), получим с учетом третьего из краевых условий в (5.52)

$$GF_1(v' - \theta_1) + GF_2(v' - \theta_2) = P, \quad (5.53)$$

что свидетельствует о равенстве суммарной поперечной силы в двух стойках величине действующей нагрузки  $P$  при любом значении независимой координаты  $x$ .

Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры:

$$k_1 = \frac{EI_1}{l^2 GF_1}, \quad k_2 = \frac{EI_2}{l^2 GF_2}, \quad t = \frac{GF_2}{GF_1}, \quad \lambda = \frac{EI_1}{EI_2}, \quad (5.54)$$

а также относительный прогиб  $u = v/l$  и относительную координату  $\xi = x/l$ .

В безразмерных параметрах уравнение (5.53) и последние два из уравнений в (5.51) переписываются в виде (начиная с этого момента и далее в этом разделе, штрихом будет обозначаться операция дифференцирования по безразмерной координате  $\xi$ )

$$u' - \theta_1 + t(u' - \theta_2) = \frac{P}{GF_1}, \quad u' - \theta_1 + k_1 \theta_1'' = 0, \quad u' - \theta_2 + k_2 \theta_2'' = 0. \quad (5.55)$$

Из (5.55) немедленно находим, что

$$k_1 \theta_1'' + t k_2 \theta_2'' = -\frac{P}{GF_1}, \quad (5.56)$$

откуда после интегрирования получаем

$$k_1 \theta_1 + t k_2 \theta_2 = -\frac{P\xi^2}{2GF_1} + C_1 + C_2\xi.$$

Воспользовавшись краевыми условиями  $\theta_1(0) = 0$ ,  $\theta_2(0) = 0$ ,  $\theta_1'(1) = 0$ ,  $\theta_2'(1) = 0$ , находим константы интегрирования  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = P/GF_1$  и, следовательно,

$$k_1 \theta_1 + t k_2 \theta_2 = \frac{P(2\xi - \xi^2)}{2GF_1}. \quad (5.57)$$

Исключая  $u'$  из двух последних уравнений системы (5.55), получаем с учетом (5.56)

$$\theta_1 = \theta_2 - (1+t) k_2 \theta_2'' - \frac{P}{GF_1}. \quad (5.58)$$

После подстановки в (5.57) выражения для  $\theta_1$  из (5.58), получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно только одной неизвестной функции  $\theta_2$

$$\theta_2'' - r^2 \theta_2 = \frac{P(-2k_1^2 - 2\xi + \xi^2)}{2aGF_1}, \quad (5.59)$$

где обозначено

$$a = (1+t)k_1k_2, \quad r^2 = \frac{k_1 + tk_2}{a}. \quad (5.60)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что общее решение дифференциального уравнения (5.59) может быть представлено в виде

$$\theta_2 = C_3 \operatorname{sh} r\xi + C_4 \operatorname{ch} r\xi + \frac{P(2b + 2\xi - \xi^2)}{2ar^2GF_1}, \quad (5.61)$$

где

$$b = k_1 - 1/r^2$$

Для определения констант интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  воспользуемся крайними условиями  $\theta_2(0) = 0$  и  $\theta_2'(1) = 0$ . Имеем

$$C_4 = -\frac{Pb}{ar^2GF_1}, \quad C_3 = -C_4 \operatorname{th} r.$$

С учетом известной формулы гиперболической тригонометрии

$$\operatorname{ch} r(1 - \xi) = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} r\xi - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r\xi$$

окончательное выражение для функции  $\theta_2$  принимает вид

$$\theta_2 = \frac{P}{2ar^2GF_1} \left[ 2b + 2\xi - \xi^2 - 2b \frac{\operatorname{ch} r(1 - \xi)}{\operatorname{ch} r} \right], \quad (5.63)$$

откуда последовательным двойным дифференцированием находим

$$\theta_2'' = -\frac{P}{ar^2GF_1} \left[ 1 + br^2 \frac{\operatorname{ch} r(1 - \xi)}{\operatorname{ch} r} \right]. \quad (5.64)$$

Определим теперь поперечную силу в стойке 2. Поскольку

$$Q_2(\xi) = GF_2(u' - \theta_2),$$

то с учетом последнего из уравнений в (5.55) находим

$$Q_2(\xi) = \frac{Ptk_2}{ar^2} \left[ 1 + br^2 \frac{\operatorname{ch} r(1-\xi)}{\operatorname{ch} r} \right].$$

Эту формулу можно переписать в ином, несколько более удобном для обозрения и анализа, виде, если учесть, что из (5.54), (5.60) и (5.62) следует

$$k_1 = \lambda tk_2, \quad a = \lambda t(1+t)k_2^2, \quad r^2 = \frac{1+\lambda}{\lambda(1+t)k_2},$$

$$ar^2 = (1+\lambda)t k_2, \quad br^2 = \frac{(1+\lambda)t - (1+t)}{1+t}.$$

Подставляя полученное в формулу для  $Q_2(\xi)$ , приводим ее к виду

$$Q_2(\xi) = \frac{P}{(1+\lambda)} \left[ 1 + \frac{(1+\lambda)t - (1+t)}{1+t} \cdot \frac{\operatorname{ch} r(1-\xi)}{\operatorname{ch} r} \right]. \quad (5.65)$$

В частности, в месте заделки поперечная сила  $Q_2(0)$  равняется

$$Q_2(0) = P \frac{t}{1+t} = P \frac{GF_2}{GF_1 + GF_2}, \quad (5.66)$$

и, так как из равновесия в проекции на ось  $Y$  следует, что  $Q_1 + Q_2 = P$ , то отсюда получаем несколько неожиданный вывод о том, что в случае двух стоек Тимошенко **поперечные силы в стойках в месте заделки распределяются пропорционально сдвиговым жесткостям** соответствующих стержней, то есть

$$\frac{Q_1(0)}{Q_2(0)} = \frac{GF_1}{GF_2}, \quad (5.67)$$

следовательно, распределение этих поперечных сил **не зависит от соотношения изгибных жесткостей двух стоек**. Стоит еще раз подчеркнуть, что этот вывод справедлив не для всех сечений стоек, а только для корневого сечения  $\xi = 0$ .

Выясним теперь предельным переходом поведение функции  $Q_2(\xi)$  в том случае, когда стойка 2 работает по классической теории, то есть без учета деформаций сдвига. В рассматриваемом предельном переходе следует положить

$$GF_2 \rightarrow \infty, \text{ откуда } t \rightarrow \infty \text{ и } k_2 \rightarrow 0.$$

В самом деле, при  $GF_2 \rightarrow \infty$  из физических соотношений  $Q_2(x) = GF_2 \gamma_2(x)$  следует, что  $\gamma_2 \rightarrow 0$  и, следовательно,  $v'(x) - \theta_2(x) \rightarrow 0$ , что, в пределе, дает полное совпадение с классической теорией стержней. В данном случае параметр  $r^2$  удобно представить в виде

$$r^2 = \frac{(1+\lambda)t}{(1+t)k_1}, \quad (5.68)$$

что позволит нам избавиться от неопределенности в произведении  $t k_2$ . При  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$r^2 \rightarrow (1+\lambda)/k_1, \quad (5.69)$$

то есть  $r^2$  стремится к конечному значению. В пределе, из формулы (5.65) получаем

$$\eta(\xi) = \frac{Q_2(\xi)}{P} = \frac{1}{1+\lambda} \left[ 1 + \lambda \frac{\operatorname{ch} r(1-\xi)}{\operatorname{ch} r} \right]. \quad (5.70)$$

Анализ формулы (5.70) показывает, что закон изменения относительной поперечной силы  $\eta(\xi)$  вдоль стойки 2 вблизи заделки имеет тенденцию быстрого нарастания, характерную для краевых эффектов. В исходной задаче о 40-этажной раме параметры подобраны так, что зона краевого эффекта оказывается достаточно протяженной, чтобы захватить ригели нижних этажей.

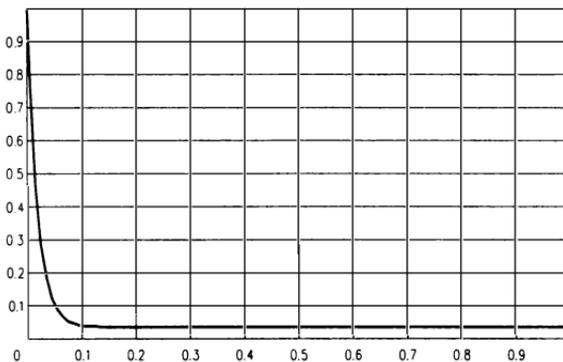


Рис. 5.25. График функции  $\eta(\xi)$

Для аналога этой задачи в идеализированной модели параметры будут следующими

$$k_1 = 4,0 \cdot 10^9 / (40^2 \times 0,25 \cdot 10^9) = 0,01; \quad \lambda = 27; \quad r = 52,92.$$

Построенный по приведенным параметрам график функции  $\eta(\xi)$  показан на рис. 5.25, где по оси абсцисс отложена координата  $\xi$ , а по оси ординат даны значения  $\eta$ .

Посмотрим как изменятся результаты расчета по программе, если для стойки 2 положить  $GF_2 = GF_1 \times h_2/h_1 = 0,833 \cdot 10^8$ . Теперь в результате расчета получаем

$$Q_1(0) = 0,808P, \quad Q_2(0) = 0,192P,$$

что не только вполне корреспондируется с интуитивными инженерными ожиданиями, но и предотвращает от возможных ошибок в принятии конструктивных решений – решений, связанных с передачей сдвигающей силы на фундаменты каждой из двух стоек.

Не лишено любопытства проследить и за предельным переходом от решения (5.65) в общем случае к ситуации, когда изгибные жесткости двух стоек стремятся к бесконечности, в то время как сдвиговые сохраняют конечные значения. Итак, положим

$$EI_1 \rightarrow \infty, \quad EI_2 \rightarrow \infty.$$

Пусть отношение соответствующих жесткостей в процессе предельного перехода остается постоянной величиной, то есть

$$\lambda = EI_1/EI_2 = \text{Const}, \quad t = GF_2/GF_1 = \text{Const}.$$

Но в данном случае  $r \rightarrow 0$ , поэтому

$$\frac{\text{ch } r(1 - \xi)}{\text{ch } r} \rightarrow 1.$$

Подставляя полученное в формулу (5.65), приведем ее в пределе к виду

$$Q_2(\xi) = P \frac{t}{1+t} = P \frac{GF_2}{GF_1 + GF_2},$$

и ясно, что в этом случае распределение поперечных сил одинаково уже по всей длине стоек и пропорционально их сдвиговым жесткостям. Конечно, этот последний результат может быть получен и непосредственно, причем более элементарными средствами, но всегда полезно провести предельный переход в формулах, чтобы иметь возможность убедиться в справедливости ранее сделанных выводов и в предельных случаях также.

## 5.5. Аппроксимация геометрической формы и закреплений

Одновременно с аппроксимацией поля перемещений на выбранной системе конечных элементов иногда производятся и другие приближения, связанные с необходимостью применения конечно-элементной модели, а именно, замена геометрической формы конструкции близкой к ней, например, многоугольной фигурой или же замена гладкой срединной поверхности оболочки некоторым близким многогранником.

В классической книге Г.Стренга и Дж.Фикса [1977] этой проблеме посвящен специальный раздел, в котором выявлен ряд тонких математических особенностей задачи, однако основной вывод достаточно просто формулируется в механических терминах — при приближении плоской области криволинейным многоугольником в окрестности границы имеется *пограничный слой* толщиной в два элемента, где ошибка в производных имеет увеличенное значение, но это особое поведение достаточно быстро затухает по направлению нормали к границе. Здесь наблюдается:

*«... вариант принципа Сен-Венана, относящийся больше к геометрии, чем, что более привычно, к краевым данным».*

При аппроксимации геометрии системы, кроме изменения формы, могут претерпеть изменения и краевые условия, поскольку они теперь относятся к границам другого очертания. Здесь можно столкнуться с подводными камнями, связанными с тем, что *предельный переход формы* контура не обязательно сопровождается *предельным переходом кинематических свойств*. Об этом свидетельствует известный парадокс Сапонджяна для свободно опертой многоугольной пластинки [Пановко, 1985].

Сущность парадокса состоит в том, что для свободно опертой пластинки, имеющей форму вписанного в окружность радиуса  $R$  правильного многоугольника и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , увеличение числа сторон приводит коэффициент  $k$  в формуле для максимального прогиба  $w_{\max} = kqR^4/D$  не к правильному значению 0,0637 (при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$ ), а к величине 0,04688. При этом для защемленной по контуру пластинки предельный переход приводит к правильному результату  $k = 0,01563$  (см. рис. 5.26).

Объяснение парадокса, приведенное в книге Я.Г. Пановко [1985], опирается на рассмотрение контурных условий для многоугольной

пластинки. При шарнирном опирании нормаль к срединной поверхности в любой точке контура (кроме угловой!) может поворачиваться только вокруг соответствующей прямолинейной границы (рис. 5.27), т.е. нормаль а-а поворачивается вокруг n-n, нормаль b-b — вокруг m-m и т.д. Но тогда в угловой точке нормаль вообще не может повернуться, что образует некий жесткий «частокол», который, сгущаясь при безграничном увеличении числа сторон, меняет условия шарнирного опирания на некоторые промежуточные условия между шарнирным опиранием и защемлением.

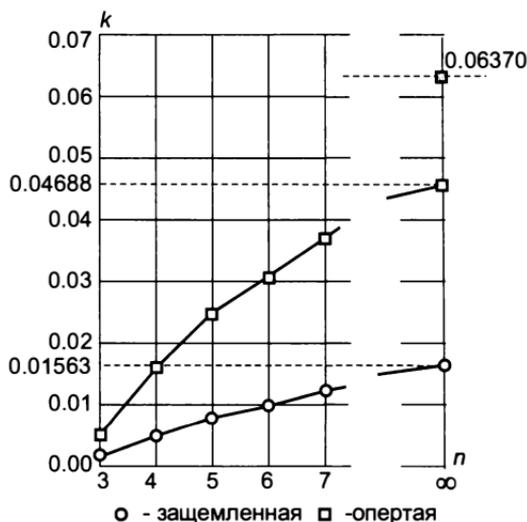


Рис. 5.26. Парадокс Сапонджяна

Необходимо отметить, что сказанное выше корректируется, если расчет выполняется с использованием МКЭ. В этом случае парадокс Сапонджяна не будет проявляться, если краевые условия в дискретной расчетной схеме записываются аккуратно (с искажением геометрии границы расчетной области, но без искажения самих краевых условий).

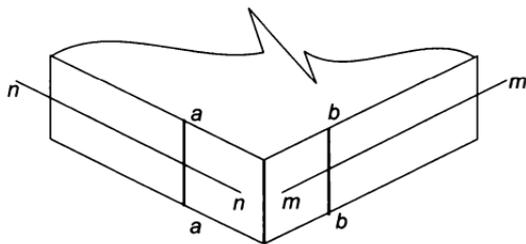


Рис. 5.27. Граничные условия в углу

Для иллюстрации приведем результаты расчета по МКЭ шарнирно опертой по контуру круглой пластины радиуса  $R$  под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$ . В конечноэлементной схеме плита аппроксимируется правильным вписанным в круг  $n$ -угольником. В силу циклической симметрии в дискретную расчетную схему достаточно включить один сектор с углом раствора  $\varphi = 2\pi/n$ .

Полагая последовательно  $n = 12, 18, 24, 30$ , будем разбивать радиус на  $k$  частей, где  $k = n/6$ . Для примера на рис. 5.28 приведена сетка конечных элементов, образуемая при  $n = 18$ . Закрепления узлов от перемещений принимаются следующими:

- в узле 1 —  $\theta_x = 0, \theta_y = 0$ ;
- в узлах 2, 4 —  $\theta_x = 0$ ;
- в узле 6 —  $\theta_x = 0, w = 0$ ;
- в узлах 3, 5 —  $\theta_\xi = 0$ ;
- в узле 7 —  $\theta_\xi = 0, w = 0$ ,

где  $\theta_x, \theta_y, \theta_\xi$  — повороты узлов вокруг осей  $X, Y$  и  $\xi$  соответственно.

Ясно, что сформулированные выше краевые условия точно соответствуют случаю шарнирного опирания круглой пластины без внесения каких-либо искажений.

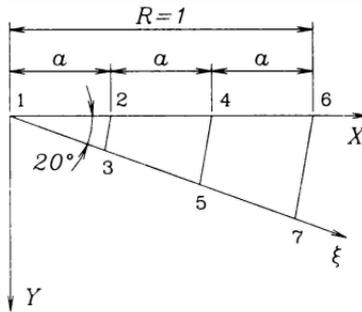


Рис. 5.28. Сетка конечных элементов для 18-угольника

В результате расчетов, выполненных по программе **GTSTRUDL**, полученные значения прогиба в центре пластины (в безразмерной форме) приведены в таблице 5.5.

Таблица 5.5.

Точное решение для круглой плиты	Точное решение для $n$ -угольника, $n \rightarrow \infty$	$n = 12$	$n = 18$	$n = 24$	$n = 30$
0,0637	0,04688	0,06439	0,06380	0,06375	0,06373

В качестве треугольного конечного элемента плиты использовался элемент типа ВРН, а для четырехугольника элемент ВРНQ — гибридные конечные элементы изгибаемой плиты (теория изгиба тонких плит Кирхгофа—Лява). Как видно из данных таблицы 5.5, конечноэлементные решения для вписанных в круг многоугольников сходятся к решению задачи для круглой плиты.

В этой связи стоит отметить, что вообще, для метода конечных элементов важна не столько погрешность, вносимая аппроксимацией геометрии области, сколько ошибка, возникающая за счет искажения краевых условий.

Особо следует сказать о моделировании геометрической формы оболочечных конструкций. Здесь имеются два подхода:

- использование плоских конечных элементов, и, следовательно, замена истинной поверхности оболочки некоторым близким многогранником;
- использование криволинейных конечных элементов, обладающих такой же кривизной поверхности, как и рассчитываемая оболочка.

В первом случае конечный элемент оболочки представляет собой, по сути, объединение конечного элемента изгибаемой плиты и конечного элемента пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. При этом кривизна поверхности оболочки заменяется дискретными изменениями направления нормали на линиях сопряжения конечных элементов, что вносит определенную погрешность в решение.

Во втором случае кривизна меняется плавно, но возникает другая сложность — перемещения элемента как жесткого целого практически невозможно аппроксимировать в классе обычных функций формы, что может вызвать появление паразитных напряжений. Чем тоньше оболочка, тем большее влияние оказывает такая ошибка. Очень часто для уменьшения этой ошибки используется подход, основанный на отказе от гипотезы Кирхгофа, что позволяет использовать более простые аппроксимации перемещений. Чаще всего криволинейные конечные элементы оболочки используются для расчета цилиндрических оболочек, это связано с тем, что значительно облегчается задание исходных данных (достаточно указать радиус образующей кругового цилиндра). Для более сложных поверхностей, где значения кривизны должны быть заданы у каждого конечного элемента, а границы элементов чаще всего проходят по линиям главной кривизны, это может стать определенной проблемой, которая, конечно, с точки зрения пользователя, относительно просто решается при автоматическом

разбиении на конечные элементы, но становится весьма обременительной для него при использовании элементов, не предусмотренных в генераторе сеток.

## 5.6. Погрешности вычислений, и как с ними можно бороться

Ошибки результатов любого вычисления, помимо грубых промахов, обычно связаны с неточностью числовых исходных данных, ошибками выбранного численного метода и с ошибками округления. Применительно к расчетам на ЭВМ последняя причина приобретает особое значение. Во-первых, такие расчеты оперируют очень длинными цепочками вычислений, а при неудачном выборе метода решения ошибки отдельных операций могут накапливаться. Накопление может оказаться таким, что, начиная с некоторого этапа, мы, по сути, будем иметь дело не с ожидаемым результатом, слегка испорченным «шумом» от ошибок, а с чистым шумом, слегка искаженным следами необходимого результата. С проблемой влияния ошибок округления тесно связана проблема обусловленности разрешающих систем уравнений, которая рассматривалась ранее.

При неустойчивых, в вычислительном смысле, методах решения задачи и при плохо обусловленных расчетных моделях можно столкнуться с парадоксальным явлением: дробление сетки конечных элементов, предпринимаемое для увеличения точности решения, увеличивает число арифметических операций, и при этом растут ошибки округления, что, в конце концов, приводит к ухудшению решения. Для выявления таких опасностей хорошо подходит способ решения простых задач с применением искусственного увеличения их размерности до тех пределов, которые могут возникнуть при решении реальной сложной задачи. Если для тестовой задачи известно точное решение, то выявление аномалий в результатах оказывается тривиальным. Однако, затронутая проблема вычислительных погрешностей более широка, и ее полезно здесь обсудить с несколько другой точки зрения.

Мы начнем анализ с рассмотрения совершенно элементарного примера, демонстрирующего влияние порядка проведения вычислений на точность окончательного результата расчета.

Пусть требуется определить момент инерции  $I$  кольцевого сечения с наружным диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$ . Как известно, интересующая нас величина определяется по формуле

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4). \quad (5.71)$$

Для весьма тонкого кольца при отношении диаметров

$$\eta = d/D, \quad (5.72)$$

близком к единице, прямое вычисление момента инерции  $I$  по формуле (5.71) может привести к заметной погрешности в окончательном результате расчета (имеются в виду вычисления, проводимые на калькуляторе с малым количеством удерживаемых значащих цифр). Поэтому опытный вычислитель прежде, чем проводить непосредственные вычисления, займется предварительным преобразованием формулы (5.71), имея в виду возможность подавления основной части погрешности расчета, вносимой в окончательный результат в силу потери точности на промежуточных вычислениях. С точки зрения компьютерной математики, такая погрешность обусловлена ограниченностью разрядной сетки машины, используемой для представления чисел в формате с плавающей точкой. Вводя в рассмотрение малую величину  $\alpha$

$$\alpha = 1 - \eta, \quad (5.73)$$

перепишем (с точностью до множителя  $\pi D^4/64$ , несущественного для наших рассуждений) момент инерции кольцевого сечения в следующих двух формах:

$$I_1 = 1 - \eta^4 \quad \text{и} \quad I_2 = \alpha(1 + \eta)(1 + \eta^2). \quad (5.74)$$

Совершенно очевидно, что обе формы записи момента инерции математически строго эквивалентны, однако их прямое использование в непосредственных вычислениях различается порядком (последовательностью) проводимой вычислительной работы.

Несложно заметить, что первая форма записи (формула для  $I_1$ ) полностью соответствует порядку вычислений, определяемому формулой (5.71). Формула для  $I_2$  интересна еще и тем, что позволяет легко получить следующую полезную оценку

$$I_2 < 4\alpha, \quad (5.75)$$

причем эта оценка тем теснее, чем меньше величина  $\alpha$ .

Ниже на затемненном фоне приведена короткая программа, с помощью которой можно осуществить численный эксперимент для сопоставления точности вычислений  $I_1$  и  $I_2$ :

```

#include <iostream.h>
typedef float real;
void main(void)
{
    const real one = (real)1.0;
    const real zero = (real)0.0;
    real alf, eta, J1, J2, r1, r2, r3, r4;
    while(1)
    {
        cin>>alf;          if (alf <= 0) return;
        eta = one - alf;
        r1 = eta * eta;    r2 = r1*r1;    J1 = one - r2;
        r3 = one + eta;   r4 = one + r2;  J2 = alf*r3*r4;
        cout<<"J1="<<J1<<" J2="<<J2<<endl;
    }
}

```

В таблице 5.6 приведены результаты вычислений по этой программе для некоторых значений параметра  $\alpha$ , при этом использовалась компьютерная арифметика в формате чисел с плавающей точкой одинарной точности (формат `float` для таких языков программирования, как C и C++).

Таблица 5.6.

$\alpha$	$I_1$	$I_2$
$10^{-5}$	$4,005 \times 10^{-5}$	$4,000 \times 10^{-5}$
$10^{-6}$	$4,053 \times 10^{-6}$	$4,000 \times 10^{-6}$
$10^{-7}$	$4,768 \times 10^{-7}$	$4,000 \times 10^{-7}$

Для персонального компьютера с 32-битной архитектурой формат `float` выделяет под значащую часть числа (так называемую *мантиссу*) 23 двоичных разряда — 23 бита, что приблизительно соответствует шести десятичным разрядам. На самом деле, анализ погрешностей, возникающих из-за ошибок округления при вычислениях в арифметике чисел с плавающей точкой, выглядит несколько сложнее и зависит от таких дополнительных атрибутов этой арифметики, как нормализация, использование операций с округлением или с блокировкой округления и т.п. Сколько-нибудь подробный разговор на эту тему не только выходит за рамки основного содержания настоящей книги, но и отвлекает внимание читателя на разглядывание хотя и интересных, но несущественных для целей настоящей книги деталей тех деревьев, за которыми, воистину, можно и не увидеть леса. Интересующихся деталями мы отсылаем к

специальной литературе, в которой можно найти ответы на многие вопросы, возникающие у заинтересованного читателя в связи с анализом ошибок округления в арифметике чисел с плавающей точкой. В частности, достаточно элементарное, но без ущерба для строгости, обсуждение этой темы приводится у Дж.Форсайта и К.Молера в ставшей уже классической по количеству ссылок книге [1969].

Несложно понять и причину падения точности величины  $I_1$  при уменьшении параметра  $\alpha$ .

С этой целью введем в рассмотрение еще одно малое, зависящее от машинной реализации, число, которое обозначим  $\varepsilon_f$ . В силу ограниченности разрядной сетки в представлении чисел формата **float**, машинная инструкция сложения любого положительного числа  $\varepsilon < \varepsilon_f$  с единицей нечувствительна к величине  $\varepsilon$ , иначе говоря, в машинном представлении имеют место условия:

$$1.0F + \varepsilon = 1.0F, \quad 1.0F + \varepsilon_f > 1.0F \quad (5.76)$$

при любом положительном  $\varepsilon < \varepsilon_f$ . Обозначение  $1.0F$ , заимствованное из языков программирования C и C++, указывает на использование формата **float** в представлении единицы.

Величина  $\varepsilon_f$ , зависящая от технического и программного окружения, в рассматриваемом нами случае равняется приблизительно

$$\varepsilon_f = 1,2 \times 10^{-7}. \quad (5.77)$$

Вот почему при малых величинах  $\alpha$ , сопоставимых по порядку малости с  $\varepsilon_f$ , вычисление  $I_1$ , сводящееся к разности весьма близких величин, выплескивает за пределы разрядной сетки машины существенную часть информации о получающихся при этом числах<sup>16</sup>.

Критически настроенный читатель может возразить авторам по поводу приведенного выше примера в двух аспектах:

- во-первых, сама табл. 5.6 свидетельствует о том, что сколько нибудь заметная потеря точности расчета наблюдается при таких малых значениях параметра  $\alpha$ , которые не отвечают практически разумным соотношениям диаметров кольцевого сечения. В

<sup>16</sup> Особо дотошливые читатели, имеющие доступ, скажем к компилятору Visual C++ могут найти число  $\varepsilon_f$  в заголовочном файле <float.h> в препроцессорной директиве: `#define FLT_EPSILON 1.192092896e-07F /*smallest such that 1.0+FLT_EPSILON != 1.0*/`

реальных задачах эффект от потери точности (в данном примере) будет незначительным.

- во-вторых, даже если допустить возможность существенной потери точности расчета за счет неудачно выбранного порядка вычислений, то при чем здесь пользователь программного обеспечения? Пусть этим обстоятельством будут озабочены разработчики программ, на то они и специалисты, чтобы уберечь пользователя от неприятностей подобного рода.

Что касается первого из предположительно высказанных выше возражений, то следует заметить, что мы и не стремились построить прикладной пример. Наша цель заключается в том, чтобы продемонстрировать самую потенциальную возможность возникновения источника погрешностей за счет плохой организации порядка вычислений. А для этого нужен был не столько реальный, сколько максимально упрощенный пример, так как более сложный пример не был бы столь показателен. Да, при разумных соотношениях диаметров кольца погрешность при любом из двух порядков вычислений будет копеечной. Однако, малые погрешности в задачах высокой размерности имеют неприятную способность аккумулироваться, так что, как говорится, «копейка рубль бережет».

В отношении второго из прогнозируемых нами замечаний критически настроенного читателя, мы сразу же и почти безоговорочно согласимся с тем, что ответственность за порядок вычислений несет, в первую очередь, разработчик программного обеспечения. Однако, как это будет показано далее, инженер-расчетчик не может и не должен становиться по отношению к используемой программе в пассивное положение, которое в терминологии, заимствованной из спортивной борьбы, именуется партером. В руках действительно опытного и квалифицированного пользователя программный продукт используется в **активном** режиме, и из него извлекаются **максимальные** возможности, о которых разработчик этого продукта, возможно, даже и не догадывался! Примеры подобного рода можно найти и в этой книге.

И наоборот, кажется, никому не придет в голову обвинять изготовителя молотка за то, что покупатель после приобретения этого инструмента принялся за работу, ударяя по шляпкам гвоздей рукояткой. Возможно, вина изготовителя молотка перед этим покупателем заключается в том, что последний не был снабжен письменной инструкцией с подробным разъяснением технологии гвоздезабивания (совсем уж патологический случай с не умеющим читать покупателем мы опускаем). Впрочем, с высокой дозой

уверенности можно предположить, что раз уж такая проблема возникла, то найдется изобретатель молотка, в принципе не допускающего даже контакта рукоятки с гвоздем. Ну чем не готовый пример желаемой всеми обратной связи между пользователями и разработчиками программного продукта!

Перейдем теперь к построению примера, когда от пользователя может зависеть последовательность вычислений, и эта последовательность порождает тот или иной уровень погрешности расчета. Собственно говоря, этот пример уже давно бытует среди разработчиков программ и грамотных расчетчиков в качестве некоего фольклора. И тем не менее, профессиональный опыт общения авторов и с теми, и с другими показывает, что люди по-прежнему склонны наступать на те же самые грабли. Возможно, так происходит потому, что логичного и убедительного объяснения наблюдаемых при этом эффектов до сих пор, насколько это известно авторам, опубликовано не было<sup>17</sup>.

Итак, рассмотрим расчетную схему, представляющую собой обычную консольную балку, но составленную из  $n$  участков равной длины и нагруженную на свободном конце сосредоточенной силой  $P$ .

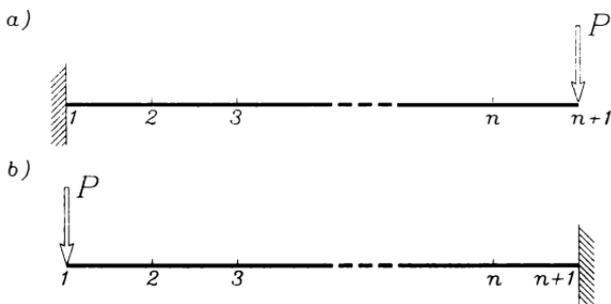


Рис. 5.29. Две системы нумерации неизвестных: а) «плохая» б) «хорошая»

Мыслимы две возможные последовательности задания номеров узлов, обе приводящие к минимальной ширине ленты матрицы

<sup>17</sup> Здесь авторам показалось уместным процитировать самих себя в словах относящихся к обсуждаемому вопросу и сказанных еще десять лет назад:

*«Убедительного истолкования этот экспериментально обнаруженный факт пока не имеет, однако есть основания считать правдоподобной следующую гипотезу более общего содержания: наименее чувствительна к потере точности такая последовательность исключения неизвестных, когда на каждом шаге в качестве исключаемого выбирается неизвестное, которому соответствует минимальный диагональный элемент»*  
[Городецкий и др., 1987].

жесткости конструкции: одна при нумерации узлов, начинающейся от заделки (рис. 5.29,а) и вторая — при нумерации, начинающейся от свободного конца (рис. 5.29,б).

Если положить длину участка разбиения балки равной единице, то полная длина балки  $l$  будет равна  $l = n$ . Полагая также  $EI = 1,0 \times 10^9$ ,  $P = 3$ , мы должны получить прогиб на конце консоли  $w^*$

$$w^* = \frac{Pl^3}{3EI} = \left( \frac{n}{1000} \right)^3. \quad (5.78)$$

Ниже в таблице 5.7 приведены результаты вычисления прогиба на конце консоли, выполненные по программам **SCAD**, **GTSTRUDL** и **ROBOT** при различных значениях числа участков  $n$ . В программе **SCAD** результаты получены при следующих условиях:

- параметру «Точность разложения» присвоено максимально возможное значение  $10^{-15}$ ;
- опция «Контроль решения» отключена;
- режим оптимизации профиля матрицы отключен.

Первое условие означает, что все числа, меньшие, чем  $10^{-15}$  считаются равными нулю, т.е. та остаточная жесткость, которая может возникнуть за счет «неполноты исключения», обусловленной ошибками округления (см. ниже), ограничена этой величиной.

Второе условие связано с тем, что в стандартном режиме системы выполняется автоматическая проверка точности получаемого решения системы разрешающих уравнений. Эта проверка реализуется путем решения задачи для искусственно созданного варианта загрузки системы, такого, что все линейные перемещения равны единице, а угловые — нулю (тест А.В. Горбовца). Если же опция включена, то решение будет прервано с сообщением в протоколе *Ошибка при разложении матрицы*.

Таблица 5.7.

Результат	$n$	5 000	10 000	15 000	20 000
По (5.78)	$w^*$	125	1000	3375	8000
<b>SCAD</b>	Схема <i>a</i>	125	997	591	605
	Схема <i>b</i>	125	1000	3375	8000
<b>GTSTRUDL</b>	Схема <i>a</i>	125	1056	2121	1427
	Схема <i>b</i>	125	971	2975	5772
<b>ROBOT</b>	Схема <i>a</i>	125	976	2869	1610
	Схема <i>b</i>	125	1000	3375	8000

Поскольку в программе **GTSTRUDL** используется техника группового исключения неизвестных, наводящая дополнительную расчетную погрешность, результаты расчета по **GTSTRUDL** не столь показательны и характерны<sup>18</sup>, как по программе **SCAD**. Поэтому в дальнейшем анализе мы будем опираться на результаты численного эксперимента, получаемые из расчета по программе **SCAD**.

Как видно из результатов, приведенных в таблице 5.7, схема *a* приводит к более интенсивному накоплению погрешности вычислений, чем схема *b*. Почему так происходит?

Чтобы разобраться в причинах повышенной чувствительности схемы *a* к накоплению погрешностей вычислений, обратимся к рассмотрению вычислительной процедуры в терминах и понятиях механики, для чего вспомним физический смысл гауссова исключения неизвестных при решении системы линейных алгебраических уравнений, возникающей при использовании метода перемещений. Дело в том, что заданная пользователем последовательность номеров узлов в неявной форме инструктирует программу о нумерации неизвестных в основной системе метода перемещений. Если исключить из рассмотрения несущественные для проводимого анализа перемещения узлов в направлении оси балки, то в каждом из узлов останутся по два неизвестных перемещения (две степени свободы): линейное перемещение в направлении, перпендикулярном оси балки, и угол поворота узла. Как известно, основная система метода перемещений образуется из заданной системы наложением внешних связей на перемещения узлов системы. и для этой основной системы формируется матрица жесткости **K** и грузовой вектор **p**. Подсказку обсуждаемому эффекту дает известная интерпретация на механическом уровне (см. Приложение А, а также [Александров и др., 1976]), процесса гауссова исключения неизвестных при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p}, \quad (5.79)$$

как последовательное снятие связей, наложенных на исходную систему в процессе образования основной системы метода перемещений.

<sup>18</sup> К чести программы **GTSTRUDL** она не остается безучастным свидетелем потери точности расчета. При прогоне этой коварной задачи **GTSTRUDL** настораживается и начинает тревожить пользователя предупреждающими сообщениями – своего рода сигналами опасности.

Поскольку гауссово исключение является численной процедурой, выполняемой в рамках машинной арифметики, то неизбежные малые погрешности вычислений приводят к тому, что связи снимаются как бы не полностью. Для упрощения рассуждений предположим, что эти погрешности сосредоточены на элементах главной диагонали матрицы, то есть остающиеся «хвосты» вычислений, грубо говоря, сохраняют на месте удаленных связей в механической системе некоторые пружины малой жесткости. Эти оставшиеся пружины, в свою очередь, увеличивают погрешность на следующем шаге гауссова исключения, наращивая таким образом жесткость новых «паразитных» пружин в следующем узле и т.д. В результате, после снятия всех наложенных связей (на алгебраическом уровне этот момент соответствует завершению так называемого прямого хода гауссова исключения неизвестных) мы фактически получаем не исходную систему, а систему, искаженную совокупностью пружин, возникших за счет накопления погрешностей вычислений.

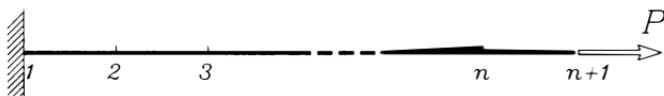
В схеме нумерации  $a$  жесткости этих пружин нарастают от заделки к свободному концу, тогда как в схеме  $b$  — в обратном направлении. Надо сказать, что знак погрешности (жесткость пружин) является величиной неопределенной, поэтому при разных численных значениях входных параметров перемещение конца консоли можно получить как больше точной величины, так и меньше ее.

Если бы мы рассматривали чуть более сложные условия нагружения балки, скажем, равномерно распределенной нагрузкой по всей длине балки, то тогда погрешности накапливались бы не только в самой матрице, но и в грузовом векторе, то есть возникали бы дополнительные «паразитные» внешние силы, нарастающие в направлении от младших номеров узлов к более старшим.

Теперь становится понятным (по крайней мере, на уровне механики), почему схема  $b$  более помехоустойчива к накоплению погрешности при вычислении прогиба балки на конце консоли.

Поскольку обсуждаемая здесь проблема имеет принципиальное значение, и в то же время в научно-технической и учебной литературе по расчету конструкций совершенно не отражена, а также для того, чтобы еще больше прояснить описанную выше картину, рассмотрим совсем простую задачу о растяжении/сжатии стержня, изображенного на рис. 5.30, силой  $P = 1$ , приложенной на свободном конце стержня.

a)



b)

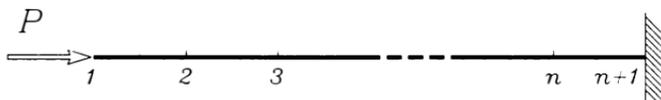


Рис. 5.30. Продольно нагруженный стержень с различной нумерацией неизвестных

Понятно, что при точном решении этой задачи продольное перемещение свободного конца стержня  $u^*$  будет равно

$$u^* = Pl/EF. \quad (5.80)$$

Будем дополнительно помечать нижним индексом  $a$  или  $b$  матрицу жесткости  $\mathbf{K}$  и грузовой вектор  $\mathbf{p}$ , в зависимости от того, к какой схеме нумерации узлов они имеют отношение.

Матрицы жесткости и грузовые векторы для схем  $a$  и  $b$  соответственно принимают вид

$$\mathbf{K}_a = \frac{EF}{l/n} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_a = P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.81,a)$$

$$\mathbf{K}_b = \frac{EF}{l/n} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_b = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.81,b)$$

Запишем систему уравнений (5.79) в преобразованном виде. получаемся после проведения прямого хода процедуры гауссова исключения, что эквивалентно разложению матрицы системы уравнений на треугольные множители, или так называемому LU

разложению [Стренг, 1980], где  $\mathbf{L}$  — нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали,  $\mathbf{U}$  — верхняя треугольная матрица

$$\mathbf{K} = \mathbf{LU}, \quad \mathbf{U}\mathbf{u} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (5.82)$$

В частности, для матриц и векторов по (5.81, *a*) и (5.81, *b*) имеем:

$$\mathbf{U}_a = \frac{EF}{l/n} \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & -1 & & & \mathbf{0} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \frac{n}{n-1} & -1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{p}_a = P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.83,a)$$

$$\mathbf{U}_b = \frac{EF}{l/n} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_b^{-1}\mathbf{p}_b = P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.83,b)$$

Проводя теперь обратный ход процедуры гауссова исключения, получим перемещение точки приложения силы  $P$  в случаях *a* и *b* соответственно

$$u_a = u_{n+1} = \frac{Pl/n}{EF} \frac{1}{1/n} = \frac{Pl}{EF} = u^*,$$

$$u_b = u_1 = \frac{Pl/n}{EF} n = \frac{Pl}{EF} = u^*, \quad (5.84)$$

что и следовало ожидать.

Понятно, что точный результат в обоих случаях получается только потому, что все шаги гауссовой процедуры мы проводили «в буквах» и, следовательно, не теряли точности на промежуточных вычислениях. Однако, компьютерная программа имеет дело не с буквами, а с числами.

Посмотрим теперь, что получится, если гауссову процедуру выполнять над числами в формате с плавающей точкой. Несложно убедиться в том, что в нашем случае для схемы нумерации *b* накопления погрешностей вычислений не происходит. Иначе обстоит дело в случае *a*. Ниже приведена короткая программа, позволяющая смоделировать процесс решения системы уравнений (5.79) с матрицей и грузовым вектором по (5.81, *a*).

```

#include <iostream.h>
typedef float real;
void main(void)
{
    const real one = (real)1.0;
    const real two = (real)2.0;
    real a, r, Za;
    long int n, i;
    while(1)
    {
        cin>>n;    if (n <= 0) return;
        a = two;
        for (i=3; i<n+1; i++) // i - номер узла
        {
            r = one / a;    a = two - r;
        }
        r = one / a;    a = one - r;
        Za = (one / a) / (real)n;
        cout<<" Za = "<<Za<<endl;
    }
}

```

Результаты численного эксперимента, выполненного с помощью этой программы при различных значениях параметра  $n$ , приведены в таблице 5.8. Обратим внимание на то обстоятельство, что эти вычисления выполняются над числами, представленными в компьютере с одинарной точностью (в формате `float`).

Таблица 5.8.

$n$	1000	2000	4000	5000	10000
$u^*/u_a$	0,9999	0,9804	0,8364	0,6691	0,3345

Если вычисления проводить над числами, представленными с двойной точностью, то для этого достаточно в приведенной выше программе изменить ее вторую строку, переопределив тип `real`, а именно

```
typedef double real;
```

В этом случае заметное накопление погрешности вычислений начинается при существенно большем значении  $n$ , примерно с 80 000 000, но тенденция все равно сохраняется.

Итак, из всего сказанного выше можно сделать вывод о том, что в руках пользователя имеется некоторый (хотя и ограниченный) инструмент для регулирования погрешности вычислений.

**В общем случае, для минимизации погрешности, зависящей от последовательности нумерации узлов, целесообразно проводить эту нумерацию, начиная от наиболее податливой части конструкции, постепенно перемещаясь к местам ее закреплений.**

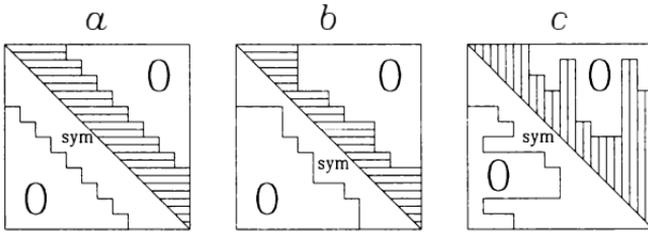
Если придерживаться этого правила, то возникающий вычислительный шум в виде условных дополнительных пружин и дополнительных внешних сил будет нарастать к наименее податливым частям конструкции, а значит и в общей картине работы механической системы можно ожидать меньших искажений. Мы осознаем, конечно, что в сформулированном виде выделенная полужирным шрифтом рекомендация носит во многом расплывчатый характер и не является четко обозначенным алгоритмом действий. Выработка такого (таких) алгоритма (алгоритмов) может быть осуществлена на основе строгих математических оценок специалистами по численному анализу и компьютерной арифметике. Но это — уже предмет иных публикаций (и иных авторов).

Кстати говоря, исходя из сказанного выше, можно дать следующую рекомендацию разработчикам программ расчета конструкций — насколько нам известно, эта рекомендация еще не реализована где-либо в программных комплексах. Было бы полезно, если бы программный комплекс предоставлял возможность (по запросу пользователя или независимо от такого запроса) проводить вычисления с матрицами жесткости в прямой и инверсной нумерациях неизвестных перемещений узлов. Сопоставление этих двух решений в руках опытного пользователя может служить материалом для вынесения суждения о возможной погрешности вычислений.

Надо сказать, что во многих случаях для инверсной нумерации нет необходимости в перенастройке матрицы жесткости и грузовых векторов, достаточно лишь организовать еще одну процедуру решения системы линейных алгебраических уравнений, в которой гауссово исключение осуществляется в последовательности уменьшения номеров неизвестных. Аналогичная идея проходит и в рамках фронтального метода Айронса, причем второй вариант движения фронта определяется перебором элементов в противоположном направлении.

Однако, следует иметь в виду, что возможность инверсной схемы исключения неизвестных без перенастройки матрицы жесткости проходит не всегда.

Действительно, известны три основных типа структуры матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  системы уравнений (5.79), не изменяющейся по структуре (рис. 5.31) в процессе гауссова исключения неизвестных: ленточная, ступенчатая и небоскрежная (профильная).



**Рис. 5.31.** Структура матриц жесткости: *a* — матрица ленточной структуры; *b* — матрица ступенчатой структуры; *c* — матрица небоскрежной структуры

Ленточная структура может рассматриваться как частный случай ступенчатой при одинаковых ступеньках, то есть равенстве вертикального и горизонтального размера ступеньки — проступи и подступенка.

Несложно заметить, что в первых двух случаях (ленточной и ступенчатой структуры) инверсная схема исключений сохраняет первоначальную структуру матрицы, тогда как в случае небоскреба это важнейшее условие не выполняется. Например, в случае топологической схемы конструкции типа велосипедного колеса со спицами центральный узел (узел, в котором сходятся все спицы) целесообразно занумеровать последним, тогда структуре матрицы жесткости системы можно придать вид небоскреба с минимальным количеством первоначально нулевых элементов внутри небоскреба. Если же исключение неизвестных из системы уравнений начать с этого узла, то вся оставшаяся часть матрицы окажется целиком заполненной.

Представляется, что наиболее гибкой является возможность директивного указания пользователем порядка исключения неизвестных (полное или частичное задание групп неизвестных, упорядоченных по очереди их исключения). Заманчива также возможность передачи системе алгоритма упорядочивания неизвестных или некоторых дополнительных условий, накладываемых на процедуру упорядочивания. Разумеется, что по умолчанию программа должна принимать на себя решение об определении порядка исключения неизвестных, используя, например, критерий экономии ресурсов компьютера, или какой-либо иной критерий, запрашиваемый пользователем. Некоторые из этих

рекомендаций реализованы в комплексе **SCAD**. Так, например, имеется возможность задать направляющие косинусы того вектора, по направлению которого будет выполняться нумерация узлов, или выбрать одну из нескольких возможных альтернатив оптимизации профиля матрицы.

### 5.6.1. Замечания о применении суперэлементов

Еще одна возможность подавления погрешности вычислений связана с применением суперэлементов в тех случаях, когда таковые многократно повторяются в рассчитываемой конструкции. Так, для рассмотренной выше задачи о растяжении/сжатии стержня можно образовать суперэлемент, состоящий из двух соседних участков стержня, затем образовать суперэлемент второго уровня вложенности, состоящий из двух суперэлементов первого уровня и т.д. Если проследить при этом за последовательностью вычислительной работы, связанной с исключением неизвестных перемещений внутреннего узла суперэлемента (такая процедура называется статической конденсацией), то можно обнаружить, что накопления погрешности при этом для рассматриваемой задачи не происходит.

Раз уж мы коснулись проблемы применения суперэлементов в программных комплексах по расчету конструкций, то стоит несколько задержаться на этом вопросе. Идея применения суперэлементов известна давно<sup>19</sup>, а ее первые реализации, написанные на волне супероптимистических ожиданий от преимуществ суперэлементов, были осуществлены еще на стареньких ламповых вычислительных машинах. Как-то незаметно с течением времени практический интерес разработчиков программ к суперэлементам в значительной степени притупился. Мы думаем, что это связано с фантастически быстрым ростом мощности компьютеров как по быстродействию, так и по объемам доступных ресурсов памяти, что, по мнению многих разработчиков, компенсирует выигрыш от использования суперэлементов. А зря!

Нам представляется, что применение суперэлементной модели полезно в нескольких аспектах:

- в качестве средства сокращения объема входной информации;

---

<sup>19</sup> Мы не можем с уверенностью сказать, кто впервые выдвинул эту идею и кому принадлежит авторство в самом термине «суперэлемент».

- в качестве инструмента резкого понижения запросов программы к потребляемым ресурсам компьютера (по времени счета и объему памяти);
- в качестве эффективного средства борьбы с потерей точности расчета при высоких порядках матриц, и, в частности, нивелирующего влияние нумерации узлов на накопление погрешности вычислений;
- в качестве удобного готового инструмента для проведения статической конденсации к выделенным узлам и выделенным им степеням свободы.

Эта последняя возможность крайне полезна, например, для последующего учета нелинейного поведения конструкции, когда вся нелинейность сосредоточена в этих выделенных узлах в направлении выделенных степеней свободы.

Разумеется, все эти преимущества суперэлементной модели в полной мере проявляются только в том случае, когда в системе имеется много повторяющихся одинаковых суперэлементов, у которых количество внутренних узлов заметно превышает число внешних узлов, а сами суперэлементы реализованы в программе с достаточно большим допустимым уровнем вложенности, образуя развитую иерархию суперэлементов как *типов элементов*. Понятно также, что хорошая реализация суперэлементных моделей не должна накладывать ограничений ни на внешние воздействия, которые могут различаться у конкретных представителей суперэлементов одного и того же типа, ни на их взаимное пространственное положение, в том числе суперэлементы одного типа должны допускать различную ориентацию по отношению к глобальной системе координат.

Представление же о том, что суперэлементная модель слишком сложна для понимания и правильного использования рядовыми пользователями мы, следуя Алену Голубу, высказавшемуся по аналогичному поводу в отношении полноценного использования C++ в программировании<sup>20</sup>, назовем

*«наиболее возмутительным оправданием, слышанном нами по поводу плохого проекта реализации».*

Кстати говоря, аналогия с C++ не случайна, поскольку представление о суперэлементах как о типах, введенных

---

<sup>20</sup> «Средние пользователи слишком тупые, чтобы делать все правильно; на самом деле они даже не заинтересованы в том, чтобы научиться работать правильно, и научить их будет очень трудно. Так что мы даже не будем делать ни того, ни другого. Мы просто оглупим свой продукт» [Голуб, 1996].

пользователем, а не заимствованных из предопределенной библиотеки конечных элементов, переключается с аналогичным представлением в C++ о классах. Эта аналогия простирается еще дальше, если вспомнить о понятии наследования и иерархии классов в C++ с одной стороны, и иерархии типов суперэлементов — с другой.

### 5.6.2. Замечания о тестировании программного комплекса

Все сказанное заставляет весьма внимательно относиться к процедуре тестирования программного комплекса, который пользователь собирается приобрести. Ему можно порекомендовать предварительно решить некоторые из известных «плохих» задач, например, задачу о консольном стержне с нумерацией от заземления к свободному концу.

Одним из необходимых методов тестирования является проверка на совпадение результатов расчета при симметричном и несимметричном разбиении области на конечные элементы (рис. 5.32). Лишь при хорошем совпадении результатов можно быть уверенным, что в практических задачах с нерегулярной границей, концентраторами напряжений и т.п., когда симметричное разбиение невозможно, результатам расчета можно доверять.

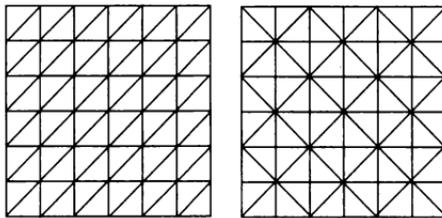


Рис. 5.32. Две системы разбиения области

Эффективной проверкой работоспособности программы и использованных в ней конечных элементов является предложенный Брюсом Айронсом еще в 1975 году, но не очень известный пользователям, *петч-тест* [Irons, 1975]. Идея этого теста состоит в том, что для «хорошей» задачи с известным аналитическим решением специально применяется крайне хаотично сконструированная расчетная модель.

Типичным примером может быть прямоугольная пластинка в условиях однородного сжатия, а также сферического или цилиндрического изгиба (рис. 5.33). Хаотическое расположение

конечных элементов, соответствующее названию теста (patch — заплата), вскрывает те элементы расчетной модели, которые могли бы не проявиться при использовании регулярной расчетной схемы.

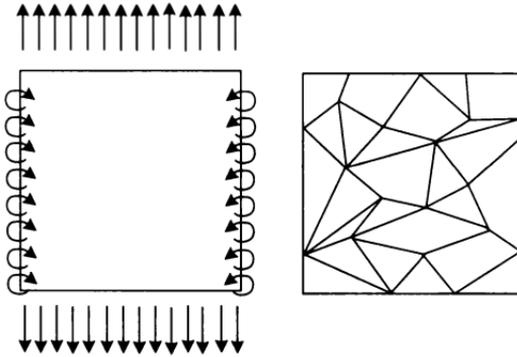


Рис. 5.33. Петч-тест: схема и расчетная модель

Пример такого тестирования представлен на рис. 5.34, на котором изображены изополя перемещений, полученные при нормальном и петч-разбиениях с использованием комплекса SCAD.

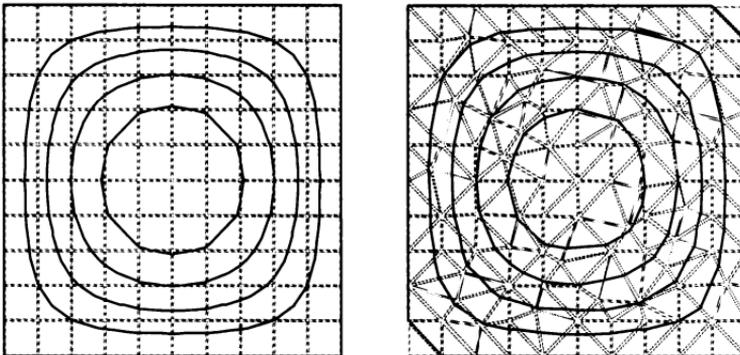


Рис. 5.34. Изолинии поля перемещений при изгибе

Создание тестов является ответственной научной проблемой, о ее нетривиальности свидетельствует набор весьма громких имен специалистов, отдавших решению этой проблемы свой талант и время (см., например [Babushka, Oden, 1992, 1995], [Babushka, 1996], [Belytchko, 1993]).

При этом были построены весьма хитроумные тестовые задачи, в том числе и такие, которые приводят к парадоксальным результатам. В качестве примера укажем на задачу расчета конструкции типа балки, для которой расчетная схема представлена на рис. 5.35. Решение, построенное с использованием обычных гипотез для балки

Бернулли-Эйлера, дает значение перемещений и усилий для всех точек расчетной схемы.

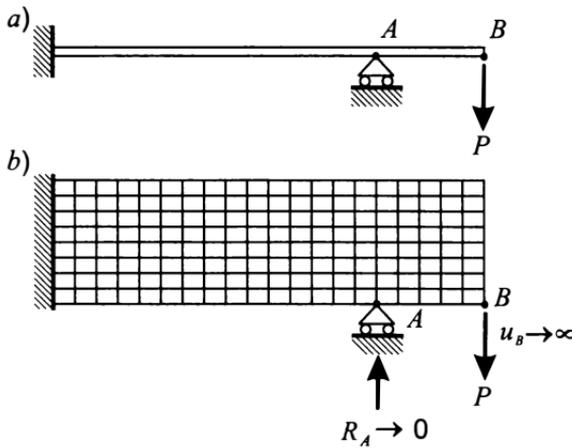


Рис. 5.35. Тест Одена

Если попытаться уточнить расчет, воспользовавшись конечно-элементной моделью показанной на рис. 5.35, b), то при сгущении сетки конечных элементов мы должны получить стремящиеся к бесконечности перемещения в точке приложения сосредоточенной силы  $u_B \rightarrow \infty$  и стремящееся к нулю значение реакции в точке А,  $R_A \rightarrow 0$ . Действительно, если посчитать, что в пределе  $R_A \neq 0$ , то, пользуясь принципом освобождения от связи, получаем, что под сосредоточенной силой  $u_A \rightarrow \infty$ . Но тогда связь не обеспечивает выполнения граничного условия  $u_A = 0$  и единственное непротиворечивое решение:  $R_A = 0, u_A = 0$ .

## 5.7. Шаговая процедура

Возможно, не является случайным тот факт, что шаговая процедура (step-by-step procedure), по-видимому, была впервые четко представлена как метод расчета нелинейных объектов в статье [Turner et al., 1956], где также впервые был формально описан метод конечных элементов. Как всегда бывает в таких случаях, затем появились многочисленные публикации, в которых приоритеты оспаривались и уточнялись, в частности, указывалось на то, что соответствующая идея (метод последовательных нагружений) была высказана ранее В.З. Власовым, или ссылались на еще более ранние чисто математические результаты, восходящие к Л. Эйлеру. Но это, с

нашей точки зрения, не является существенным, если говорить о практическом применении шаговой процедуры в компьютерном расчете конструкций. В сознании современного расчетчика шаговая процедура была и остается неотъемлемой частью нелинейного конечноэлементного анализа.

Общие описания шаговой процедуры хорошо известны (см., например, [Стриклин, Хайслер, 1973]), мы же считаем важным указать на те ее черты, которые определяют точность и возможности контроля получаемого решения, а также помогают пониманию работы системы.

В первую очередь, необходимо отметить, что сам переход от системы нелинейных уравнений равновесия

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.85)$$

к уравнениям с параметром

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.86)$$

и далее к цепочке линеаризованных уравнений шагового метода зависит от способа введения в систему времяподобного параметра  $t$ . Приращения которого реализуют переход от шага к шагу.

Если такой параметр выбран так, что известно решение системы (5.86) при некотором значении  $t = t_0$ , а при  $t = t^*$  система (5.86) тождественно совпадает с (5.85), то дифференцирование по  $t$  приводит к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.87)$$

с известными при  $t = t_0$  начальными условиями. Решая для системы уравнений (5.87) задачу Коши, получаем интегральную кривую

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad (5.88)$$

которая при  $t = t^*$  приводит к решению первоначальной задачи (5.85).

Известно несколько вариантов шаговой процедуры, которые, по сути, различаются лишь способами введения параметра  $t$  и используемыми методами численного решения указанной задачи Коши. Все они испытаны на практике и имеют свою сферу применения. Так, в системе **SCAD** имеется возможность воспользоваться следующими модификациями шагового метода:

- простой шаговый метод;
- шаговый процесс с уточнениями;

- шагово-итерационный.

В первом случае на каждом шаге решается линеаризованная задача, и в предположении, что это решение является достаточно точным, реализуется переход к следующему шагу нагружения. Практически, эта процедура соответствует простейшему способу решения системы дифференциальных уравнений, основанному на построении ломаной Эйлера (рис. 5.36, *a*) вместо построения интегральной кривой (5.88).

Погрешность решения нелинейной задачи, т. е. отход ломаной Эйлера в процессе решения не контролируется — предполагается, что погрешность мала за счет выбора малого шага численного интегрирования.

Второй вариант предусматривает контроль невязок на каждом шаге и итерационное уточнение нагружения очередного шага за счет учета невязки в уравнениях равновесия. При этом итерации выполняются с неизменным значением линеаризованной матрицы жесткости (рис. 5.36, *b*), которая была вычислена в начале очередного шага.

Наконец, в третьем случае производится итерационное уточнение решения на каждом шаге с корректировкой линеаризованной матрицы жесткости на каждой итерации (рис. 5.36, *c*).

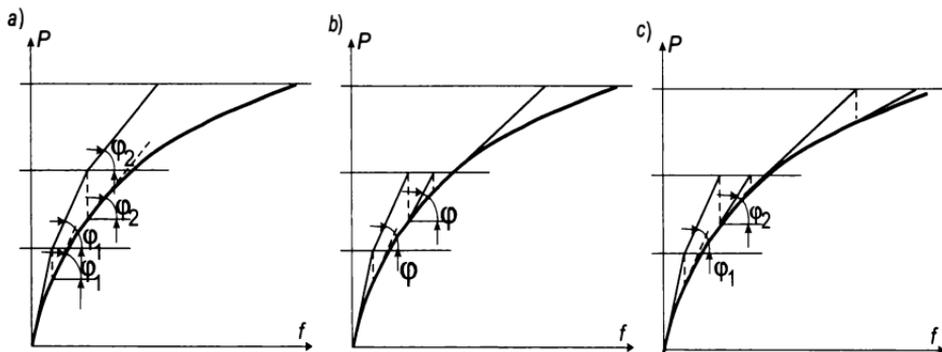


Рис. 5.36. Графическая иллюстрация шагового процесса

Следует отметить, что, варьируя способ введения параметра  $t$ , можно получить содержательную информацию о поведении системы под нагрузкой. Если считать, что такой параметр присутствует в качестве множителя у всех членов уравнений (5.85), непосредственно описывающих внешние воздействия, то его монотонному увеличению от  $t_0 = 0$  до  $t^* = 1$  соответствует пропорциональное увеличение нагрузок, а интегральная кривая (5.88) описывает поведение обобщенных координат в процессе прямого активного нагружения. Для консервативных (нелинейно-упругих) систем такое упрощенное представление о способе приложения нагрузок никак не

должно сказываться на результате, поскольку, по определению консервативной системы, ее результирующее состояние не зависит от последовательности приложения нагрузок. Правда, это теоретическое положение не учитывает то, что уравнения решаются неточно, и ошибка решения может накапливаться, причем величина такой ошибки оказывается связанной с моделированием последовательности приложения нагрузок.

Можно представить себе и другие, более сложные и более близкие к реальности способы приложения и чередования нагрузок. Варьируя их, можно выполнить серию «математических экспериментов» по анализу поведения конструкции при различных режимах нагружения. Для реализации такой программы исследований в системе **SCAD**, например, предусмотрена возможность исследования истории составного нагружения в форме задания последовательности действия отдельных групп нагрузок (элементарных загрузений). В этом случае начало действия новой группы нагрузок соответствует окончанию (достижению полного уровня) для предыдущей группы, т.е. новое элементарное загрузение является продолжением предыдущего. В частности, возможно использование ранее смоделированного элементарного загрузения, но с отрицательной величиной коэффициента интенсивности загрузения, что позволяет исследовать полный цикл «нагрузка-разгрузка». Этот прием дает возможность по расхождению начального и конечного состояний системы  $\Delta f$  оценить точность расчета (рис. 5.37).

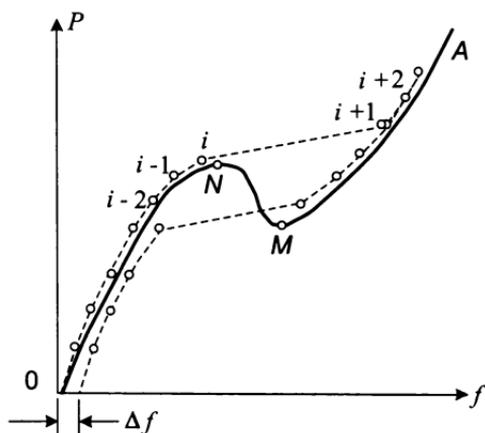


Рис. 5.37. График цикла «нагрузка-разгрузка»

Сопоставление поведения системы в цикле «нагрузка-разгрузка» позволяет в некоторых случаях заметить характерную петлю на графике, отражающем зависимость характерного перемещения от

интенсивности нагружения. Такая петля может свидетельствовать о потере устойчивости системы, которая не была замечена при принятом шаге дробления нагрузки. Система при этом перешла из устойчивого состояния равновесия на ветви  $ON$  в окрестность устойчивого вторичного состояния равновесия на ветви  $MA$ , и все методы контроля качества равновесия (например, по наличию отрицательных коэффициентов на главной диагонали, преобразованной прямым ходом Гаусса матрицы жесткости) не сработали.

Петля на кривой состояний равновесия указывает на наличие нижнего критического значения (точка  $M$ ), само определение которого чаще всего и связывают с исследованием процесса разгрузки. По этому поводу можно привести характерную цитату (см. [Вольмир, 1963], стр. 830):

*«Будем уменьшать параметр нагрузки  $\lambda$  и следить за характером решений, определяющих вторичные состояния. То значение параметра  $\lambda$ , при котором вторичные состояния тела перестают быть устойчивыми, назовем нижним критическим значением...».*

Описанный выше метод решения систем нелинейных уравнений получил в математике наименование метода продолжения решения по параметру и рассматривается как метод построения множества решений нелинейных уравнений, содержащих параметр. Простейший пример таких множеств — кривая в многомерном пространстве, координатами которого являются неизвестные и параметр. Уже один из создателей этого метода Д.Давиденко отметил, что в качестве параметра продолжения решения можно использовать не только параметр задачи, но и любую из неизвестных, а в работах [Григолюк, Шалашилин, 1988], [Grigolyuk, Shalashilin, 1991] было показано, что наилучшие вычислительные свойства обеспечиваются, если в качестве параметра продолжения используется длина вдоль кривой множества решений.

Необходимо отметить, что принципиальная возможность неединственности решения, которая характерна для нелинейных задач, и некритическое отношение к анализу этого явления иногда служили поводом для полного отрицания применимости конечноэлементного подхода к решению задач с сильной нелинейностью [Назаров, 2000].

Детальный анализ «контрпримера» (рис. 5.38) из в работы [Назаров, 2000] был выполнен в [Данилин и др., 2000] с использованием программного комплекса **UAI/NASTRAN**.

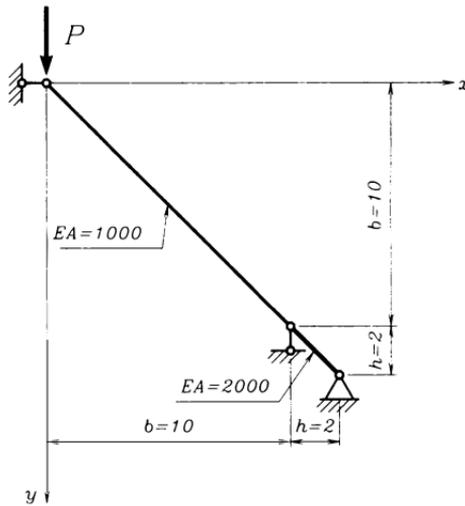


Рис. 5.38. К примеру расчета сильно нелинейной системы

Отмечено, что эта нелинейная задача не может быть решена при стандартных установках комплекса: они оказываются слишком «пугливыми», и при первых признаках отсутствия сходимости решения счет останавливается.

Таким образом, требуется настраивать алгоритм, который обеспечивал бы сходящееся решение во всех точках интегральной кривой. Вот перечень основных установок, определяющих ход итерационного процесса решения данной задачи:

- выбор метода решения — метод длины дуги;
- метод итерации (выбирается автоматически: в зависимости от скорости сходимости осуществляется выбор либо метода касательных к кривой  $\sigma$ - $\epsilon$ , либо метода итерации неуравновешенных нагрузок);
- уровень приращения нагрузки (выбирается автоматически на каждой итерации, в зависимости от сходимости решения);
- критерии сходимости (по ошибке в уровнях энергии, нагрузки и перемещений);
- результаты расчета методом конечных элементов (рис. 5.39).

Важной особенностью шаговой процедуры и ее привлекательным отличием от других методов решения нелинейных уравнений является то, что линеаризованная в окрестности некоторого нагружения система может анализироваться обычными методами линейной строительной механики. Имеют смысл оценки коэффициента запаса устойчивости (естественно, что они

характеризуют возможность роста интенсивности нагружения от уже достигнутого уровня) или частоты и формы собственных колебаний такой линеаризованной или системы.

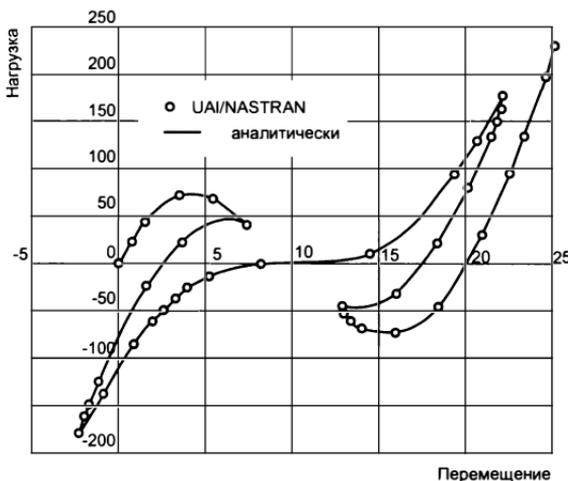


Рис. 5.39. Решение задачи по рис. 5.38

Отмеченные особенности шаговой процедуры, которые характеризуют ее не только как способ получения решения задачи, но и как инструмент анализа свойств конструкции, в некоторых случаях заставляют использовать достаточно дробное разбиение нагрузки на небольшие шаги. В целом же, в особенности для геометрически нелинейных задач, где поведение системы является достаточно «плавным», более целесообразно использовать комбинацию довольно крупных шагов нагружения с итерациями на каждом шаге.

Так, на рис. 5.40 представлена зависимость общего числа итераций от дробления нагрузки на шаги, полученная при решении геометрически нелинейных задач [Сахаров и др., 1982].

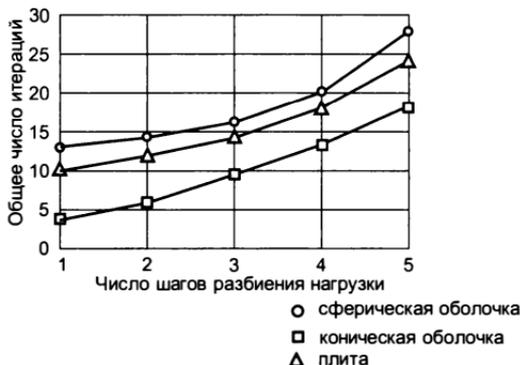


Рис. 5.40. Зависимость количества итераций от величины шага

Для задач с физической нелинейностью, где жесткостные характеристики конечных элементов при переходе к пластической стадии работы могут меняться резко, а также для систем с односторонними связями, где столь же резкие изменения связаны с переключением связей, более целесообразным может оказаться мелкое дробление нагрузки по шагам.

Необходимо отметить, что исследование поведения нелинейной системы может потребовать пересмотра принятой ранее расчетной схемы, в частности, большей детализации конечноэлементной сетки. Так, например, при расчете некоторых оболочек [Srinivasan, Bobby, 1976] оказалось, что с ростом нагрузки (и в особенности, в послекритической стадии) появляются участки оболочки, где деформированная форма срединной поверхности имеет не только плавный, но и сильно меняющийся рельеф. Для качественного приближения такой формы может оказаться недостаточным привычная для линейных задач схема дробления сеткой конечных элементов. Опыт выполнения практических расчетов показывает, что надежные результаты, в том числе и по определению уровня предельной нагрузки, получаются тогда, когда в полуволну формы изгиба (формы потери устойчивости) попадает не менее 3–4 конечных элементов.

## 6. АНАЛИЗ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

*... на общем собрании членов английского королевского общества корабельных инженеров при обсуждении доклада сэра В.Уайта, бывшего тогда главным строителем флота, о вновь построенных морских кораблях типа Majestic адмирал лорд Чарльз Бересфорд...сказал «Мы будем тонуть на этих кораблях, а сэр В.Уайт будет объяснять, почему мы утонули».*

**А.Н. Крылов**

### 6.1. Проблема анализа

Сложную конструкцию можно спроектировать, положившись либо на строгий расчет, либо на удачу или, наконец, принять к реализации традиционный проект. При ручных методах выполнение строгих расчетов часто бывало затруднительным, и поскольку удача, как известно, непостоянна, то приходилось ориентироваться на традиционные конструкции, надежность которых была проверена многолетним опытом. Но сейчас положение изменилось.

Несмотря на то, что в настоящее время вычислительные возможности резко возросли, это не означает, что все расчеты, выполняемые на компьютерах с использованием специального программного обеспечения, являются хорошими. Поведение сложной конструкции является сложным — эта простая мысль не всегда осознается в должной мере, а отсюда и проистекают многие погрешности. Оказывается, что для хорошего расчета требуется не только соответствующая программа для ЭВМ, но и участие квалифицированного расчетчика. Применение сложной программной системы без достаточного понимания ее теоретической основы и использованных методов решения задачи, без тщательного неформального анализа результатов расчета часто приводит лишь к иллюзорному ощущению обоснованности принимаемых проектных решений. В этих случаях для избежания неприятностей требуется большое везение.

По-видимому, сейчас проведению хорошего расчета сложной и ответственной конструкции могут помешать следующие факторы:

- недостаточное понимание расчетчиком основных идей выполненного машинного расчета, недостаточная квалификация пользователя;
- неполная информация об особенностях использованной программы (например, о свойствах примененных конечных элементов);
- ограничения на время выполнения расчета;
- отсутствие наглядности полученных результатов, маскирование основных данных многочисленными несущественными деталями.

Проблема квалификации пользователя неоднократно становилась предметом специальных дискуссий, иногда даже возникали вопросы о введении специальных *«удостоверений пользователя»*, но хорошего решения проблемы так и не было найдено. Постепенно возрастает абсолютное число квалифицированных пользователей, но их относительное количество, скорее всего, сохраняется небольшим. Остается рассчитывать на то, что острота проблемы несколько снижается за счет внедрения в современные программные продукты специальных приемов для облегчения анализа, что делает их доступными и для расчетчиков средней квалификации. Некоторые из упомянутых приемов рассматриваются ниже.

На прошедшей в 2001 году международной конференции по проблемам устойчивости, посвященной 70-летию проф. Йоганна Арбоcha (директора института им. В. Койтера в Дельфте), было сказано, что в настоящее время появилась и начинает интенсивно развиваться новая инженерная специальность — **интерпретатор результатов компьютерного расчета**, которая пользуется большим спросом в проектно-конструкторских организациях<sup>1</sup>. Это мнение специалиста, к которому результаты расчетов поступают в готовом виде, указывает еще на одну сторону проблемы — необходим не только обратный перевод конечно-элементного описания задачи на язык более традиционного «непрерывного» описания, но и квалифицированный анализ различий между этими двумя моделями.

## 6.2. Какие результаты расчета нужны

Общепринятый набор разыскиваемых результатов (перемещения, усилия, поля напряжений) стал настолько традиционным, что почти

---

<sup>1</sup> Сообщение проф. В.А. Заруцкого

не обсуждается. Однако этот набор далеко не достаточен для серьезного осмысления характера полученного решения задачи. Кроме того, способы отображения этих результатов являются весьма громоздкими, что также не способствует ясному пониманию особенностей решенной задачи.

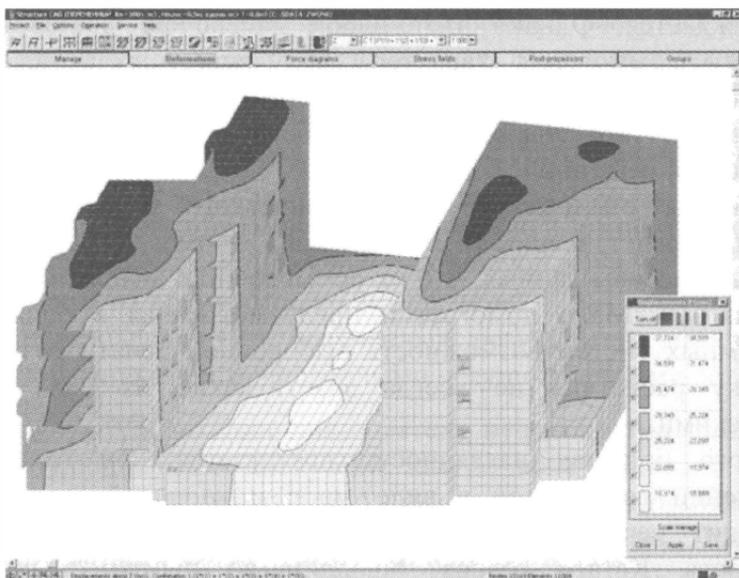
Результаты статического и динамического расчетов сложной системы, представленные в числовой форме, содержат такие огромные массивы данных, что их осмысление и анализ практически невыполнимы. Мало помогает и предусмотренная в большинстве программных систем возможность выборочной печати результатов, поскольку расчетчик не всегда знает, какие из них окажутся критическими.

Намного большая наглядность достигается при графическом отображении результатов в виде эпюр и изополей, при котором происходит серьезное сжатие информации, и она приобретает наглядность. Кстати говоря, большинство программных систем способно выдавать в графическом представлении изополя только для избранных компонент напряженно-деформированного состояния конструкции. А между тем, уже давно и задолго до появления современных средств вычислений были известны и даже получили свои особые наименования такие графические представления, как *изостаты*, *изохромы*, *изоклины* и *изопахики*.

Напомним, что изостатами называются линии, во всех своих точках касательные к одному из главных напряжений в данной точке. Изохромами называются линии равных максимальных касательных напряжений. Изоклины представляют собой кривые, проходящие через точки области, в которых направления главных напряжений одинаковы. Наконец, изопахика — это кривая, в каждой точке которой сумма обоих главных напряжений постоянна.

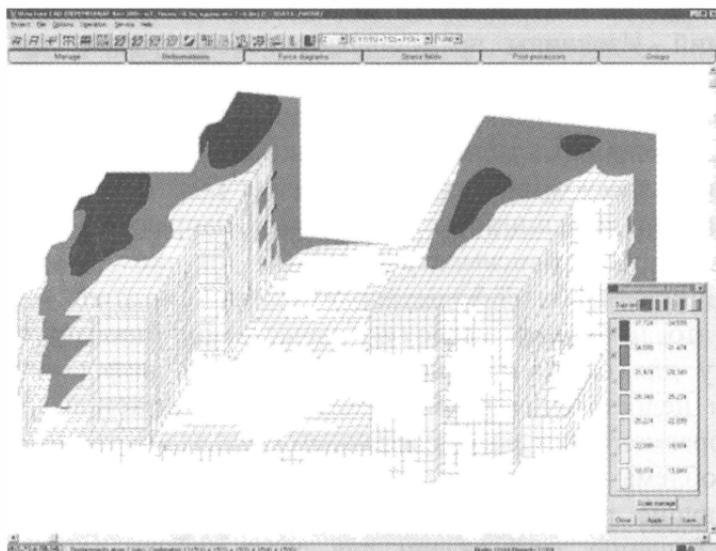
В идеале, программная система должна быть способна выдавать изополя (и/или изолинии) тех параметров напряжений/деформаций, функциональную зависимость которых от компонент тензора напряжений/деформаций формулирует сам пользователь.

Но и это не всегда позволяет качественно произвести анализ, поскольку для системы в целом графическая информация может оказаться недостаточно разборчивой и удобочитаемой (рис. 6.1), а при ее фрагментации восстанавливается наглядность, но возникает новая проблема — поиск того фрагмента, на котором реализовались интересующие пользователя значения тех или иных результатов расчета. Решение этой задачи для сколь-нибудь сложной схемы совсем нетривиально.



**Рис. 6.1.** Цветовое отображение информации (поля изгибающих моментов) — полная картина данных

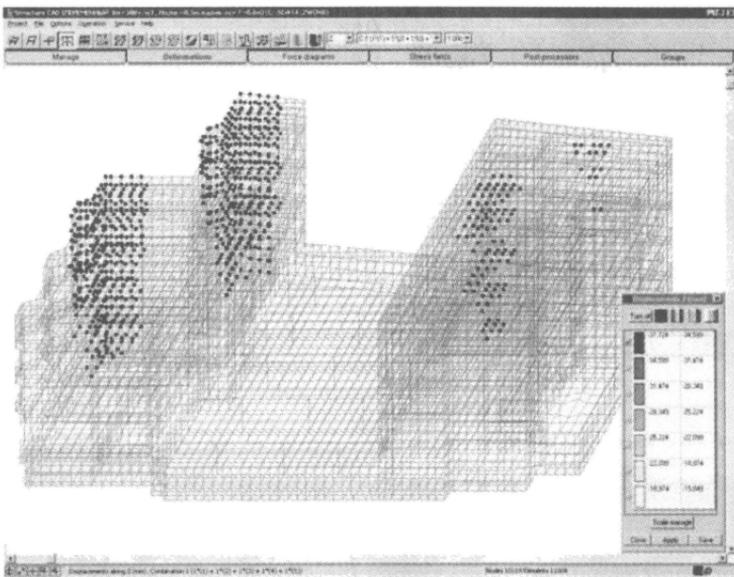
Выходом из положения может служить предложенный в комплексе SCAD прием, основанный на управлении цветовым отображением. Имеется возможность выдачи в цвете только тех частей изополя, которые принадлежат определенному диапазону значений, с отключением всех прочих уровней (рис. 6.2).



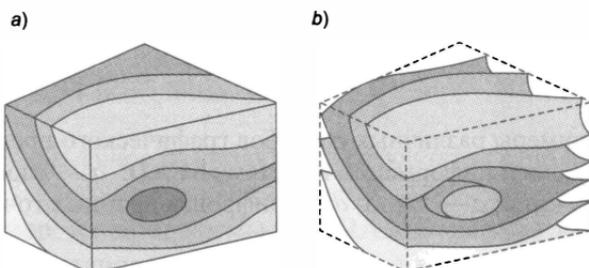
**Рис. 6.2.** Цветовое отображение информации (поля изгибающих моментов) — выделение верхних уровней;

Тогда становится очевидной локализация «критических» значений результатов расчета. Еще более точно расположение этих мест видно из так называемой *карты значений*, поскольку она оперирует с «прозрачной схемой» (рис. 6.3).

Следует отметить, что представление изополей является наглядным лишь в случае двумерных объектов. Для задач, где рассматриваются трехмерные тела, доступны только изображения изополей на внешних границах (рис. 6.4,*a*) и можно еще использовать изополя, построенные на разрезах, которые указываются пользователем. Однако процедура построения разрезов все же является достаточно утомительной и, главное, не дает представления об общей картине. В связи с этим заслуживает внимания, имеющаяся в некоторых программных системах (например, в ANSYS) возможность показа системы изоповерхностей (рис. 6.4,*b*).

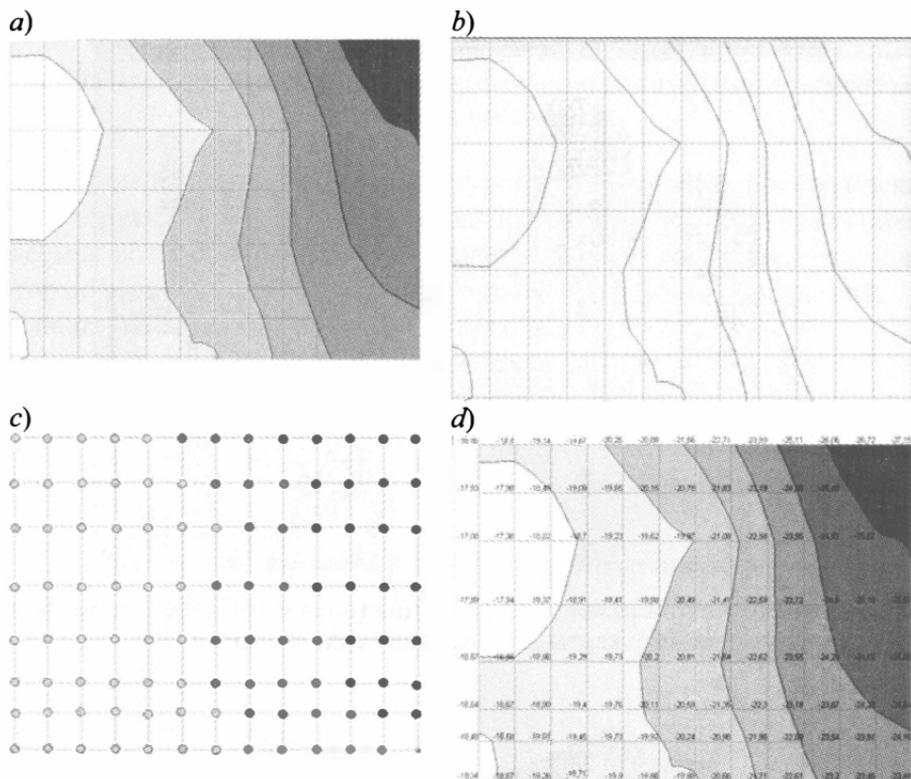


**Рис. 6.3.** Цветовое отображение информации (поля изгибающих моментов): просмотр карты локализации верхнего уровня



**Рис. 6.4** Пример показа изоповерхностей

Неудачная визуализация результатов расчета может свести на нет все преимущества, которые были получены в процессе его выполнения. Разработчики программных средств обычно обращают большое внимание на эту сторону проблемы и предоставляют пользователю на выбор несколько систем визуализации (рис. 6.5). Кроме изополей это может быть представление результатов расчета (перемещений, усилий, напряжений) в виде так называемых карт, когда пользователь может раскрасить конечные элементы или узлы в цвета, соответствующие некоторым выбранным диапазонам значений или же нанести на конечные элементы специальные цветные маркеры (рис. 6.3). Весьма полезна имеющаяся во многих программных системах функция «пробника», позволяющая получить оцифрованные значения изополей в любых точках, которые пользователь пометит курсором (рис. 6.5.d).



**Рис. 6.5.** Примеры различных способов графического представления результирующей информации в системе SCAD: *a* — изополе; *b* — изолинии; *c* — карта; *d* — оцифровка пробных точек

Удобно, если выбор цветовой шкалы изополей или карт регулируется пользователем, как это предусмотрено в системе SCAD; тогда появляется возможность отсеять несущественные результаты путем отказа от их раскраски. При этом пользователь имеет возможность самостоятельно регулировать количество и размер интервалов между линиями уровня, что увеличивает его возможности по анализу результатов, поскольку реализуется команда типа

*«Показать область, в которой результат  $X$  (усилие, перемещение) имеет значения от  $X_1$  до  $X_2$ ».*

Несмотря на все удобства графического представления результатов, полученные числовые значения также крайне важны и не только для последующей обработки числовой информации, но и для уточнения данных, представленных в графической форме. Одним из наиболее удачных вариантов следует считать, возможность одновременного показа данных расчета в числовой и графической форме, представляемую некоторыми программными системами.

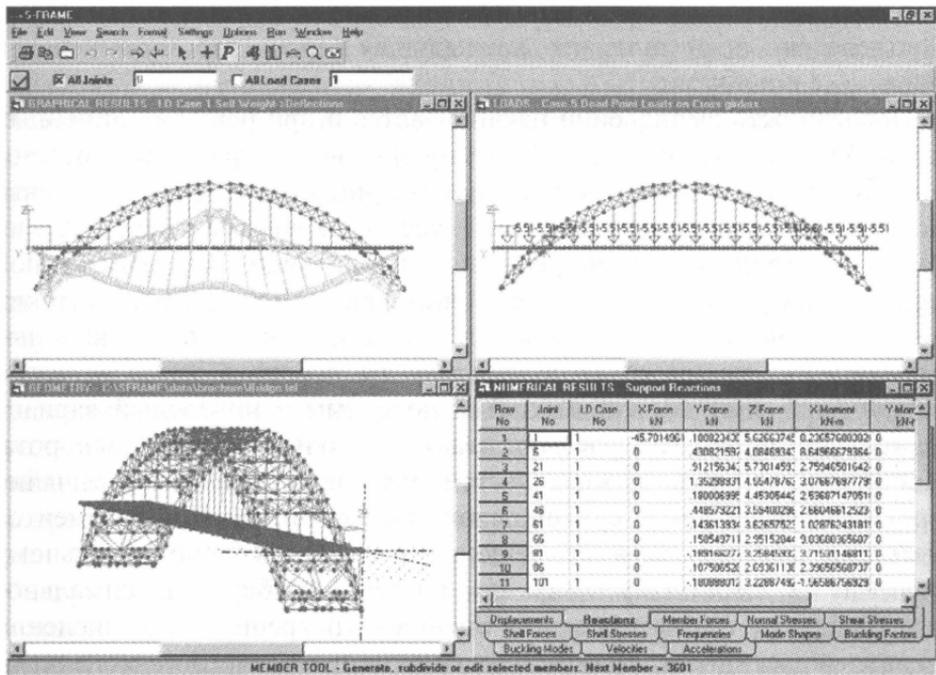


Рис. 6.6. Одновременное представление результатов в различных формах

Такой пример из программы S-FRAME дан на рис. 6.6, где на экране монитора одновременно находятся графические изображения расчетной схемы, схемы приложения нагрузок и деформированного

состояния системы, а также таблица числовых данных, полученных в результате расчета.

Возможность найти и задокументировать требуемые результаты еще не решает проблему их оценки.

Традиционно принято представлять результаты расчета (перемещения, усилия, напряжения) в некой «окончательной» форме, забывая о всех погрешностях, присутствующих в исходной информации, а также о возможных погрешностях вычислений. Напоминание о приближенности полученного решения важно, особенно для нелинейных задач, решение которых отыскивается приближенно. Но эта информация должна быть хорошо представлена пользователю, в противном случае могут возникнуть недоразумения. Курьезным примером может служить реакция пользователей на присутствие в результатах нелинейного расчета значений невязки уравнений равновесия, соответствующих найденному приближенному решению. Эти данные, появившиеся в очередной версии программы SCAD (в предшествующих версиях они попросту не показывались), вызвали недовольство, поскольку некоторые пользователи посчитали, что предыдущая версия работала точно, а новая — с ошибками.

Погрешность вычислений накапливается и при решении линейных задач большой размерности. Поэтому многие программные системы выдают оценку точности разложения матрицы жесткости. Эта оценка оперирует с конкретной матрицей жесткости рассматриваемой системы и строится путем решения специальной вспомогательной задачи, для которой известно точное решение. Одной из таких вспомогательных задач является случай, когда все линейные перемещения равны единице, а все углы поворота узлов — нулю (*тест Горбовца*). Может оказаться полезным и инверсный вариант этого теста, когда рассматриваются только углы поворота. Построение столбца правых частей для такой задачи чрезвычайно просто и реализуется суммированием соответствующих элементов матрицы жесткостей, а ее решение сводится к дополнительному прямому и обратному ходу по такому столбцу. Максимальное отклонение от точного решения оценивает погрешность вычислений и дает возможность судить о корректности расчетной модели. К сожалению, неквалифицированные пользователи не всегда обращают внимание на эту оценку.

Следует иметь в виду, что тест Горбовца *предупреждает о возможности* появления больших ошибок округления. Но это не значит, что расчет на какой-либо реальный вариант нагрузки приведет к ошибкам того же порядка, которые получены с помощью

этого теста. Это напоминает ситуацию с оценкой ожидаемых погрешностей, которые используют числа обусловленности матрицы коэффициентов системы разрешающих уравнений. Указанные числа оценивают возможную вычислительную погрешность решения в предположении, что от заданного значения может отклониться любой член матрицы жесткости.

Но в системах метода конечных элементов матрицы имеют некоторую наперед известную структуру (например, ленточную) и ряд членов матрицы жесткости являются *неварьируемыми нулями*. Естественно, что в таком случае нарушаются условия вывода теорем о числах обусловленности, и можно получить хорошее решение даже при плохой обусловленности разрешающих уравнений. Типичным примером, может служить диагональная матрица, в которой попросту отсутствует накопление вычислительной погрешности.

Традиция «точного» представления результатов расчета противоречит отмеченному выше свойству случайности исходных данных, которые, естественно, приводят к случайному результату расчета. Поэтому, в дополнение к оценке вычислительной погрешности, необходима оценка возможного разброса результатов, связанного с неточностью входных параметров. Этими данными следовало бы дополнить традиционный набор результатов. Кроме того, по мнению авторов, результаты следует дополнить анализом чувствительности решения к возможным изменениям основных параметров. Более подробно об этом сказано ниже.

Чрезвычайно сложна и до сих пор полностью не имеет удовлетворительного решения проблема документирования результатов расчета. Конечно, любой современный расчетный комплекс дает возможность получения твердой копии с любого подмножества результатов расчета, включая и полный вариант. По традиции, эти распечатки, дополненные распечаткой исходных данных, передаются в архив проектной организации и хранятся там на правах подлинников. Но любая программа живет своей жизнью, в нее вносятся исправления и дополнения, ликвидируются обнаруженные ошибки, меняются версии и т.п. Поэтому нет никакой гарантии, что при необходимости контроля ранее выполненного расчета будут получены абсолютно идентичные результаты. Выходом из этого юридического тупика мог бы служить вариант сохранения на магнитных (или оптических) носителях *полного комплекта информации*, включая использованный вариант программы, установленные параметры настройки, комплект исходных данных и результатов во внутреннем формате.

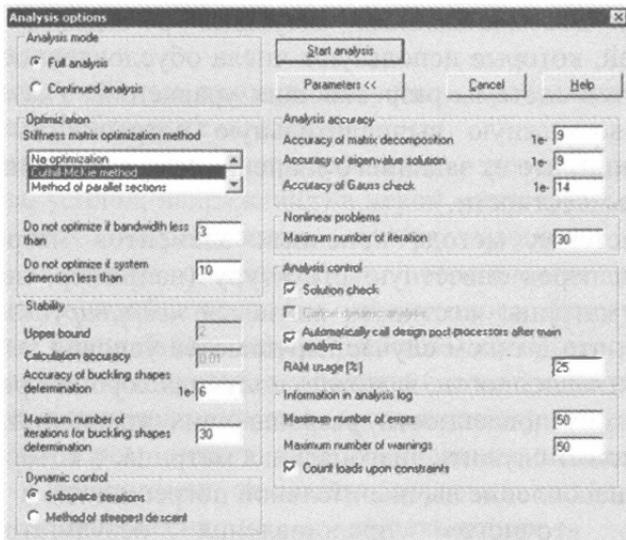


Рис. 6.7. Параметры настройки системы SCAD

Необходимо также обеспечить сохранение всей информации о значениях параметров настройки, которые были использованы при решении задачи, с тем, чтобы его можно было повторить и получить идентичные результаты. Такая возможность предусмотрена, например, в системе SCAD, где опции настройки (рис. 6.7) записываются при расчете внутрь файла с исходной информацией.

Однако, далеко не все программные системы гарантируют такую возможность, что, по мнению авторов, является явной недоработкой.

### 6.3. Общая апробация

В работе [Диксон, 1969] сказано:

*«Последний вид проверок, проводимых при инженерном анализе, называется проверкой **физического смысла** результата. Имеются веские основания не путать физический смысл со **здравым смыслом** или общим мнением... Не все то, что делается и говорится во имя здравого смысла, действительно имеет смысл. Здравый смысл позволял сжигать “колдунов”, преследовать Галилея и смеяться над паровой машиной».*

Там же указывается на следующие очевидные аспекты проверки физического смысла:

- являются ли числовые результаты практически реальными;

- не противоречивы ли результаты с точки зрения размерностей;
- проверка для предельных случаев;
- проверка тренда (тенденции изменения);
- проверка законов;
- проверка на полноту (все ли существенные факторы учтены).

Этот общий список проверок можно дополнять или сужать, но ясно, что общая апробация является весьма важным этапом работы. Пользователю можно рассказать о проверках, но его нельзя заставить выполнить их. Это напоминает историю о лошади и воде — лошадь можно подвести к воде, но ее невозможно заставить пить. Поэтому все сказанное далее есть не более чем попытка подвести лошадь к воде.

После получения результатов расчета, как правило, выполняется их общая оценка. В первую очередь производится проверка наиболее очевидных ожидаемых свойств решения (например, свойств симметрии перемещений в случае расчета симметричной системы на симметричную нагрузку). На тестирование такого рода никогда не следует жалеть усилий, ибо весь накопленный опыт выполнения «машинных» расчетов свидетельствует о бесконечном потоке ошибок в исходных данных. Поэтому уверенность в их безошибочности дорого стоит. Иногда с этой целью создаются специальные «пробные» варианты нагружений, которые порождают заранее предсказуемые особенности решения.

Естественно, что оценка результатов начинается с оценки тех сообщений, которые система выдает в процессе решения задачи. Эти сообщения обычно заносятся в протокол решения задачи, который ведется большинством современных расчетных комплексов, и отражает не только последовательность выполненных расчетных операций, но и те трудности, которые могут встретиться на пути решения.

Достаточно типичный образец такого протокола приведен в таблице 6.1. Здесь следует обратить внимание на следующие детали:

- Выданы сообщения об обнаруженной геометрической изменяемости системы и названы те дополнительные связи, которые комплекс **SCAD** установил самостоятельно для парирования этой изменяемости. Следует проанализировать ситуацию и оценить действия системы, в частности, может оказаться более правильным самостоятельно устранить геометрическую изменяемость способом, более подходящим для рассматриваемой задачи, и решить задачу заново;

- Выданное сообщение о суммарных внешних нагрузках для 1-го и 2-го вариантов нагружения удобно использовать для контроля правильности задания исходных данных, поскольку хотя бы приближенная оценка этих величин, как правило, известна расчетчику;
- В протоколе могут присутствовать сведения о неудачных результатах контроля точности решения задачи (в таблице 6.1 этот случай не представлен) с указанием номера узла, где такой контроль не прошел. Если в указанном узле нет каких-либо серьезных особенностей, то можно попытаться увеличить задаваемую точность разложения матрицы, или, наоборот, снизить точность проверки решения (параметр «точность контроля Гаусса»).

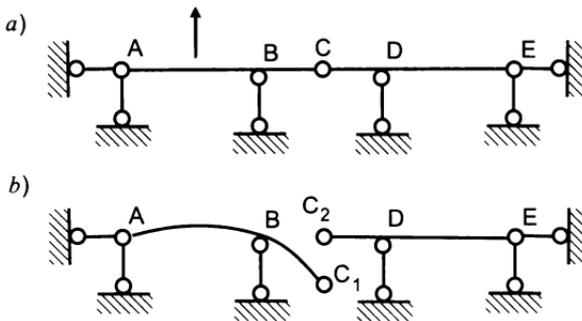
Таблица 6.1.

ПРОТОКОЛ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТА						
Wed Dec 22 07:55:17 1999						
Полный расчет.						
Файл – "C:\SDATA\08.SPR",						
07:55:18	— Ввод исходных данных основной схемы					
07:55:20	— Упорядочение матрицы жесткости основной схемы.					
07:55:21	— Упорядочение матрицы обратным алгоритмом Катхилла-Макки. (старый профиль 1.20416e+07, новый профиль 1.7203e+06).					
07:55:21	— Перенумерация степеней свободы					
07:55:22	— Формирование матрицы жесткости основной схемы					
07:55:31	— Разложение матрицы жесткости основной схемы.					
07:56:15	— Геометрически изменяемая система. УЗЕЛ 170 ТИП СВЯЗИ 2					
07:56:15	— Геометрически изменяемая система. УЗЕЛ 170 ТИП СВЯЗИ 1					
07:56:15	— Накопление нагрузок основной схемы.					
07:56:15	— Суммарные внешние нагрузки					
	X	Y	Z	UX	UY	UZ
1-	0	0	100	0	0	0
2-	0	20	100	0	0	0
07:56:15	— Вычисление перемещений в основной схеме.					
07:56:19	— Работа внешних сил					
	1 -	0.0204431				
	2 -	0.0168025				
07:56:19	— Контроль решения для основной схемы.					
07:56:21	— Вычисление усилий в основной схеме.					
07:56:24						
ЗАДАНИЕ ВЫПОЛНЕНО						
Затраченное время : 1.12 мин.						

Следующим этапом общей апробации результатов расчета может послужить анализ общей картины деформирования системы. Ее графическое отображение дает представление о многих общих закономерностях работы конструкции, некоторые из которых могут

предугадываться расчетчиком (например, ожидаемая симметрия), а другие могут обратить на себя внимание своей неожиданностью.

Во всяком случае, такие грубые ошибки, как неправильно установленные крепления или резкое изменение жесткостных параметров (особенно на части конструкции) довольно часто обнаруживаются при таком неформальном анализе. Типичным примером может служить ситуация, когда в одной точке пространства (см. точку С на рис. 6.8,а) располагаются два узла, и смежные элементы присоединены к разным узлам. На схеме такую ошибку можно и пропустить (хотя для этого в системе **SCAD**, например, имеется функция «Показать совпадающие узлы»), но, рассматривая деформированную систему, такую ошибку сразу же можно увидеть (рис. 6.8,б).



**Рис. 6.8.** Ошибка использования совпадающих узлов: а – схема; б – картина деформирования

Похожий вариант реакции программы на совпадающие по пространственному положению узлы реализован в **GTSTRUDL**. В этой программе автоматически (независимо от желания пользователя) выдается в форме предупреждения список пар узлов, расстояние между которыми меньше некоторой заданной малой величины. Пользователю предоставляется возможность принять решение об игнорировании этого предупреждения, об изменении критерия близости узлов или о внесении изменений в расчетную схему. Аналогичной должна быть и реакция программы на неоднократное соединение одной и той же совокупности узлов разными конечными элементами. Иногда размещение в исходных данных параллельно поставленных конечных элементов осуществляется пользователем сознательно (к запрещению моделей с параллельно поставленными конечными элементами, практикуемому в некоторых программных разработках, авторы относятся неодобрительно), но это же обстоятельство может быть вызвано и просто ошибкой в исходных

данных. Поэтому предупредительная реакция программы представляется наиболее гибкой.

Вообще, поиск неожиданностей часто дает весьма полезные результаты; он позволяет не только обнаруживать ошибки в исходных данных, но и критически отнестись к используемой расчетной модели, приводя к ее уточнению или изменению. Каких бы то ни было общих правил здесь не существует, очень многое зависит от опыта и интуиции расчетчика, но сама настроенность на такой поиск должна стать неременным правилом действия.

Здесь важно помнить о том, что при анализе неожиданностей не бывает несущественных отклонений; важным становится сам факт появления необъяснимого явления, а не его величина. Как остроумно заметил один физик [Хургин, 1979]:

*«...если часы пробили тринадцать раз, то это означает не только то, что тринадцатый удар был неверен. Он порождает сомнение в верности каждого из первых двенадцати ударов».*

Одной из наиболее тяжело обнаруживаемых ошибок является геометрическая изменяемость, которая обычно выявляется только на этапе решения систем разрешающих уравнений, которые в случае изменяемой системы оказываются вырожденными. Традиционным способом обнаружения таких ошибок является контроль ведущего элемента при факторизации матрицы. Если в процессе факторизации элемент на главной диагонали преобразованной матрицы становится значительно меньше, чем соответствующий элемент главной диагонали исходной матрицы, следует ожидать наличия геометрической изменяемости<sup>2</sup>. Столкнувшись в процессе факторизации матрицы с подобной ситуацией, можно по номеру конфликтного уравнения определить номер узла и степени свободы конечно-элементной модели, которые соответствуют данному уравнению.

Однако часто геометрическая изменяемость имеет место в одной части расчетной модели, а конфликтное уравнение при факторизации матрицы указывает совсем на другой узел. В этом случае обнаружить причину геометрической изменяемости очень трудно.

Основная идея ржима верификации расчетной модели основана на том, что если система является геометрически изменяемой, то ее матрица жесткости  $\mathbf{K}$  — особенная и имеет нулевые собственные

<sup>2</sup> Что означают слова «значительно меньше» в общем случае задает пользователь программной системы. В сомнительных случаях полезно выполнить не одну, а несколько проверок с различными значениями критерия малости.

числа, а этот факт можно обнаружить с помощью блочного метода Ланцоша со сдвигами [Фиалко, 2002].

Если первые  $k$  собственных частот являются нулевыми, расчетная модель является механизмом с  $k$  степенями свободы. Тогда соответствующие собственные векторы представляют формы движения механизма. Их можно показать на экране компьютера и выяснить, где именно следует наложить связи, чтобы превратить данную геометрически изменяемую систему в геометрически неизменяемую. На рис. 6.9,а изображена расчетная модель пространственной рамы, имеющая избыточное количество шарниров, а на рис. 6.9,б — формы колебаний для нулевых частот.

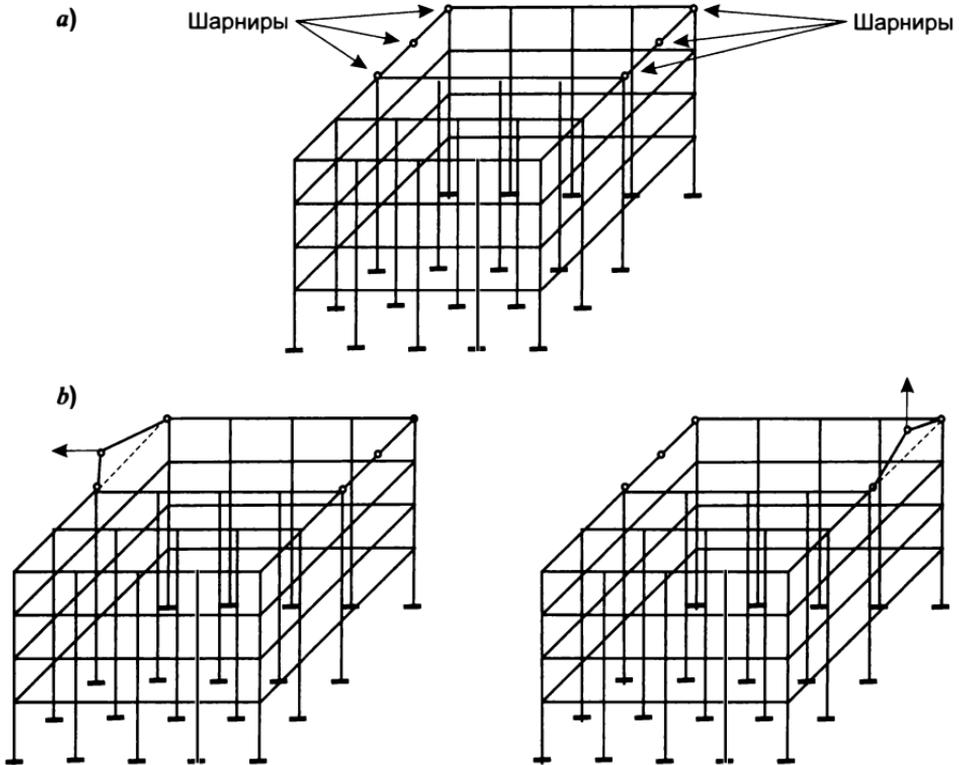


Рис. 6.9. Изменяемая система и ее формы собственных колебаний

Вопрос надежности машинных расчетов — один из наиболее важных. Интерес к этой проблеме привел к созданию области проверяющих технологий, называемых *валидацией* и *верификацией*. Их место в цепочке проверок, без которых невозможно говорить о практическом использовании программных продуктов видно из рис.6.10.

*Валидация* имеет отношение к оценке научных принципов и математических моделей, используемых, при разработке инструментов моделирования. Современные методы валидации также пытаются определять пределы применимости различных схем моделирования и в идеале обеспечить предупреждения, когда эти пределы достигнуты или могут быть преодолены.

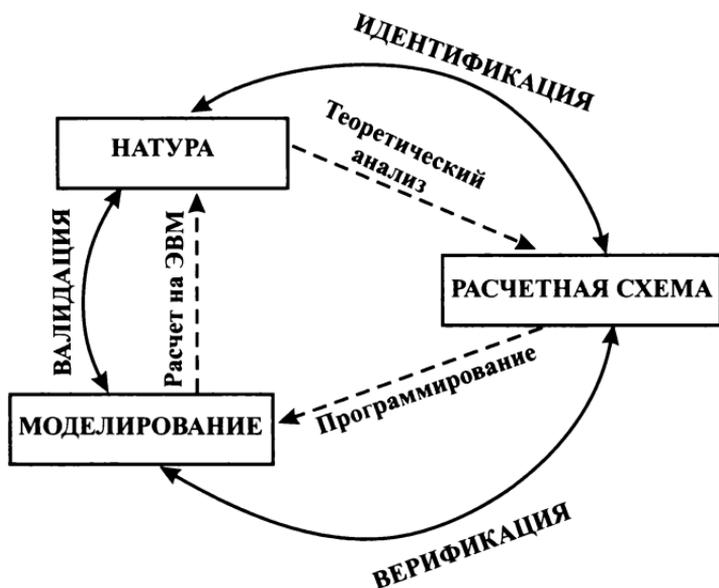


Рис. 6.10. К проверке надежности машинных расчетов

*Верификация* имеет отношение к определению того, что окончательный программный продукт может действительно функционировать так, как это было задумано и может порождать результаты, соответствующие тем моделям, которые положены в основу разработки. Верификация использует оценки качества разработки с привлечением опытных аналитиков с большим стажем работы и ориентирована на минимизацию погрешностей кодирования и оптимизацию вычислительных характеристик программной разработки.

#### 6.4. Характерное перемещение

Одним из наиболее распространенных способов анализа поведения конструкций (в особенности нелинейных) является построение зависимости между некоторой компонентой напряженно-деформированного состояния и интенсивностью нагрузки. В частности, это может быть кривая состояний равновесия.

связывающая параметр интенсивности нагружения с некоторыми перемещениями, определяющими деформированное состояние системы. Для системы с одной степенью свободы эта кривая дает также возможность исследовать качество равновесия, поскольку устойчивым состояниям системы соответствует возрастающая ветвь кривой, а неустойчивым — ниспадающая, но следует подчеркнуть, что указанный критерий относится только к системам с одной степенью свободы. При рассмотрении более сложных систем зависимости «нагрузка-перемещение» могут иметь достаточно вычурный характер и в области устойчивых состояний равновесия. Типичный пример представлен на рис. 6.11, где приведен график «нормальное давление-прогиб» для четырех точек защемленной по контуру цилиндрической панели со следующими параметрами:

- длина хорды  $2c = 20$  см;
- длина образующей  $2l = 20$  см;
- стрела подъема  $f = 5$  см;
- толщина  $h = 0,1$  см;
- модуль упругости  $E = 2,1 \times 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;
- коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Из графиков на рис. 6.11 видно, что еще в докритическом состоянии прогибы точек 1 и 4 меняются немонотонно, в отличие от прогибов точек 2 и 3.

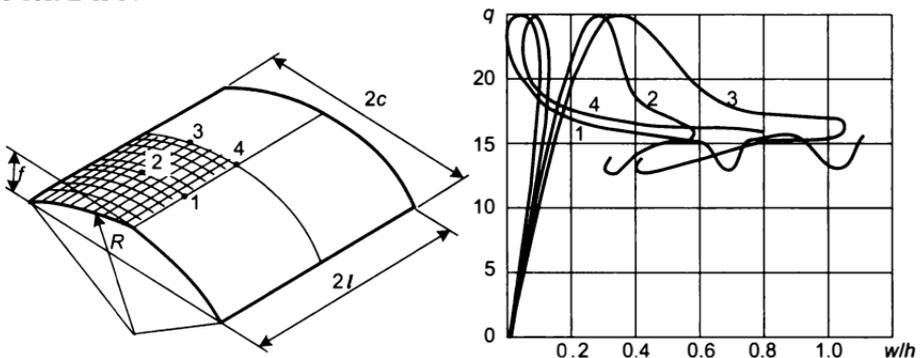


Рис. 6.11. Кривые состояний равновесия

Имеются самые разнообразные примеры выбора рассматриваемых перемещений, используемых при построении кривых состояний равновесия, при этом чаще всего такой выбор ничем не обоснован. Иногда опираются на «интуитивно очевидные» соображения (например, рассматривается прогиб в центре пластины), иногда принимаются те перемещения, которые связаны с наиболее

наглядным представлением некоторого ожидаемого результата (например, для иллюстрации возможной бифуркации равновесия рассматривают поперечное перемещение конца сжатой консоли). Конечно, расчетчик имеет право рассматривать любой удобный для него кинематический параметр, но все же лучше пользоваться такими параметрами, для которых твердо установлены общие свойства кривой, отображающей зависимость «*параметр перемещения*» — «*параметр нагружения*», причем в качестве параметра нагружения чаще всего (хотя это и не обязательно) выступает некоторая величина, характеризующая интенсивность нагружения. В качестве более изощренного способа введения параметра нагружения может выступать положение нагрузки на сооружении или даже положение самой конструкции в некоторой фиксированной системе координат. Примеры подобного рода параметров нагружения встречаются в задачах, связанных с надвижкой пролетных строений мостов.

Пусть приложенная нагрузка  $P(\lambda) = P_0 + P_1(\lambda)$  характеризуется параметром интенсивности нагружения  $\lambda$ , значение которого можно рассматривать как величину действующей на систему обобщенной силы. Тогда можно рекомендовать при построении *характеристической кривой*  $\lambda = \lambda(q)$  использовать *характерное перемещение*  $q$ , т.е. то обобщенное перемещение, которое энергетически соответствует обобщенной силе  $\lambda$  в том смысле, что произведение  $\lambda dq$  дает приращение работы обобщенной силы  $\lambda$  на приращениях перемещения  $dq$ . Тогда, как установлено в [Перельмутер, Сливкер, 1987], при нагружении консервативными силами характеристическая кривая будет обладать следующими важными свойствами:

- на устойчивых ветвях равновесных траекторий выполняется неравенство

$$\frac{dq}{d\lambda} \geq 0; \quad (6.1)$$

- при наложении на линейную систему произвольной линейной связи абсолютная величина характерного перемещения не может увеличиться.

Нетрудно привести примеры того, что эти свойства могут не выполняться, если рассматривать произвольное (не характерное) перемещение. Например, для стержня, опертого на нелинейно-упругую опору, реакция которой пропорциональна кубу смещения (рис. 6.12,а), зависимость между углом поворота  $\varphi$  и силовым

параметром  $\lambda$  такова, что только при  $0 \leq \lambda \leq 7,483$  производная  $d\varphi/d\lambda \geq 0$  (рис. 6.12, б), хотя равновесие этой системы устойчиво при всех  $\lambda$ .

Произвольное перемещение также может не иметь второго свойства, присущего характерным перемещениям. Простейшим примером, связанным с использованием такого нехарактерного перемещения, может служить исследование угла поворота среднего сечения шарнирно опертой балки, который равен нулю при равномерно распределенной нагрузке любой интенсивности. Но стоит наложить на одну из опор связь, запрещающую повороты концевое сечения, как это нехарактерное перемещение станет ненулевым, т.е. его абсолютная величина возрастает.

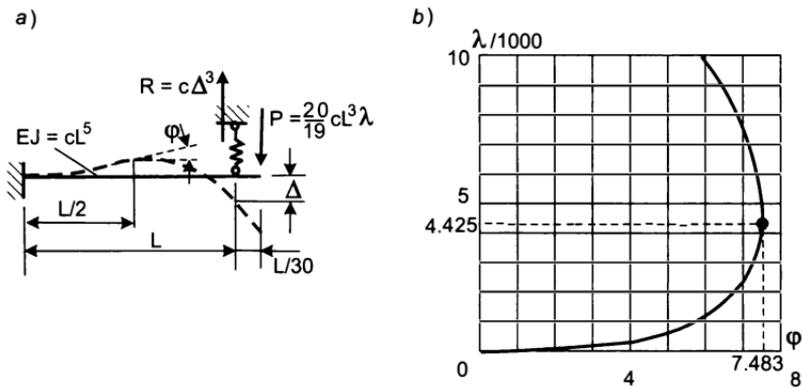


Рис. 6.12. Зависимость между углом поворота и интенсивностью нагружения

Нарушением рассматриваемого условия объясняется и тот факт, что иногда прогиб, вычисленный в центре квадратной пластинки от действия равномерно распределенной нагрузки, оказывается *несколько большим* его точного значения (см., например [Zienkiewicz, Taylor, 2000]), хотя используемый вариант метода конечных элементов в перемещениях не допускает реализации произвольных форм деформирования и, следовательно, накладывает на систему некоторые связи. В данном случае характерным перемещением является не прогиб центра, а объем тела, заключенного между изогнутой и недеформированной поверхностями. Таким образом, эффект «ожесточения» системы в методе конечных элементов может оказаться смазанным.

Для сосредоточенной силы, приложенной в центральной точке пластины, прогиб пластины центре является характерным перемещением, и мы имеем приближение снизу, как это и следовало ожидать (рис. 6.13).

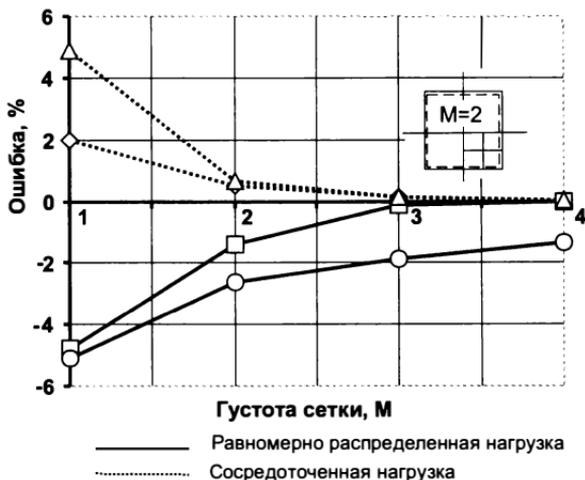


Рис. 6.13. Ошибки определения прогиба в центре квадратной плиты

Полезно отметить, что в методе конечных элементов приближение снизу для характерного перемещения, как и для других интегральных характеристик (например, частоты собственных колебаний) гарантируется лишь при использовании совместных элементов. Несовместные элементы не гарантируют знак ошибки.

## 6.5. Вычисление энергии деформации

Выше уже упоминалось о возможности использования процедуры проверки внутренней сходимости конечноэлементного решения путем выполнения серии расчетов на сгущающихся сетках. При этом решение выполняется с различной степенью детализации расчетной схемы (на глобальных вложенных сетках со сгущениями в области высоких градиентов напряжений или других).

Как известно, обобщенная теорема Пифагора [Стренг, Фикс, 1977] определяет квадрат энергетической нормы погрешности решения как разность квадратов энергетических норм точного решения  $\mathbf{u}^*$  исходной континуальной задачи и решения  $\mathbf{u}^h$  дискретизированной задачи

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^h\|^2 = \|\mathbf{u}^*\|^2 - \|\mathbf{u}^h\|^2, \quad (6.2)$$

причем норма  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{E(\mathbf{u})}$ , где  $E(\mathbf{u})$  — энергия деформации, накапливаемая в механической системе при перемещениях, определяемых вектором  $\mathbf{u}$ , а верхний индекс  $h$  характеризует безразмерное значение максимального диаметра конечных элементов при рассматриваемом сеточном разбиении.

Если имеется цепочка решений на последовательно детализируемых сетках  $h_1, h_2, \dots, h_k$ , то на основании (6.2) можно не только получить информацию о внутренней сходимости процесса при сгущении сетки, но и спрогнозировать эффект наращивания цепочки решений при дальнейшей детализации конечно-элементной модели задачи. Для этого необходимо знать значение энергии деформации системы на ее конечно-элементном решении, что может быть эффективно вычислено без дополнительных затрат памяти, если воспользоваться алгоритмом, предложенным в [Сливкер, 1991].

Вычисление энергии деформаций предусматривается многими программными системами, при этом некоторые из них могут строить зависимости между изменяющимися параметрами конечно-элементной модели и получаемым значением энергии деформации. Так, в системе **StressCheck** [StressCheck, 1998], которая основана на  $p$ -технике конечноэлементного анализа (см. раздел 3.2), можно получить график изменения значений энергии деформаций при неизменной конечноэлементной сетке и изменении степени аппроксимирующего полинома от 1 до 8. При этом энергетическая норма ошибки решения задачи оценивается неравенством

$$\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_N\|^2 \leq \frac{C}{N^{2\beta}}, \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{u}_N$  — конечноэлементное решение, соответствующее системе с  $N$  степенями свободы, само значение  $N$  меняется с изменением показателя степени  $p$ , а константа  $C$  не зависит от  $N$ . Показатель степени  $\beta$ , определяющий скорость сходимости, оценивается из сопоставления решений при различных  $p$ .

На рис. 6.14 и в табл. 6.2 представлены характерные результаты такого рода оценок, выдаваемые программной системой **StressCheck** при решении тестовой задачи.

Таблица 6.2.

$p$	Число степеней свободы	Энергия деформации	Показатель степени $\beta$	Оценка ошибки, %
1	65	1,2622	0,00	70,55
2	171	2,2141	0,74	34,49
3	283	2,4646	1,81	13,88
4	433	2,4991	1,48	7,41
5	621	2,5091	1,77	3,92
6	847	2,5121	2,37	1,88
7	1111	2,5127	2,49	0,96
8	1413	2,5129	2,49	0,53

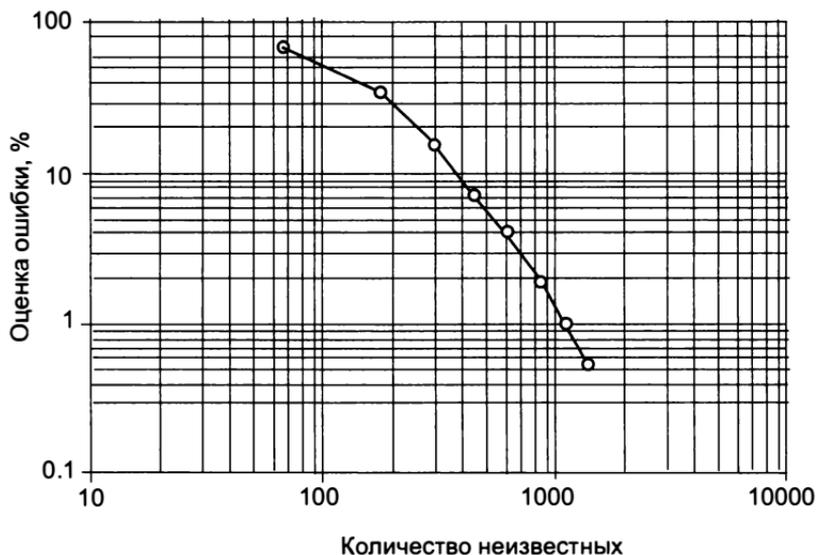


Рис. 6.14. График изменения оценки ошибок

## 6.6. Последующая обработка результатов

Определение перемещений и усилий, которое предусмотрено в любой конечноэлементной системе, недостаточно для большинства практически важных случаев расчета. В некоторых нормативных документах предъявляются требования к таким параметрам деформирования, как «крен» или «закручивание», относящихся, вообще говоря, к системам определенного типа (стойка, жесткое тело и т.п.), имеющим относительно небольшое число степеней свободы. Для упругой системы общего типа эти параметры однозначно не определены, и для них могут быть получены лишь некоторые правдоподобные оценки.

О крене здания можно говорить в том случае, когда все узлы деформированной системы располагаются вдоль некоторой наклонной прямой, которая определяется уравнениями (предполагается, что ось  $Z$  вертикальна)

$$u = a + k_x z; \quad v = b + k_y z. \quad (6.4)$$

Крен в направлении оси  $X$  определяется значением коэффициента  $k_x$ , а в направлении оси  $Y$  — значением коэффициента  $k_y$ , через которые однозначно определяются углы наклона

$$\theta_x = \arctg(k_x); \quad \theta_y = \arctg(k_y). \quad (6.5)$$

Указанные коэффициенты могут быть найдены из условия минимизации суммы квадратов уклонов действительных узловых смещений  $u_i$  и  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) от перемещений  $u$  и  $v$ , вычисляемых по формулам (6.4)

$$\sum_{i=1}^m \left[ (u_i - a - k_x z_i)^2 + (v_i - b - k_y z_i)^2 \right] \Rightarrow \min, \quad (6.6)$$

где  $z_i$  координата  $z$  для  $i$ -го узла,  $m$  — общее число рассматриваемых узлов. Аналогично можно определить общий наклон или общий поворот диска междуэтажного перекрытия, фундаментной плиты и т.п. Эти операции в системе **SCAD**, например, выполняются специальными постпроцессорами.

Другим характерным примером может служить задача определения величины и места приложения равнодействующей всех сил, передаваемых на фундаментную плиту от вышерасположенных конструкций. Эти данные часто необходимы для предварительных оценок размеров фундаментных плит и выбора параметров, описывающих поведение грунтового основания.

В системе **SCAD**, например, эта работа выполняется следующим образом:

- с помощью имеющегося режима *Расчет нагрузок от фрагмента схемы* находятся усилия  $N_i$ ,  $M_{xi}$  и  $M_{yi}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) во всех узлах примыкания колонн к фундаментной плите;
- определяется величина равнодействующей вертикальных нагрузок

$$R = \sum_{i=1}^k N_i; \quad (6.7)$$

- определяются координаты места приложения этой нагрузки

$$X_0 = \left[ \sum_{i=1}^k (N_i y_i + M_{yi} \cos \alpha_i + M_{xi} \sin \alpha_i) \right] / R;$$

$$Y_0 = \left[ \sum_{i=1}^k (N_i x_i - M_{yi} \sin \alpha_i + M_{xi} \cos \alpha_i) \right] / R. \quad (6.8)$$

В уравнениях (6.8) через  $x_i$  и  $y_i$  обозначены координаты  $i$ -й колонны, а через  $\alpha_i$  — угол между ее осью и осью  $X$  глобальной системы координат.

Однако любой набор результатов, который выдается определенной программной системой, фиксирован, и сколь бы богатым он ни был, всегда найдется пользователь, которому потребуется получить нечто выходящее за ранее установленные рамки. Поэтому целесообразно предоставить пользователю возможность самостоятельной обработки результатов вычислений по задаваемым им самим формулам. Для этого в программную систему вносится соответствующий режим или встраивается специальный калькулятор (рис. 6.15), способный оперировать с результатами работы системы.

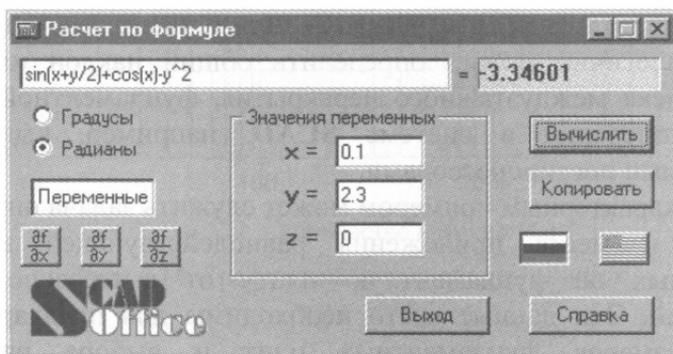


Рис. 6.15. Калькулятор “Расчет по формуле” системы SCAD

Одним из возможных вариантов решения упомянутой проблемы является предоставление возможности передать результаты расчета в такие общеизвестные и универсальные программы, как, например, **EXCEL**. Используя функции этих программ (сортировки, вычисления и др.), пользователь получает практически неограниченные возможности послерасчетного анализа результатов. На рис.6.16 представлен пример такой обработки, когда сглаживающая прямая, приближающая прогибы, получена в **EXCEL** с помощью команды «Построить линию тренда».

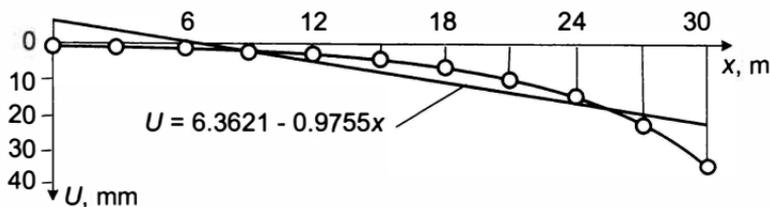


Рис. 6.16. Построение сглаживающей прямой

## 7. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПАРАМЕТРОВ

*По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные, содержащие смысл утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за которым точность и смысл становятся взаимоисключающими.*

Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и принятия решений. — М.: Знание, 1974.

### 7.1. Основные источники неопределенности

Традиционное техническое образование построено на принципе «точности». Со студенческих лет точность расчета определяется и воспринимается инженерами как один из основополагающих факторов. Отклонения признаются нежелательными и поэтому психологически они становятся как бы не существующими, хотя все понимают и признают, что не бывает бездефектных технологий, абсолютно точных измерений и т.п. В связи с этим оперирование неопределенными параметрами требует некоторой перестройки сознания.

Параметры расчетной модели, которыми оперирует исследователь, практически всегда являются величинами неточными. Часто эти параметры являются, по существу, случайными величинами, и, принимая то или иное значение, мы имеем дело с некоторой реализацией такой случайности. Иногда значение детерминированного параметра попросту неизвестно, или имеющиеся сведения о нем крайне расплывчаты в силу ограниченности наших знаний (представьте себе, как выполнялись расчеты лунного модуля в программе «Аполлон» и какими принимались параметры окружающей среды)<sup>1</sup>. Наконец, неточности

---

<sup>1</sup> Известно, что в свое время главный конструктор советских космических систем С.П. Королев «назначил» лунный грунт жестким и закрепил это соответствующим распоряжением. Здесь стоит отметить, что неопределенность в системе знаний

могут явиться следствием приближенности моделирования некоторого явления (типичный пример — нагрузки от ветрового потока моделируются весьма приближенно из-за огрубления аэродинамической картины обтекания объекта).

К числу наиболее изменчивых элементов расчетной модели принадлежат нагрузки. Даже собственный вес конструкций по действующим нормам может меняться примерно на  $\pm 10...15\%$ , а это — одна из самых стабильных нагрузок. Другие нагрузки меняются в гораздо более широком диапазоне как по интенсивности и направлению действия, так и по расположению на конструкции. Именно эта особенность нагружения инициировала разработку разнообразных методов поиска так называемого «*невыгодного нагружения*», т.е. отыскания такого сочетания различных компонентов внешних воздействий, при котором достигается экстремум некоторой внутренней силы, напряжения в сечении, узлового перемещения и т.п.

Начиная от классических работ по обоснованию методов отыскания наиболее невыгодного расположения группы подвижных грузов на линии влияния (см., например, [Рабинович, 1950]) и кончая работами, основанными на применении современных методов решения задач многокритериальной оптимизации [Гордеев и др., 1989], эта проблема привлекала к себе пристальное внимание специалистов по строительной механике. Тем большее удивление вызывает то обстоятельство, что проблема учета изменчивости других параметров расчетной модели оказалась не столь популярной, хотя ее практическое значение чрезвычайно велико.

В достаточно большой мере неопределенными могут быть параметры жесткости элементов расчетной схемы. Они могут быть связаны с естественным разбросом значений, например, такого параметра, как модуль упругости бетона, номинальное значение которого традиционно выбирается по рекомендациям норм проектирования, а возможная изменчивость реализаций, включая возможные изменения в пределах объекта и изменения во времени. столь же традиционно не учитываются <sup>2</sup>. Возможно, это связано с

---

сопровождает вообще любые научные исследования, а не только строительную механику. Вот как об этом пишет известный английский физик Г. Бонди [1972]:

*«Характерной особенностью науки является то, что вы должны иметь возможность описывать явления так, чтобы можно было сказать нечто вразумительное, не имея исчерпывающих данных».*

<sup>2</sup> В статье [Дроздов, 1971] приведены данные о начальном модуле упругости бетона. разброс которого составляет  $\pm 25\%$ .

достаточно узким коридором изменчивости модуля упругости, но во многих случаях имеются достаточно серьезные основания считаться с изменчивостью параметров жесткости<sup>3</sup>. К таким случаям, в частности, принадлежит учет повреждений, которые накапливаются в конструкции в процессе эксплуатации. Эти повреждения должны учитываться при расчетах, связанных с оценкой технического состояния существующих конструкций, и приниматься по обнаруженным при обследованиях значениям. Но далеко не все элементы существующей конструкции доступны для обследования, поэтому о жесткостных параметрах таких элементов судят по состоянию других, доступных частей сооружения. В ответственных конструкциях, когда значения жесткостных параметров являются критичными для оценки состояния существующей конструкции, применяются различные методы неразрушающего контроля. В частности, весьма эффективным в этих целях оказывается применение методов, основанных на простейших динамических испытаниях, когда по замеренным натурным динамическим характеристикам существующих конструкций восстанавливаются их жесткостные параметры. Однако в любом случае диапазон неопределенности при этом может быть достаточно велик.

Большой изменчивостью и, следовательно, неопределенностью значений характеризуются параметры упругости естественных оснований. Здесь играют свою роль и неполнота имеющихся инженерно-геологических данных, и приближенность расчетной модели основания (винклеровская, пастернаковская, полупространство и т.п.). По-видимому, в лучших случаях эти параметры могут иметь разброс значений порядка  $\pm 30\%$ , а в некоторых ситуациях возможны существенно большие отклонения. Достаточно типичными являются результаты исследования напряженно-деформированного состояния рамных систем на статистически неоднородном упругом основании, опубликованные в работе [Юсупов, Давлетханова, 1983].

По результатам численного анализа рамы, показанной на рис. 7.1,а при различных предположениях о статистических свойствах упругого основания были найдены зависимости расчетных моментов от отношений жесткостей ригеля и стойки (рис. 7.1,б).

<sup>3</sup> Другим изменчивым параметром является коэффициент Пуассона. Так, выполненные в Институте механики НАН Украины измерения упругих констант стеклопластиков показали, что при вариации модуля упругости порядка 3...20% коэффициент Пуассона варьируется в пределах 10...40%.

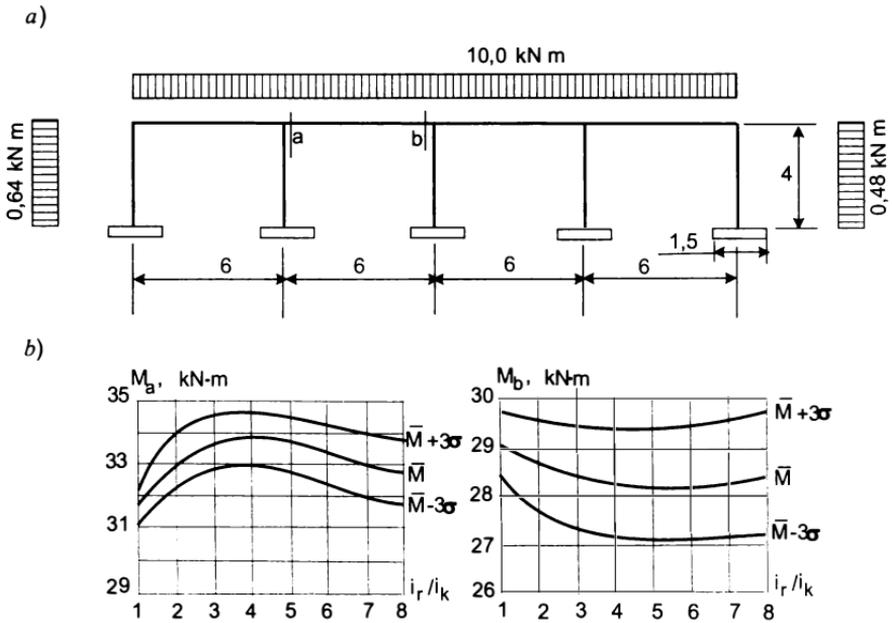


Рис. 7.1. Схема рамы

Разброс результатов, определяемый коэффициентом изменчивости, т.е. отношением среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  к среднему значению расчетного момента  $\bar{M}$ , заметно зависел от вида корреляционной матрицы, определяющей статистическую связь между случайными податливостями основания под различными колоннами (рис. 7.2). Иными словами, эта матрица характеризовала пространственную неравномерность жесткостных свойств основания.

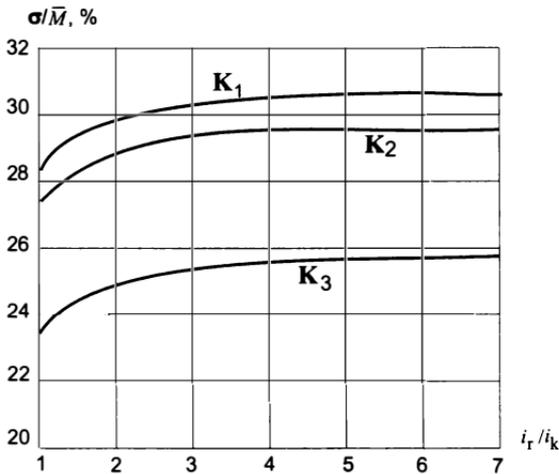


Рис. 7.2. Зависимость разброса результатов от корреляции по пространству



учетом присоединенной массы жидкости, вовлекаемой в движение при колебаниях конструкции.

Таблица 7.1.

Тип связи	Значения $m = R/r$					
	$\mu=1,0$	$\mu=0,8$	$\mu=0,6$	$\mu=0,4$	$\mu=0,2$	$\mu=0,1$
Абсолютно жесткая	1000,0	100,0	50,0	20,0	10,0	5,0
Очень жесткая	100,0	50,0	30,0	15,0	10,0	4,0
Весьма жесткая	30,0	25,0	10,0	5,0	4,0	3,0
Не очень жесткая	10,0	5,0	4,0	3,0	2,0	1,0
Податливая	3,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,0
Весьма податливая	0,6	0,5	0,3	0,2	0,1	0,0
Очень податливая	0,3	0,25	0,2	0,1	0,0	0,0
Связь отсутствует	50,0	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3

Обозначения:

$R$  — реакция изолированной связи от единичной деформации;

$r$  — ее же реакция, в составе конструкции при единичном смещении по направлению связи;

$\mu$  — уровень доверия к выводу о типе связи (функция принадлежности).

Оценка влияния разброса исходных данных на результаты расчета, к сожалению, почти никогда не публикуется, даже в тех немногих случаях, когда такой анализ и был проведен. Именно поэтому каждая такая публикация важна. Мы приведем здесь данные из статьи [Baeyer, 1996], в которой рассматривались две расчетные схемы мощного фундамента под турбину (рис. 7.3) — стержневая модель  $A$  и модель из пространственных восьмиузловых элементов  $B$ .

Было произведено сравнение роли различных факторов неопределенности и их влияние на частоты и формы собственных колебаний. Для величин  $f$ , являющихся функциями от неопределенных параметров  $X_1, \dots, X_n$ , вводилась оценка размаха по каждому параметру

$$S_i = [f(X_i)_{max} - f(X_i)_{min}] / [f(X_i)_{max} + f(X_i)_{min}], \quad (7.1)$$

а общая ошибка оценивается как

$$S_f = \sqrt{\sum_i S_i^2}. \quad (7.2)$$

Если рассматриваются векторные значения  $V$  (например, формы колебаний), то используется критерий корреляционного типа

$$M_{A_j, B_k} = (V_{A_j} V_{B,k})^2 / [(V_{A,j} V_{A,j})(V_{B,k} V_{B,k})], \quad (7.3)$$

где индексы  $A$  и  $B$  подразумевают, что форма колебаний  $V$  формируется с использованием двух различных моделей  $A$  и  $B$ , а

индексы  $j$  и  $k$  указывают на номера форм колебаний, для которых строится оценка. С использованием этого критерия строится оценка

$$S_V = [1 - M_{A_j, B_k}] / [1 + M_{A_j, B_k}]. \quad (7.4)$$

Частоты собственных колебаний сопоставлялись по критерию (7.2), а формы — по критерию (7.4). Результаты анализа приведены в табл. 7.2.

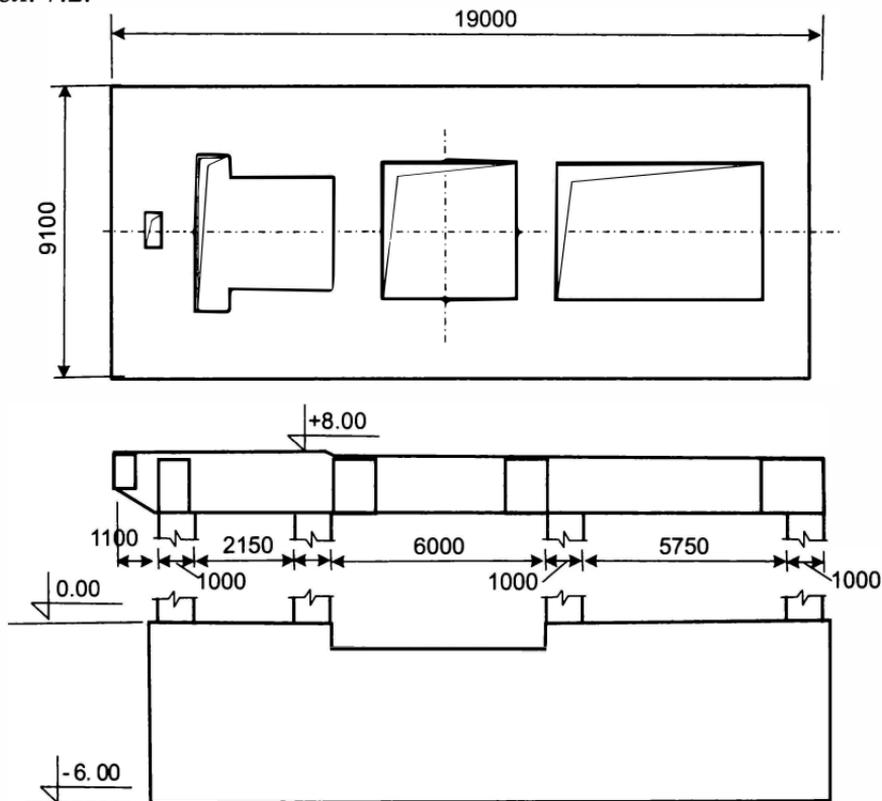


Рис. 7.3. Схема фундамента под турбоагрегат

Таблица 7.2.

Сравнение по:	$S_f$ , % — в интервале частот:		$S_V$ , % — по формам:	
	$f_1 \dots f_3$	$f_4 \dots f_{20}$	$V_1 \dots V_3$	$V_4 \dots V_{20}$
Группа неопределенностей:				
а) параметры грунтового основания	43	49	3	40
б) модуль упругости и коэффициент Пуассона конструкции	8	8	2	57
в) расчетная модель	5	15	3	48
Общее по всем неопределенностям	44	52	5	85

Как и следовало ожидать, наименее достоверными оказываются результаты, относящиеся к высшим частотам и формам собственных колебаний. Это еще раз свидетельствует против увлечения слишком детальными расчетными схемами.

Еще одним источником неопределенности может явиться значение параметров задаваемого предварительного напряжения конструкции. На этот факт обращалось внимание в работе [Перельмутер, 1969], где было показано, что неточность преднапряжения мачтовых конструкций, нормируемая с допуском  $\pm 8\%$ , может привести к изменению податливости оттяжного узла, что приводит к изменению значений изгибающих моментов в некоторых сечениях ствола мачты почти вдвое (рис. 7.4).

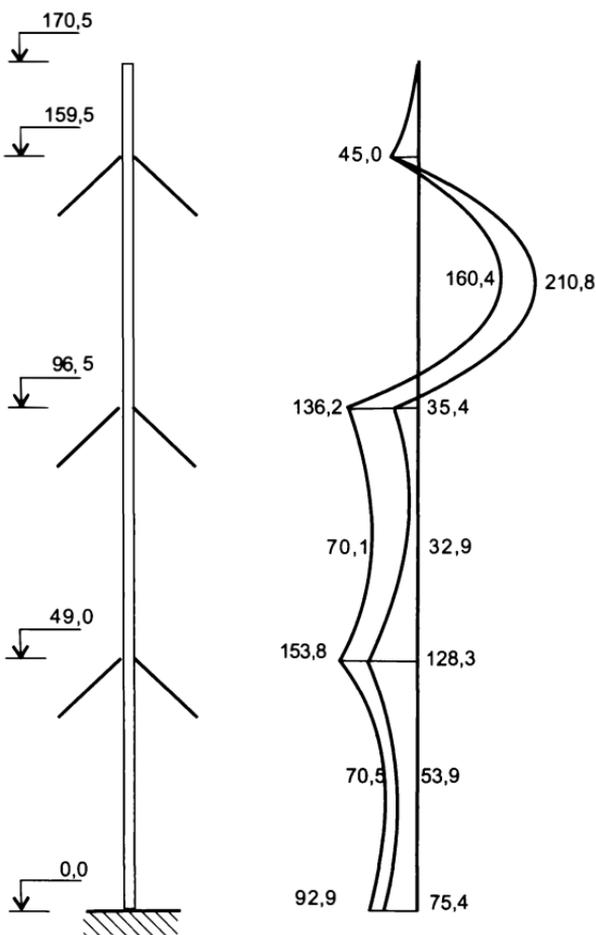


Рис. 7.4. Огибающая эпюр моментов в стволе мачты

Весьма большой неопределенностью обладают сейсмические расчеты сооружений [Бирбраер, 1998]. Здесь имеется значительный разброс исходных данных, определяемый следующими источниками погрешностей:

- само сейсмическое возмущение задается лишь приближенно;
- реальное основание может значительно отличаться от горизонтально-слоистой модели (трудно точно определить положение и толщину слоев, которые, к тому же, меняются в пределах площадки);
- используемая квазилинейная модель работы грунта и неопределенность его характеристик, некоторые из которых имеют и заметную сезонную изменчивость.

Имеются и другие неопределенности, приводящие к разбросу результатов расчета. Для их учета практически можно поступать таким образом: вводится искусственная вариация только одного параметра основания, скажем, модуля сдвига грунта  $G$ . Далее полагаем, что он может меняться от  $G^*(1 + G_v)$  до  $G^*/(1 - G_v)$ , где  $G^*$  — его наиболее вероятная оценка, а  $G_v$  — его коэффициент вариации, принимаемый равным не менее 0,5. Эти рекомендации сформулированы в нормах проектирования атомных станций США [Seisme Analysis ..., 1986].

В целом источниками возможных отклонений параметров конструкции и параметров окружающей среды, поставляющими внешние нагрузки и воздействия, являются:

- разброс свойств материалов и конструкций, реализующийся даже при абсолютно точном выполнении всех установленных технических требований;
- вероятные ошибки людей и нарушения технологии (по небрежности, невнимательности, непониманию и т.п.);
- неоднозначность трактовки одних и тех же факторов, которая требует оценки имеющихся альтернатив;
- плохо предсказуемый характер природных (например, климатических) процессов и неопределенность их проявления в конкретной точке расположения объекта.

Для некоторой части указанных факторов возможные отклонения от номинала учтены системой нормируемых коэффициентов надежности. Но это относится далеко не ко всем факторам неопределенности, что часто не желают признавать проектировщики, эксперты и строители. Здесь господствует вера в то, что узаконенная

нормами система коэффициентов надежности обеспечивает если не безопасность самого объекта, то безопасность исполнителя в тех случаях, когда произошли какие-нибудь отказы или аварийные явления.

Но и нормы не избавляют нас от проблемы принятия решений в условиях неполноты информации. В качестве примера можно сослаться на разброс характеристик грунтовых оснований, который еще усугубляется неопределенностью математической модели грунта. Вот типичная выписка из СП 50-102-2003 «Проектирование и устройство свайных фундаментов», дающая значение множителя  $K$  к коэффициенту постели для забивных свай в глинах и суглинках:

текучепластичные	$K = 650 \dots 2500 \text{ кН/м}^4$ ;
мягкопластичные	$K = 2500 \dots 5000 \text{ кН/м}^4$ ;
тугопластичные и полутвердые	$K = 5000 \dots 8000 \text{ кН/м}^4$ ;
твердые	$K = 8000 \dots 13000 \text{ кН/м}^4$ .

Остается только посочувствовать инженеру, который получил от изыскателей только наименование типа суглинка и должен выбрать для расчета значение  $K$ .

В качестве общей рекомендации можно ориентироваться на высказывание в работе [Блехман и др., 1983]:

*«Особо надо сказать о задачах, содержащих малодостоверные исходные данные или сильно размытые величины. Здесь повышение степени достоверности решения иногда удается получить путем произвольного варьирования указанных величин в пределах, свойственных данной задаче. Естественно, что заслуживают доверия только результаты, устойчивые относительно такого варьирования, которые заодно показывают степень их точности».*

Если же обнаруживается некоторая сильная неустойчивость по отношению к вариации определенного параметра, то нужно понять ее происхождение. Здесь вновь напрашивается цитата из [Блехман и др., 1983]:

*«Выбросы из главного хода какой-либо зависимости часто путают с ошибкой эксперимента. Типичный контрпример — известны многолетние среднестатистические данные по числу открыток, доставляемых почтой в последний день апреля, мая, июня, июля, августа и сентября. Можно ли по ним предсказать результат на 31 декабря?»*

## 7.2. Методы расчета чувствительности

Для оценки роли неопределенных или переменных параметров системы (проектных переменных) при их относительно небольших изменениях могут оказаться очень удобными значения коэффициентов чувствительности, т.е. частных производных от некоторого интересующего нас результата расчета по проектной переменной.

Будем исходить из уравнений в перемещениях (3.6) — (3.8), которые представим в форме

$$\mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1(\mathbf{b}) - \mathbf{QF}(\mathbf{b})\mathbf{d}, \quad (7.5)$$

где явно указана зависимость матрицы жесткости от проектных переменных  $\mathbf{b}$ . К их числу обычно относятся параметры жесткости (размеры поперечных сечений), хотя не исключаются и другие проектные переменные, влияние изменений которых исследуется.

Как видно из (7.5), часть  $\mathbf{p}_1$  вектора нагрузок  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1(\mathbf{b})$$

также может зависеть от проектных переменных — при параметрах, связанных с размерами поперечных сечений элементов, это могут быть, например, нагрузки от собственного веса. Что касается вектора дислокационных воздействий  $\mathbf{d}$ , то для упрощения будем считать, что его компоненты не зависят от проектных переменных, хотя не представляет труда учесть и такую возможность.

Если продифференцировать (7.5) по некоторому, например,  $k$ -му параметру, учитывая при этом, что перемещения  $\mathbf{u}$  являются неявными функциями от переменной проектирования, то получим

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_k} \mathbf{u} - \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{b})}{\partial b_k} \mathbf{d}. \quad (7.6)$$

Воспользовавшись теперь (3.7) и учтя геометрические уравнения в (3.4), перепишем (7.6) в виде

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k} - \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{b})}{\partial b_k} \Delta. \quad (7.7)$$

Из этого соотношения видно, что вектор частных производных  $\partial \mathbf{u} / \partial b_k$ , являющихся коэффициентами чувствительности перемещений по отношению к возможной вариации проектной переменной  $b_k$ , может быть найден путем решения системы уравнений с той же матрицей коэффициентов, что и при выполнении статического расчета.

Если при статическом расчете был выполнен прямой ход по Гауссу (или разложение Холецкого), и в результате получено и запомнено треугольное разложение матрицы жесткости по (5.82), то для определения  $\partial \mathbf{u} / \partial b_k$  достаточно выполнить только обратную подстановку с правыми частями (*псевдонагрузками*) уравнений (7.7). Естественно, что такой подход много экономичнее повторного решения системы уравнений (7.7), хотя и требует ресурсов для запоминания результатов треугольного разложения матрицы  $\mathbf{K}$ .

Чувствительность усилий определяется дифференцированием уравнений (3.9), откуда получаем

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} (\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d}) + \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} \Delta + \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_k}. \quad (7.8)$$

После определения вектора  $\partial \mathbf{u} / \partial b_k$  из (7.7) его подстановка в (7.8) приводит к решению задачи

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b_k} = (\mathbf{I} - \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} \Delta + \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k}. \quad (7.9)$$

Отметим одно, весьма полезное, в целях контроля вычислений, вспомогательное соотношение, получаемое из (7.9) домножением слева на матрицу  $\mathbf{Q}$ , что с учетом (3.7) дает

$$\mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k}. \quad (7.10)$$

На механическом уровне контрольное равенство (7.10) легко интерпретируется как выполнение условий равновесия между приращениями внешних сил и приращениями усилий в элементах системы.

Описанный выше подход, который привел к уравнениям (7.7) — (7.9), получил название *прямого метода дифференцирования*. Возможен, однако, и другой подход, называемый *методом сопряженных переменных* и связанный с введением вспомогательных неизвестных

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{F} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1})^T = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad (7.11)$$

где использована симметрия матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{F}$ .

Если умножить (7.11) слева на  $\mathbf{K}$ , то получим систему уравнений

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q} \mathbf{F}, \quad (7.12)$$

из которой определяются сопряженные переменные  $\boldsymbol{\theta}$  и, естественно, с теми же сокращениями вычислений, о которых было сказано выше. Затем реализуется подстановка (7.12) в (7.9), которая дает

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b_k} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} \Delta + \boldsymbol{\theta}^T \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} \Delta + \boldsymbol{\theta}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial b_k} - \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial b_k} \Delta \right]. \quad (7.13)$$

Заметим, что правые части уравнений (7.12) есть ни что иное, как узловые силы, вызванные единичными значениями внутренних деформаций элементов  $\Delta$ , что легко устанавливается из первого и третьего уравнений системы (3.4). Таким образом, сопряженные переменные — это перемещения узлов системы, вызванные единичными деформациями ее элементов (при этом можно не рассматривать деформации тех элементов, которые не связаны с варьируемой переменной проектирования).

В работе [Хог и др., 1988] приведено сопоставление описанных выше подходов, с точки зрения вычислительных затрат, и показано, что метод сопряженных переменных практически всегда имеет преимущества перед методом прямого дифференцирования, за исключением, быть может, тех редких случаев, когда оценивается чувствительность по отношению к очень малому числу переменных проектирования и только при одном варианте нагружения. Последнее замечание связано с тем, что правая часть системы (7.7) зависит от вида нагружения, а правая часть (7.12), хотя и является многостолбцовой, тем не менее, есть инвариант системы.

Определенные сложности представляют собой и вычисления, связанные с нахождением производных от матриц  $\partial \mathbf{K} / \partial b_k$  и/или  $\partial \mathbf{F} / \partial b_k$ , входящих в вычислительные формулы для определения коэффициентов чувствительности. Конечно, всегда можно использовать конечноразностную аппроксимацию типа [Хог и др., 1988]

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_k} \approx [ \mathbf{K}(\mathbf{b} + \tau \mathbf{e}_k) - \mathbf{K}(\mathbf{b}) ] / \tau, \quad (7.14)$$

где вектор  $\mathbf{e}_k$  имеет единицу на  $k$ -м месте и нули в остальных позициях, а  $\tau$  — малое число, определяющее величину возмущения  $b_k$

Однако, лучше исходить из формулы для вычисления компонент матрицы жесткости

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) = \mathbf{QF}(\mathbf{b})\mathbf{Q}^T. \quad (7.15)$$

В ферменных конструкциях, где компоненты вектора проектных переменных  $\mathbf{b}$  представляют собой площади поперечных сечений стержней, и в чисто изгибаемых системах, где этот вектор составлен из моментов инерции, матрица жесткости  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  является линейной функцией компонент вектора  $\mathbf{b}$  и может быть представлена в форме

$$\mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}_k^0 b_k, \quad (7.16)$$

где  $\mathbf{K}_k^0$  — матрица из постоянных коэффициентов, определяющая вклад  $k$ -го элемента. Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_k} = \mathbf{K}_k^0 \quad (7.17)$$

и запоминание матриц  $\mathbf{K}_k^0$  при составлении глобальной матрицы жесткости может существенно облегчить вычисление коэффициентов чувствительности.

Выше в роли варьируемых параметров системы выступали жесткостные характеристики ее элементов. Однако, это не единственно возможный вариант выбора проектных переменных. С наименьшим успехом в роли варьируемых параметров могут выступать и координаты узлов системы  $\mathbf{z}$ .

В статически определенном случае можно исходить из уравнений равновесия в форме

$$\mathbf{Q}(\mathbf{z}) \mathbf{s} = \mathbf{p}, \quad (7.18)$$

и, продифференцировав их по координате  $z_j$ , получить

$$\mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z_j} = - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{s} \quad (7.19)$$

в предположении, что вектор узловых нагрузок  $\mathbf{p}$  не зависит от координат  $\mathbf{z}$ .

Если статически определяемая система неизменяема, то  $\mathbf{Q}$  будет невырожденной матрицей, и решение уравнения (7.19) определяет необходимые коэффициенты чувствительности.

Для статически неопределимого случая можно исходить из уравнений

$$\mathbf{Q}(\mathbf{z})\mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{Q}(\mathbf{z})^T \mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{Q}(\mathbf{z})\mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{d}. \quad (7.20)$$

При том же условии, что узловая нагрузка не зависит от изменения координат системы, получим дифференцированием соотношений (7.20)

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_j} = - \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{F} + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z_j} \right) (\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d}) - \mathbf{Q} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial z_j} \mathbf{u}. \quad (7.21)$$

Дифференцированием соотношений (3.9) находим связь между коэффициентами чувствительности перемещений и коэффициентами чувствительности усилий

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z_j} (\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d}) + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_j} . \quad (7.22)$$

Найдя из (7.21) коэффициенты чувствительности перемещений, можно затем подставить их в уравнения (7.22) и решить поставленную задачу. В результате такой подстановки получим после элементарных преобразований

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z_j} = (\mathbf{I} - \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z_j} \Delta + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{u} \right) - \mathbf{F} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{F} \Delta . \quad (7.23)$$

Снова, домножая слева (7.23) на матрицу  $\mathbf{Q}$ , получим полезное контрольное равенство

$$\mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z_j} = - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z_j} \mathbf{F} \Delta . \quad (7.24)$$

Контрольное равенство (7.24) может быть легко получено и непосредственно, если продифференцировать первое из уравнений в (3.4) и учесть независимость вектора нагрузки  $\mathbf{p}$  от координат узлов системы.

### 7.3. Чувствительность собственных колебаний

В случае динамического расчета системы центральное место занимает определение собственных частот и форм свободных колебаний системы. Соответствующая система разрешающих уравнений имеет вид

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{b}) \mathbf{u} , \quad (7.25)$$

где  $\omega$  — частота, являющаяся, как и форма колебаний  $\mathbf{u}$ , неявной функцией от переменных проектирования, в то время как зависимость матрицы жесткости и матрицы масс от этих переменных в (7.25) указана явно.

Если взять теперь значение  $\lambda_k = \omega_k^2$  как собственное значение, которое обращает в нуль детерминант матрицы  $\mathbf{K}(\mathbf{b}) - \lambda_k \mathbf{M}(\mathbf{b})$ , и полагать, что  $\mathbf{u}_k$  — соответствующий этому собственному значению вектор  $k$ -й формы собственных колебаний, то, дифференцируя (7.25) по одной из компонент вектора проектных переменных  $\mathbf{b}$ , получим (для сокращения записи будем обозначать варьируемую компоненту вектора проектных переменных безындексным символом  $b$ )

$$\left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k - \frac{\partial \lambda_k}{\partial b} \mathbf{M} \mathbf{u}_k + (\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = 0. \quad (7.26)$$

Если учесть что для собственной формы

$$(\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \mathbf{u}_k = 0, \quad (7.27)$$

а матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  — симметричны, то после умножения (7.26) слева на  $\mathbf{u}_k^\top$  в полученном соотношении исчезнет последнее слагаемое в левой части.

Будем считать, что все собственные векторы нормированы по массе, так что для любой пары собственных векторов  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{u}_k$  справедливы условия ортогональности по жесткости и ортонормированности по массе

$$\mathbf{u}_k^\top \mathbf{K} \mathbf{u}_i = \delta_{ik} \lambda_k, \quad \mathbf{u}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{u}_i = \delta_{ik}, \quad (7.28)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера, равный 1 при  $i = k$  и нулю в противном случае.

С учетом (7.27) и (7.28), домноженное слева на  $\mathbf{u}_k^\top$  соотношение (7.26) приводит к выражению для вычисления коэффициента чувствительности собственных значений

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial b} = \mathbf{u}_k^\top \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k. \quad (7.29)$$

Здесь есть одна тонкость, которая заключается в том, что при выводе формулы (7.29) молчаливо предполагалась возможность дифференцирования собственных значений по параметру проектирования. Это предположение справедливо, если  $\lambda_k$  является простым (не кратным) собственным значением [Фох, Кароог, 1968]. В случае кратных собственных значений анализ чувствительности существенно усложняется. Действительно, предположим, что зависимость, скажем, двух собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от варьируемого параметра проектирования  $b$  имеет вид, показанный на рис. 7.5.

При значении  $b = b_0$  кривые  $\lambda_1(b)$  и  $\lambda_2(b)$  пересекаются, и мы имеем двукратное собственное значение  $\lambda_1(b_0) = \lambda_2(b_0)$ . Поскольку собственные значения занумеровываются в порядке возрастания их величин ( $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ), то при переходе через точку  $b = b_0$  эти кривые обмениваются индексами (меняются местами). Фактически, зависимости  $\lambda_1(b)$  и  $\lambda_2(b)$  с учетом упорядочивания собственных значений по возрастанию их величин имеют вид, изображенный на рис. 7.5 пунктиром. Ясно, что точка кратности  $b_0$  является особой точкой, в которой нарушаются условия аналитичности собственных

значений. Впрочем, односторонние производные (производные по направлению) все же существуют, что дает возможность выполнить анализ и для этого случая. Мы, однако, не будем останавливаться на этом тонком для анализа и интересном в теоретическом отношении вопросе, отослав заинтересованного читателя к работам [Нельсон, 1976], [Fox, Kapoor, 1968], [Rodgers, 1970].

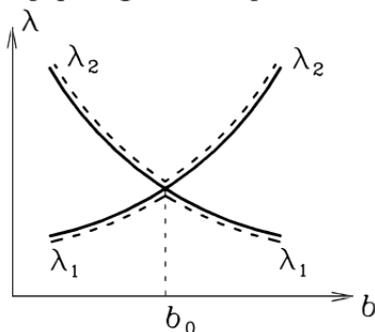


Рис. 7.5. Случай кратных собственных значений

Поскольку нас интересуют, главным образом, численные методы, то на практике при встрече с кратными собственными значениями можно рекомендовать простой прием, позволяющий избежать осложнений, возникающих в особых точках. Этот прием основан на отстройке системы от особой точки с численно малым параметром  $\varepsilon$  и решением проблемы о собственных значениях (7.25) дважды: при  $b = b_0 - \varepsilon$  и  $b = b_0 + \varepsilon$ .

Перейдем теперь к определению коэффициентов чувствительности для собственных векторов при некрратных собственных значениях. Непосредственно из (7.26) эти коэффициенты определить не удастся, поскольку матричный множитель  $(\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M})$ , стоящий слева перед искомым вектором  $\partial \mathbf{u}_k / \partial b$ , представляет из себя гарантированно вырожденную матрицу. В этой связи попытаемся разыскать интересующий нас вектор в виде разложения по системе собственных векторов исходной задачи. Иначе говоря, рассмотрим представление

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \quad (7.30)$$

с неизвестными пока коэффициентами  $\alpha_i$ .

Если (7.26) домножить слева на  $\mathbf{u}_j^T$ , то с учетом (7.30) получим

$$\mathbf{u}_j^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k - \frac{\partial \lambda_k}{\partial b} \mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_j^T (\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i = 0. \quad (7.31)$$

Воспользовавшись теперь (7.28), находим отсюда при  $j \neq k$

$$\alpha_j = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \mathbf{u}_j^\top \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k \quad (j=1, \dots, n; j \neq k). \quad (7.32)$$

Поскольку  $\lambda_k$  является простым собственным значением ( $\lambda_j \neq \lambda_k$  при  $j \neq k$ ), то формула (7.32) позволяет определить все коэффициенты разложения (7.30), кроме коэффициента  $\alpha_k$ . Для того, чтобы найти  $\alpha_k$ , воспользуемся первым из условий ортогональности (7.28), записанным для вектора  $\mathbf{u}_k$ , и продифференцируем его по параметру  $b$ . В результате получим

$$2\mathbf{u}_k^\top \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} + \mathbf{u}_k^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \mathbf{u}_k = \frac{\partial \lambda_k}{\partial b}. \quad (7.33)$$

После подстановки в (7.33) представлений (7.29) и (7.30) получим с учетом условий ортогональности (7.28)

$$\alpha_k = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_k^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \mathbf{u}_k. \quad (7.34)$$

Интересно отметить, что если матрица масс не зависит от варьируемого параметра проектирования  $b$  (достаточно типичная ситуация), то, как это следует из формулы (7.34), коэффициент  $\alpha_k$  равен нулю. На геометрическом уровне это означает, что при независимости матрицы масс от параметра  $b$  векторы  $\mathbf{u}_k$  и  $\partial \mathbf{u}_k / \partial b$  ортогональны как по метрике, порождаемой матрицей жесткости  $\mathbf{K}$ , так и по массе, то есть

$$\mathbf{u}_k^\top \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = 0, \quad \mathbf{u}_k^\top \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = 0. \quad (7.35)$$

Действительно, первое из соотношений в (7.35) непосредственно вытекает из (7.33) и (7.29), тогда как второе следует из первого, если учесть, что  $\mathbf{u}_k^\top \mathbf{M} = \mathbf{u}_k^\top \mathbf{K} / \lambda_k$ . В общем случае получаем окончательно

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^\top \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k - \frac{1}{2} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \mathbf{u}_k. \quad (7.36)$$

Формула (7.36) определяет коэффициенты чувствительности  $k$ -ой формы собственных колебаний через все формы немодифицированной системы. Это требует решения полной проблемы о собственных значениях, что является весьма трудоемкой операцией с вычислительной точки зрения.

Покажем, что можно получить выражения для коэффициентов чувствительности собственного вектора  $\mathbf{u}_k$ , не определяя

предварительно все остальные собственные числа и собственные векторы.

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{w}_k$ , равный искомому вектору  $\partial \mathbf{u}_k / \partial b$  за вычетом его составляющей  $\alpha_k \mathbf{u}_k$  в разложении (7.30). Иначе говоря, положим по определению

$$\mathbf{w}_k = \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} - \alpha_k \mathbf{u}_k, \quad (7.37)$$

при этом в силу (7.30) вектор  $\mathbf{w}_k$  представляет собой линейную комбинацию остальных собственных векторов исходной задачи, то есть

$$\mathbf{w}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \alpha_j \mathbf{u}_j. \quad (7.38)$$

Новый искомый вектор  $\mathbf{w}_k$  принадлежит линейному многообразию  $L$ , натянутому на совокупность из  $n-1$  векторов  $\{\mathbf{u}_i\}$ , где индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $n$  за исключением  $i = k$ . В силу (7.28) это линейное многообразие представляет собой гиперплоскость ортогональную вектору  $\mathbf{M}\mathbf{u}_k$ . Это означает, что для любого вектора  $\mathbf{v}$  из  $L$  справедливо

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K}\mathbf{u}_k = 0, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{M}\mathbf{u}_k = 0. \quad (7.39)$$

В гиперплоскости  $L$  выберем, пока произвольную, совокупность линейно независимых векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  и разложим искомый вектор  $\mathbf{w}_k$  по этим векторам, как по базису в  $L$ , то есть

$$\mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i, \quad (7.40)$$

где  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) — подлежащие определению скаляры.

Возвращаясь теперь к равенству (7.26), домножим его слева на вектор  $\mathbf{v}_j^T$

$$\mathbf{v}_j^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k - \frac{\partial \lambda_k}{\partial b} \mathbf{v}_j^T \mathbf{M}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_j^T (\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \left( \alpha_k \mathbf{u}_k + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i \right) = 0, \quad (7.41)$$

что с учетом условий ортогональности (7.39) приводит к системе из  $n-1$  уравнений относительно коэффициентов  $\beta_i$  в разложении (7.40)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_j^T (\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = - \mathbf{v}_j^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k \quad (j = 1, \dots, n-1). \quad (7.42)$$

Образуя из коэффициентов  $\beta_i$  вектор  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}]^T$ , придадим системе уравнений (7.42) матричную форму

$$\mathbf{V}^T(\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M})\mathbf{V}\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{V}^T\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b}\right)\mathbf{u}_k. \quad (7.43)$$

Здесь матрица  $\mathbf{V}$  размерами  $n \times (n-1)$  составлена из векторов  $\mathbf{v}_i$  так, что  $i$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{V}$  представляет собой вектор  $\mathbf{v}_i$ .

Опираясь на то обстоятельство, что собственному числу  $\lambda_k$  отвечает единственный (с точностью до множителя) собственный вектор  $\mathbf{u}_k$ , можно показать, что матрица  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^T(\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M})\mathbf{V}$  невырождена, и значит, решение системы уравнений (7.43) существует. После определения вектора  $\boldsymbol{\beta}$  легко найти и искомый вектор  $\partial \mathbf{u}_k / \partial b$ , так что после всех подстановок получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial b} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \mathbf{u}_k - \mathbf{V} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \right) \mathbf{u}_k. \quad (7.44)$$

Формула (7.44) дает окончательное решение задачи, и все, что нам осталось сделать — это указать способ построения какого либо базиса в гиперплоскости  $L$ . Обратим внимание на то, что интересующий нас базис в  $L$  не обязан быть ни ортогональным, ни единичным.

Рассмотрим простейший базис в полном пространстве размерности  $n$ , образуемый векторами  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , где каждый из векторов  $\mathbf{e}_i$  представлен всеми нулевыми компонентами, кроме  $i$ -ой компоненты, которую положим равной единице. Если пополнить эту систему векторов вектором единичной длины  $\mathbf{g} = \mathbf{M} \mathbf{u}_k / \|\mathbf{M} \mathbf{u}_k\|$ , то в образованной таким образом системе из  $n+1$  векторов можно выбрать такой вектор  $\mathbf{e}_j$ , который является линейной комбинацией остальных векторов, то есть

$$\mathbf{e}_j = g_1/g_j \mathbf{e}_1 + g_2/g_j \mathbf{e}_2 + \dots + g_{j-1}/g_j \mathbf{e}_{j-1} + g_{j+1}/g_j \mathbf{e}_{j+1} + \dots + g_n/g_j \mathbf{e}_n - 1/g_j \mathbf{g}, \quad (7.45)$$

где величины  $g_i$  представляют собой соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{g}$ , причем коэффициент  $g_j$  должен быть отличен от нуля. Понятно, что совокупность векторов  $\{\mathbf{g}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$  также является базисом в исходном  $n$ -мерном пространстве.

Для построения базиса в гиперплоскости  $L$ , ортогональной вектору  $\mathbf{g}$ , напрашивается использование известного процесса ортогонализации Грама-Шмидта, который следует применить к системе линейно независимых векторов  $\{\mathbf{g}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , начиная с вектора  $\mathbf{g}$ . Однако, в нашем случае можно поступить проще. Действительно, достаточно спроектировать векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  на гиперплоскость  $L$ , чтобы получить интересующий нас базис  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ . Итак, в качестве векторов  $\mathbf{v}$  можно принять

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - g_1 \mathbf{g}, \dots, \mathbf{v}_{j-1} = \mathbf{e}_{j-1} - g_{j-1} \mathbf{g}, \mathbf{v}_j = \mathbf{e}_{j+1} - g_{j+1} \mathbf{g}, \dots, \mathbf{v}_n = \mathbf{e}_n - g_n \mathbf{g}. \quad (7.46)$$

Индекс  $j$ , для которого выполняется разложение (7.45), можно выбрать из условия  $|g_j| = \max |g_i|$ , где максимум берется по абсолютным значениям всех компонент вектора  $\mathbf{g}$ .

Отметим, что иной способ отказа от необходимости решения полной проблемы собственных значений и собственных векторов для общего случая несимметричной матрицы был предложен в работе [Нельсон, 1976], где приведен метод вычислений, также как и здесь основанный на знании только исследуемого собственного вектора, но требующий решения вспомогательной системы из  $n + 1$  уравнений.

## 7.4. Оценка дополнительных усилий при изменении жесткостей

Изменение жесткостей элементов статически неопределимой системы влечет за собой изменение внутренних усилий, и для проектировщика важно уметь оценивать этот эффект количественно. Рассмотрим названную проблему на примере шарнирно-стержневых систем и получим для них необходимые расчетные формулы.

Будем исходить из общих выражений (7.9) для коэффициентов чувствительности внутренних сил, ограничившись при этом ситуацией, когда вектор внешних приведенных к узлам нагрузок не зависит от параметров проектирования, имеющих в рассматриваемом случае смысл площадей поперечных сечений стержней.

Полагая в (7.9)  $b_k = A_k$ , где  $A_k$  — площадь поперечного сечения  $k$ -го стержня, при сделанных выше предположениях получаем

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial A_k} = (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_k} \Delta. \quad (7.47)$$

Матрица внутренней жесткости  $\mathbf{F}$  для конструкции ферменного типа является диагональной матрицей с элементами

$$\mathbf{F} = [[\delta_{ij} f_j]], \quad f_j = E_j A_j / l_j, \quad (i, j = 1, \dots, m) \quad (7.48)$$

при этом  $E_j$  и  $l_j$  — соответственно модуль упругости и длина  $j$ -го стержня. Здесь и далее  $m$  — количество стержней фермы. Из (7.48) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_k} = [[\delta_{ik} f_k / A_k]], \quad (7.49)$$

иными словами эта матрица целиком состоит из нулей, за исключением элемента, находящегося на пересечении  $k$ -го столбца и  $k$ -ой строки, и этот элемент равен  $f_k/A_k$ . С учетом выражения (3.9)  $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \mathbf{u} + \mathbf{d})$  для вычисления усилий в стержнях фермы из (7.49) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_k} \Delta = \frac{S_k}{A_k} \mathbf{e}_k, \quad (7.50)$$

где  $\mathbf{e}_k$  — вектор, состоящий из нулей за исключением  $k$ -ой компоненты, равной единице.

В результате подстановки (7.50) в (7.47) получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial A_k} = \frac{S_k}{A_k} (\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{e}_k. \quad (7.51)$$

Сопоставляя (7.51) с (3.12), замечаем, что стоящая здесь в скобках матрица может быть представлена через матрицу псевдоподатливости  $\mathbf{H}$ , а именно

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial A_k} = \frac{S_k}{A_k} (\mathbf{I} - \mathbf{FH}) \mathbf{e}_k. \quad (7.52)$$

Обозначим далее через  $\mu_{ij}$  компоненты матрицы  $(\mathbf{I} - \mathbf{FH})$  и, определяя приращения усилий  $\Delta s_r$  как дифференциалы, что можно допустить при относительно небольших изменениях поперечных сечений  $\Delta A_k$ , запишем

$$\Delta s_r = \sum_{k=1}^m \mu_{rk} \frac{S_k}{A_k} \Delta A_k. \quad (7.53)$$

Если в шарнирно-стержневой системе площади всех стержней увеличить пропорционально одному коэффициенту, который нам удобно обозначить  $1+\beta$ , то все компоненты матрицы внутренней жесткости  $\mathbf{F}$  умножатся на этот же коэффициент, так что перемещения  $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$  и усилия  $\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}$  в модифицированной системе будут следующими:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} &= (1+\beta)^{-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{QF} \mathbf{d}, \\ \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} + (1+\beta)(\mathbf{I} - \mathbf{FQ}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{F} \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (7.54)$$

что вытекает непосредственно из формул (3.8) и (3.9).

Если ограничиться случаем только силовых воздействий, то дислокации  $\mathbf{d}$  следует положить равными нулю, и, как это следует из (7.54), усилия в стержнях системы не изменятся, то есть  $\Delta \mathbf{s} = 0$ . Рассматриваемый вариант модификации системы соответствует приращению площадей поперечных сечений всех стержней пропорционально одному параметру  $\beta$ , т.е.

$$\Delta A_k / A_k = \beta \quad (k = 1, \dots, m). \quad (7.55)$$

Таким образом, при анализе влияния произвольных изменений площадей поперечных сечений стержней  $\Delta A_k$  на приращения усилий  $\Delta s_r$  из отношения  $\Delta A_k / A_k$  можно вычесть произвольную константу  $\beta$ , при этом приращения усилий останутся прежними. Иначе говоря, формулу (7.53) можно записать в чуть более общем виде (с произвольной константой  $\beta$ )

$$\Delta s_r = \sum_{k=1}^m \mu_{rk} s_k \left( \frac{\Delta A_k}{A_k} - \beta \right). \quad (7.56)$$

Справедливость формулы (7.56) при  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  можно установить и формальными матричными преобразованиями. Действительно, эквивалентность формул (7.53) и (7.56) сводится к матричному равенству

$$(\mathbf{I} - \mathbf{FH})\mathbf{s} = \mathbf{0}. \quad (7.57)$$

Подставляя сюда (3.12) и (3.9) и полагая  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , убеждаемся в том, что (7.57) удовлетворяется.

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{h}(\beta)$  с компонентами  $h_k = s_k(\Delta A_k / A_k - \beta)$ . В матричной форме вектор приращений усилий  $\Delta \mathbf{s}$  представим теперь в виде

$$\Delta \mathbf{s} = (\mathbf{I} - \mathbf{FH})\mathbf{h}(\beta). \quad (7.58)$$

Если воспользоваться произволом в выборе коэффициента пропорциональности  $\beta$  для минимизации нормы вектора  $\mathbf{h}$

$$\|\mathbf{h}(\beta)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m s_k^2 \left( \frac{\Delta A_k}{A_k} - \beta \right)^2}, \quad (7.59)$$

то получим

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^m s_k^2 \frac{\Delta A_k}{A_k}}{\sum_{r=1}^m s_r^2}. \quad (7.60)$$

Оценивая максимальное по модулю изменение усилия, воспользуемся известным неравенством

$$\max_k |\Delta s_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m \Delta s_k^2} = \|\Delta \mathbf{s}\|. \quad (7.61)$$

Далее, из (7.58) следует, что

$$\|\Delta s\| \leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{FH})\| \|\mathbf{h}(\beta)\|. \quad (7.62)$$

Матрица  $\mathbf{FH}$  является идемпотентной, что проверяется непосредственной подстановкой формул (3.12) и (3.7) в определение основного признака идемпотентности  $(\mathbf{FH})^2 = \mathbf{FH}$ . Вместе с  $\mathbf{FH}$  идемпотентной является и матрица  $(\mathbf{I} - \mathbf{FH})$ . Известно, что норма любой ненулевой идемпотентной матрицы равна единице. Отсюда приходим к оценке

$$\max_k |\Delta s_k| \leq \|\mathbf{h}(\beta)\|, \quad (7.63)$$

справедливой при любом значении  $\beta$ , в том числе и при  $\beta$ , минимизирующем норму вектора  $\mathbf{h}$ . Подставляя теперь (7.59) и (7.60) в оценку (7.63), получаем окончательно

$$\max_k |\Delta s_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m s_k^2 \left( \frac{\Delta A_k}{A_k} - \frac{\sum_{p=1}^m s_p^2 \Delta A_p / A_p}{\sum_{r=1}^m s_r^2} \right)^2}. \quad (7.64)$$

Неравенство (7.64) дает достаточно простую оценку максимально возможного изменения усилий при изменении площадей фермы.

Необходимо отметить, что полученные оценки относятся к случаю одного варианта нагружения. Если же конструкция рассчитывается на несколько вариантов нагружения, и при этом проверки прочности выполняются применительно к невыгодному сочетанию этих нагрузок, то приведенные выше оценки могут не сработать.

Так, например, расчет конструкций нового безопасного конфайнмента Чернобыльской АЭС (рис. 7.6) выполнялся на 572 нагружения (постоянные нагрузки – 17, полезные – 6, ветер – 84, снег – 7, крановые нагрузки – 324, температура – 6 +11, сейсмика – 12, смерч – 196).

При этом оказалось, что изменение предварительно назначенных поперечных сечений у тех элементов, которые не прошли проверку на соблюдение нормативных требований по прочности и устойчивости, привело к необходимости выполнения нового расчета конструкций. Результат этого расчета неожиданно привел к тому, что элементы, ранее вполне благополучные, перешли в разряд неблагополучных. Понадобился новый перерасчет, новая проверка прочности и устойчивости и т.д. Всего было выполнено 17 итераций, при этом на каждой итерации возрастал расход стали и, соответственно, собственный вес (рис. 7.7).

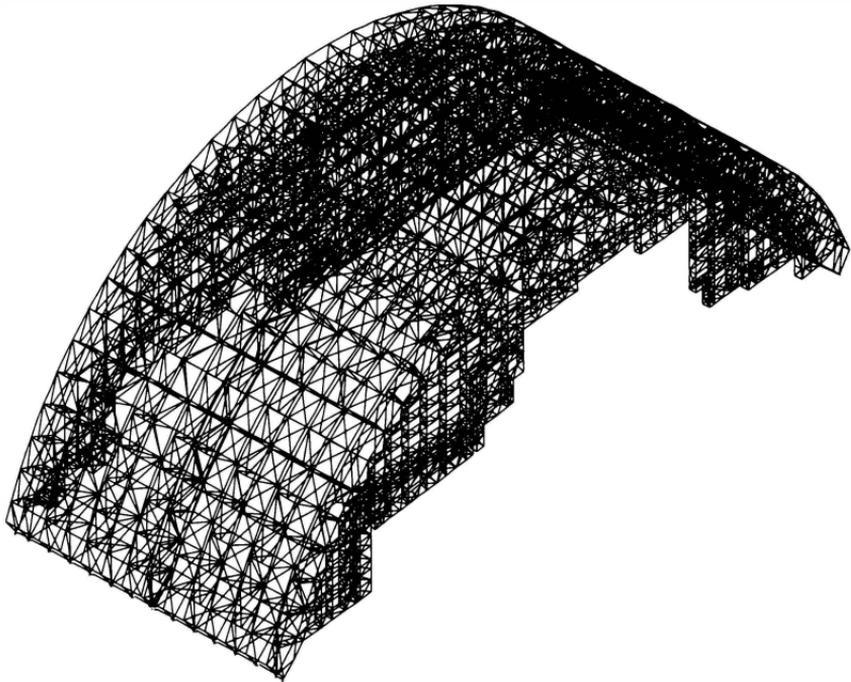


Рис. 7.6. Расчетная модель нового безопасного конфайнмента ЧФЭС

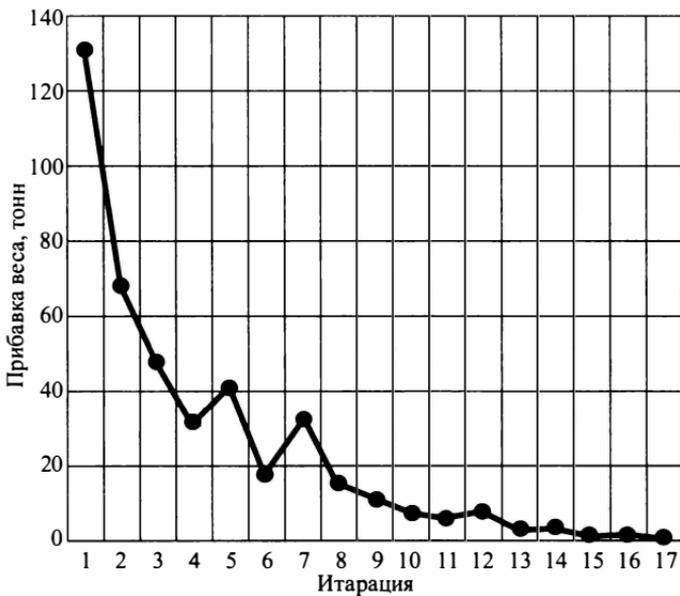


Рис. 7.7. Изменение веса конструкций при итерациях

## 7.5. Теоретические оценки для случая неопределенных жесткостей

Часто жесткостные параметры системы (все или некоторые) являются неопределенными величинами, для которых нет достаточных данных, чтобы оценить распределение вероятностей, но есть некоторая другая информация, характеризующая эту неопределенность. В [Huber, 1964] было установлено, что максимальному рассеиванию центрированной случайной величины  $\varepsilon$  соответствует определенная плотность распределения  $f(\varepsilon)$ , устанавливаемая в зависимости от имеющейся в наличии информации:

- когда о случайной величине известно, что ее дисперсия не превышает значения  $\upsilon$ , то рекомендуется использовать нормальное распределение с плотностью

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\upsilon}\right); \quad (7.65)$$

- если известно, что дисперсия  $\varepsilon$  имеет среднюю величину  $\sigma_0$ , то следует применять распределение Лапласа с плотностью

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|\varepsilon|}{\lambda}\right), \quad \text{где } \lambda = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad (7.66)$$

- в случае, когда величина  $\varepsilon$  заключена в интервале  $-b \leq \varepsilon \leq b$ , применяется распределение Хьюбера

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{b} \cos^2 \frac{\pi\varepsilon}{2b}. \quad (7.67)$$

Исходя из подхода, использованного в работе [Подольский, 1984], покажем как строится оценка решения задачи с неопределенными параметрами жесткости. Пусть для жесткостных характеристик системы известны средние значения  $\bar{\mathbf{F}}$  и такие ограничения на параметры, что неопределенную величину  $\tilde{\mathbf{F}}$  можно отнести к одному из указанных выше классов, которые характеризуются «экстремальными» плотностями вероятностей (7.65) — (7.67).

Если систему уравнений метода перемещений с неопределенными коэффициентами линеаризовать в окрестности их средних значений, то получим

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} + \mathbf{B}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{p}, \quad (7.68)$$

где матрица частных производных

$$\mathbf{V}(\mathbf{u}) = \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{F}} \right] \right], \quad (7.69)$$

равно как и усредненная матрица жесткостей  $\bar{\mathbf{K}}$ , вычисляется при  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}$ . Считая второе слагаемое в левой части (7.68) некоторым случайным мешающим параметром (шумом)  $\varepsilon_0$ , можно утверждать, что решение (7.68) дает только некоторые оценки  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  перемещений, зависящие от  $\varepsilon_0$ .

Стремясь получить оценку  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  несмещенной, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u})^T f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 = 0, \quad (7.70)$$

и учитывая, что из (7.68)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} (\mathbf{p} - \varepsilon_0), \quad (7.71)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p} + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \varepsilon_0)^T f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p})^T f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_0^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Второе слагаемое в (7.72) равно нулю в силу предположения о центрированности ошибки, обладающей нулевым средним значением. Тогда из (7.72) будет следовать, что несмещенная оценка

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{p} \quad (7.73)$$

не зависит от значений матрицы  $\mathbf{V}(\mathbf{u})$  и класса распределений величины  $\varepsilon_0$ .

Чтобы найти дисперсионную матрицу  $\mathbf{D}_u$  оценок  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  воспользуемся неравенством Рао-Крамера

$$(\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u})^T \mathbf{D}_u (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}) \geq (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u})^T \mathbf{R}^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}), \quad (7.74)$$

где  $\mathbf{R}$  — информационная матрица Фишера, которая в силу (7.71) и ввиду симметрии матрицы  $\bar{\mathbf{K}}$  определяется как

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{K}} \mathbf{E} \bar{\mathbf{K}}. \quad (7.75)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — диагональная матрица с компонентами

$$e_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(\varepsilon_i))^2}{f(\varepsilon_i)} d\varepsilon_i, \quad (7.76)$$

причем использование распределений (7.65) — (7.67) минимизирует  $\varepsilon_i$  и одновременно минимизирует левую часть (7.74).

Дисперсии  $\sigma_u^2$  оценок  $\tilde{\mathbf{u}}_0$ , составляющие диагональную матрицу  $\mathbf{D}_u$ , можно получить из выражения

$$\mathbf{D}_u = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0) f(\boldsymbol{\varepsilon}_0) (\bar{\mathbf{K}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0)^T d\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_0 f(\boldsymbol{\varepsilon}_0) \boldsymbol{\varepsilon}_0^T d\boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \bar{\mathbf{K}}^{-1}. \quad (7.77)$$

Подстановка (7.75) и (7.77) в (7.74) дает

$$(\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{D}_0 \bar{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}) \geq (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{E}^{-1} \bar{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}), \quad (7.78)$$

откуда следует

$$\sigma_u^2 \geq \frac{1}{e_{ii}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon_i)}{(f'(\varepsilon_i))^2} d\varepsilon_i. \quad (7.79)$$

Минимально возможные дисперсии, получаемые в случае знака равенства в (7.79), определяются для упомянутых выше «экстремальных» плотностей таким образом:

- для плотности (7.65) —  $\sigma_u^2 = \sigma_0^2$ ;
- для плотности (7.66) —  $\sigma_u^2 = \sigma_0^2$ ;
- для плотности (7.67) —  $\sigma_u^2 = b^2 / \pi^2$ .

Расчетные значения перемещений составляют вектор  $\mathbf{u}^*$ , компоненты которого определяются формулой

$$u_i^* = \tilde{u}_{0,i} + \gamma_p \sigma_u \text{sign}(\tilde{u}_{0,i}), \quad (7.80)$$

где  $\gamma_p$  — характеристика обеспеченности оценки (для вероятности  $P = 0,997$  следует принять  $\gamma_p = 3$ ).

Для усилий оценки их значений и дисперсии определяются формулами

$$\tilde{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{F} \bar{\mathbf{Q}}^T \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad (7.81)$$

$$\mathbf{D}_s = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{Q}^T \mathbf{D}_u \mathbf{Q} \bar{\mathbf{F}}^T, \quad (7.82)$$

а расчетные значения по аналогии с (7.80)

$$s_i^* = \tilde{s}_{0,i} + \gamma_p \sigma_s \text{sign}(\tilde{s}_{0,i}). \quad (7.83)$$

Из (7.77) видно, что дисперсионная матрица  $\mathbf{D}_u$  зависит от усредненной матрицы жесткости  $\bar{\mathbf{K}}$  и, следовательно, при одних и тех же данных о параметрах неопределенности исходных данных разброс результатов расчета будет зависеть от выбранного варианта расчетной модели. В литературе неоднократно обсуждалась идея

сопоставления неопределенностей, вносимых исходными данными, с неопределенностью результатов расчета по сопоставляемым моделям.

Естественно, что при обработке случайных исходных данных различными способами, которые присущи различным расчетным моделям, мы получаем различный уровень информационных потерь. Этот факт давно известен (см., например, [Подольский, 1984]) и активно обсуждается в книге с характерным названием «С какой точностью нужно выполнять расчеты?» [Усаковский, 2005].

Автор рассматривает отношение  $n = F_1/F$  результатов расчета по одной модели ( $F$ ) и по другой модели ( $F_1$ ) и отмечает, что величина  $n$  обладает определенной изменчивостью, если ее рассматривать на некотором ансамбле (возможно воображаемом) различных задач и это обстоятельство создает ситуацию неопределенности. Это приводит его к постулату — относительная погрешность расчетного метода (расчетной модели) для ансамбля конструкций является случайной величиной. Но ведь расчетная модель обычно выбирается не для решения серии однотипных задач (ансамбля конструкций), а для вполне конкретного объекта. Поэтому здесь может отсутствовать «случайность расчетной модели».

Вместе с тем следовало бы подчеркнуть следующую важную особенность сопоставления результатов расчета, оперирующих со случайными данными. Разные модели, преобразуя различным способом одни и те же случайные исходные данные, могут давать различный разброс результатов. Этот разброс определяет информационные потери, и целесообразно сопоставлять их величину с теми информационными приобретениями, которые дает та или иная расчетная модель.

В таком рассуждении нет места достаточно сомнительной «случайности расчетной модели». При работе с другой (например, менее изменчивой) исходной информацией модель вдруг становится лучше эталонной, а при другой информационной картине он ей уступает. Но это характеристика устойчивости получаемого решения по отношению к способу его получения, а не изменчивость расчетной модели.

Если же модели оперируют с различными исходными данными, то проблема их корректного сопоставления затрудняется. Действительно, привлечение новых данных может оказаться неоправданным, поскольку вносимые при этом уточнения оказываются несущественными. И это может случиться в строго детерминированном случае, так же как при решении стохастической задачи. Но следует иметь в виду, что несущественное по количественному результату уточнение, может в некоторых

обстоятельствах дать резкий качественный скачок. Достаточно вспомнить о проблеме влияния начальных неправильностей на устойчивость равновесия оболочек, чтобы воздержаться от вынесения суждений о возможности пренебречь малыми уточнениями. Здесь, выполняя расчеты вдали от критического состояния (и даже опираясь на соответствующие экспериментальные данные) можно легко дать ошибочные рекомендации о «вредности» уточнений.

Иными словами, оценка роли информационных потерь и приобретений скорее характеризует задачу, а не метода ее решения.

## **7.6. Использование методов планирования экспериментов**

Классическая постановка задачи строительной механики исходит из того, что все исходные данные (размеры конструкции, параметры жесткости, нагрузки и т.п.) являются точными. Из этого вытекает, что точными должны быть и результаты решения задачи, и обнаруживаемые ошибки могут проистекать лишь от некорректности расчетной модели или от неточности численного решения. В действительности же при любом моделировании реальной механической системы и при любых методах решения разрешающих уравнений отклонение результатов расчета от измеренных экспериментально достаточно заметно (иногда большим успехом можно считать совпадение данных только по порядку).

Идеализация расчетной модели и невозможность сделать ее абсолютно адекватной реальной конструкции создают ситуацию некоторой неопределенности, и именно в условиях такой неопределенности приходится принимать проектные решения. Неопределенность порождается как недоступностью всей необходимой информации (например, нам принципиально неизвестны все возможные в будущем режимы работы конструкции), так и ее неполнотой (вряд ли можно себе представить, например, что мы можем точно узнать физико-механические свойства сооружения и основания в любой точке). Недоступность и неполнота некоторых видов информации являются принципиальными моментами, они не могут быть до конца преодолены, и сколь бы подробно мы не изучали все доступные материалы, мы не можем никогда сказать, что в расчетной модели учтено все.

Таким образом, при проектировании, равно как и в техническом диагностировании существующих зданий и сооружений, мы имеем

дело с информацией, где зачастую преобладают неполные или противоречивые данные. Не последнюю роль здесь играют издержки слишком далеко зашедшего разделения труда между заказчиками, изыскателями, проектировщиками, строителями и эксплуатационным персоналом. Традиционно предполагается, что процессы изысканий и проектирования являются однозначными и всегда приводят к определенным результатам. В действительности здесь большую роль играют не формализуемые интуитивные соображения, основанные на анализе предыдущего опыта изучения и проектирования аналогичных объектов. Для сооружений обычного массового строительства такой опыт имеется и может быть правильно истолкован, однако в случаях уникальных объектов опыта нет по определению.

Кроме того, следует упомянуть приближенность почти всех задаваемых параметров модели, связанную с реально существующими допусками на размеры, изменчивостью физико-механических свойств и т.п.

По сути источниками возможных отклонений параметров конструкции и параметров окружающей среды, поставляющими внешние нагрузки и воздействия, являются:

- разброс свойств материалов и конструкций, реализующийся даже при абсолютно точном выполнении всех установленных технических требований;
- вероятные ошибки людей и нарушения технологии (по небрежности, невнимательности, непониманию и т.п.);
- неоднозначность трактовки одних и тех же факторов, которая требует оценки имеющихся альтернатив;
- плохо предсказуемый характер природных (например, климатических) процессов и неопределенность их проявления в конкретной точке расположения объекта.

Для некоторой части указанных факторов возможные отклонения от номинала учтены системой нормируемых коэффициентов надежности. Но это относится далеко не ко всем факторам неопределенности, что часто не желают признавать проектировщики, эксперты и строители. Здесь господствует вера в то, что узаконенная нормами система коэффициентов надежности обеспечивает если не безопасность самого объекта, то безопасность исполнителя в тех случаях, когда произошли какие-нибудь отказы или аварийные явления.

Но и нормы не избавляют нас от проблемы принятия решений в условиях неполноты информации. В качестве примера можно

сослаться на разброс характеристик грунтовых оснований, который еще усугубляется неопределенностью математической модели грунта. Вот типичная выписка из СП 50-102-2003 «Проектирование и устройство свайных фундаментов», дающая значение множителя  $K$  к коэффициенту постели для забивных свай в глинах и суглинках :

текучепластичные	$K = 650 \dots 2500 \text{ кН/м}^4$ ;
мягкопластичные	$K = 2500 \dots 5000 \text{ кН/м}^4$ ;
тугопластичные и полутвердые	$K = 5000 \dots 8000 \text{ кН/м}^4$ ;
твердые	$K = 8000 \dots 13000 \text{ кН/м}^4$ .

Остается только посочувствовать инженеру, который получил от изыскателей только наименование типа суглинка и должен выбрать для расчета значение  $K$ .

Как и в указанном случае в подавляющем большинстве других ситуаций неточность может быть оценена только указанием на интервал, которому может принадлежать истинное значение параметра.

При интервальном оценивании параметров, входящих в расчетную конечно-элементную модель системы и, следовательно, дающем интервал значений для коэффициентов матрицы жесткости и вектора правых частей, мы приходим к проблеме поиска интервального решения системы разрешающих уравнений. При этом для системы линейных уравнений  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  с коэффициентами и правыми частями, определенными как интервальные величины ( $\mathbf{A} \in \mathbf{I} R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{I} R^n$ ), нужно договориться о том, что есть решение, точнее — множество решений.

В соответствии с анализом, который дали З. Кулпа и К. Росланец [Kulpa, Roslaniec, 1999] можно различать:

- *объединенное множество* решений, которое определяется как

$$\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid (\exists \mathbf{A}^* \in \mathbf{A}) (\exists \mathbf{b}^* \in \mathbf{b}) \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \};$$

каждая точка этого множества соответствует определенной комбинации значений, которые могут принять интервальные переменные.

- *граничное множество* решений, которое определяется как

$$\Sigma(\partial \mathbf{A}, \partial \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid (\exists \mathbf{E}^* \in \partial \mathbf{A}) (\exists \mathbf{e}^* \in \partial \mathbf{b}) \mathbf{E}^* \mathbf{x} = \mathbf{e}^* \};$$

здесь через  $\partial \mathbf{A}$  и  $\partial \mathbf{b}$  обозначены матрицы и векторы, элементы которых принимают значения только на границах интервалов, но не внутри их. Комбинациям именно таких граничных значений интервальных переменных соответствуют точки этого множества;

- *параметрическое множество* решений, которое определяется как

$$\Sigma(\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{b}(\mathbf{p})) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{p}^* \in \mathbf{p}) \mathbf{A}(\mathbf{p}^*) \mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{p}^*) \};$$

здесь введен вектор параметров  $\mathbf{p}$ , каждый из которых, пробегая интервал  $[0,1]$ , реализует изменение зависящих от него интервальных переменных от нижней до верхней границы, а точки множества соответствуют возможным значениям компонент параметрического вектора.

Для интервальных уравнений с матрицей и вектором

$$\left[ \begin{array}{cc} [0,1] & [1,2] \\ -2 & [-1,2] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} [0,2] \\ 0 \end{array} \right]$$

все три множества показаны на рис. 7.8.

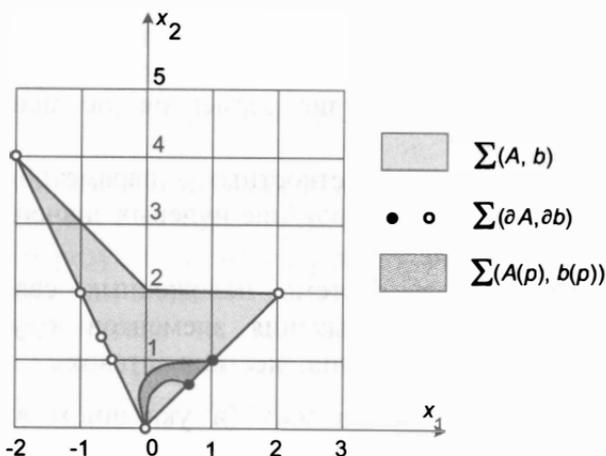


Рис. 7.8. Множества решений системы интервальных уравнений

При этом параметризация матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{p})$  и вектора правых частей  $\mathbf{b}(\mathbf{p})$  выполнена с помощью  $p_1, p_2 \in [0,1]$  следующим образом

$$\left[ \begin{array}{cc} p_1 & 1+p_1 \\ -2 & 3p_1-1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 2p_2 \\ 0 \end{array} \right]$$

Известны классические подходы к неопределенности, которые сводятся к следующим вариантам принятия решений:

- использование теории вероятностей, когда в основе принимаемого решения находится объективный предыдущий опыт;
- использование экспертных оценок, т.е. принятие решений на основе субъективного опыта эксперта (коллектива экспертов);

- минимаксная оценка, когда принимается наилучшее решение из числа достижимых, в предположении возможного наихудшего варианта развития событий, т.е. решение принимается по возможному результату.

Интервальный подход по сути ориентирован на использование последнего варианта, именно он использован в системе **SCAD** для чего введен специальный режим «Вариация моделей», который допускает обработку результатов расчета нескольких близких вариантов расчетной схемы.

Близость вариантов трактуется в том смысле, что они являются топологически подобными, содержат одинаковое количество узлов и элементов и допускают только вполне определенные различия между сопоставляемыми расчетными моделями:

- возможно использование отличающихся друг от друга значений типа элементов, включая применение элементов «пустого» типа, которые имитируют отсутствие элементов, не меняя их общее количество;
- возможно изменение жесткостных параметров конечных элементов, включая и использование нулевых значений некоторых жесткостей;
- возможны различия в системе наложенных связей и/или в задаваемых условиях примыкания элементов к узлам (врезка шарниров, установка бесконечно жестких вставок).

Иллюстративный пример близких (в указанном выше смысле) расчетных моделей приведен на рис. 7.9, где номерами отмечены различия между схемой *a*) и схемой *b*).

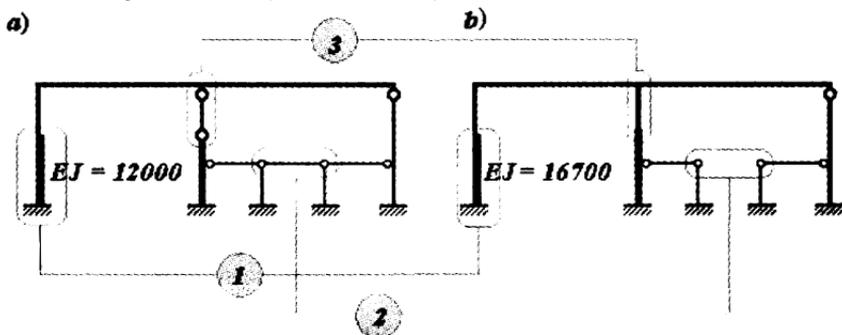


Рис. 7.9. Близкие расчетные схемы

Так, номером 1 помечено отличие в значениях изгибной жесткости нижней части левой колонны, номером 2 – отсутствие участка

рабочей площадки правого пролета и, наконец, номером 3 – изменение конечных условий для верхнего участка средней колонны.

В качестве исходных данных рассматриваемого режима фигурирует только список файлов, в которых имеются результаты решения отдельных задач (рис.7.10).

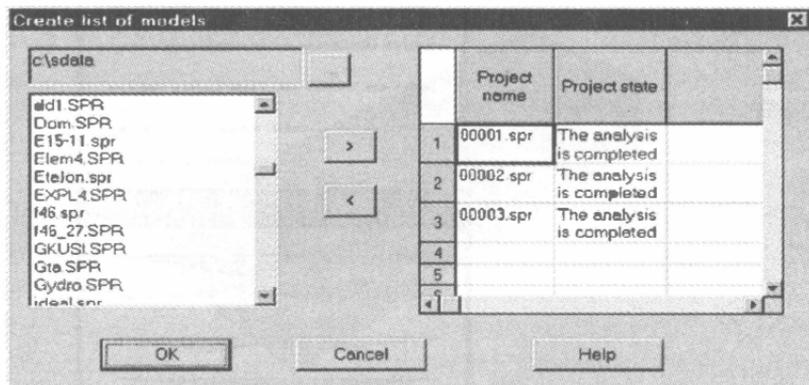


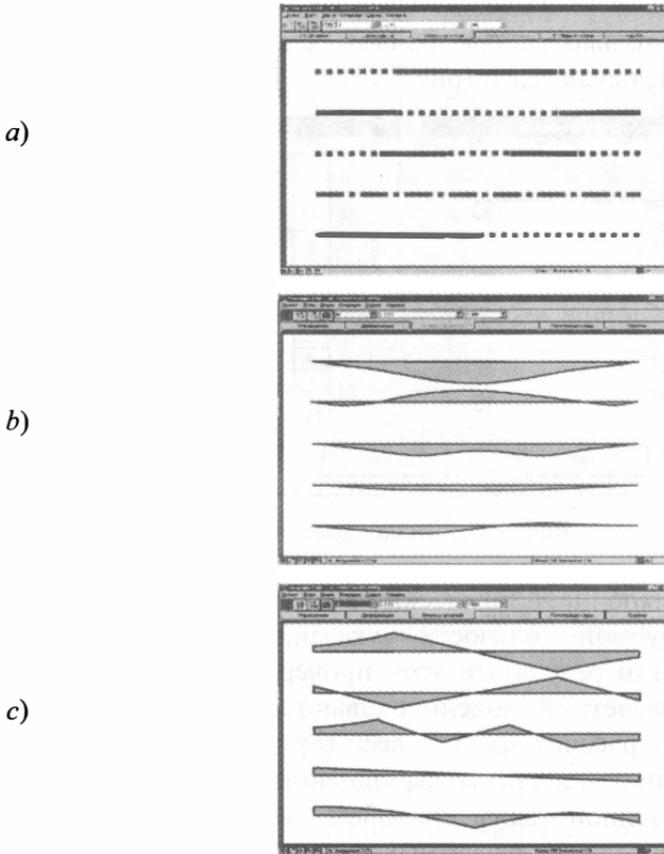
Рис. 7.10. Диалоговое окно режима

Система выполняет логический анализ, для того, чтобы убедиться в регламентируемой близости указанной серии задач и при положительном результате этой проверки результаты расчетов всех вариантов расчетной модели сливаются в один массив, как будто одна схема рассчитана на все варианты нагружения, которые фигурировали во всех ранее выполненных расчетах.

Для полученной таким способом суперзадачи можно выполнять режимы определения расчетных сочетаний усилий (PCY), создавать расчетные комбинации нагружений (PCN), подбирать армирование железобетонных конструкций, проверять или подбирать сечения стальных конструкций. При этом необходимо указать на логическую связь между вариантами нагружения, рассмотренными в рамках каждой подзадачи. Например, нагружения от собственного веса, фигурировавшие во всех подзадачах, чаще всего необходимо пометить как взаимоисключающие, чтобы избежать их суммирования.

В качестве наглядного примера можно указать на расчет балки на упругом основании (рис. 7.11,*a*), средний коэффициент постели которого равен  $350 \text{ т/м}^2$  и может меняться от  $300 \text{ т/м}^2$  до  $400 \text{ т/м}^2$ . Результаты выполненных расчетов представлены на рис.7.11,*b* и 7.11,*c*. Заметим, что режим вариации моделей может использоваться и в тех ситуациях, когда различные расчетные схемы соответствуют различным этапам жизненного цикла здания или сооружения, а также

тогда, когда такие схемы следует использовать для оценки поведения конструкции в различных режимах нагружения.



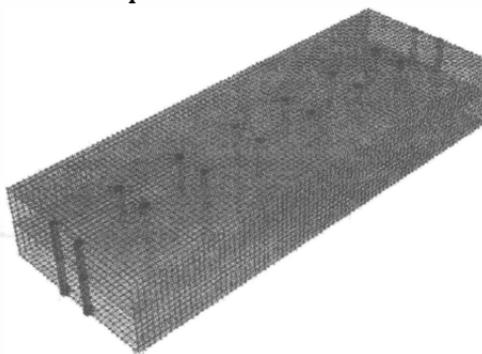
**Рис. 7.11.** Влияние изменения жесткости упругого основания:  
*a* - распределение жесткостных характеристик (пунктир —  $C = 300 \text{ т/м}^2$ , сплошная линия —  $400 \text{ т/м}^2$ , штрих-пунктир —  $350 \text{ т/м}^2$ ); *b* - эпюры изгибающих моментов; *c* - эпюры поперечных сил (порядок расположения эпюр соответствует порядку вариантов по схеме *a*).

Например, при определении упругих характеристик модели грунтового основания следует различать параметры, связанные с модулем деформаций, которому соответствуют длительные процессы (например, нагрузка от собственного веса), и модулем упругости, которым соответствуют кратковременные загрузки (например, передаваемые на основание нагрузки от ветровых пульсаций).

Еще одним характерным примером может случить расчетная оценка влияния карстового провала под фундаментной плитой причём место его появления случайно. Поэтому приходится рассматривать различные варианты расположения карста: по углам,

по сторонам, в центре, под колоннами, под пересечениями диафрагм, как рекомендует СП 50-101-2004. Использование режима вариации моделей позволяет решить эту задачу и запроектировать арматуру плиты с учетом указанной неопределенности.

Приведем результаты такого расчета для сооружения, которое схематически показано на рис. 7.12.



**Рис. 7.12.** Схема к примеру расчета на воздействие карста

На рис. 7.13 сопоставляются изополя теоретически необходимого армирования фундаментной плиты в случае отсутствия карста (исходная задача) и при учете возможности появления карстовой воронки диаметром 3 м (в режиме вариации моделей проанализировано пять вариантов ее расположения). В силу практической симметрии задачи показывается только четверть фундаментной плиты.

Из рис. 7.13 видно, что характер армирования не изменился, но расход стали увеличился примерно на 8-10 %.

Поиск множества решений является достаточно трудоемкой операцией и, как правило, основывается на методе перерасчета системы с различными значениями интервально заданного параметра. Учитывая огромное быстродействие и удобный интерфейс современных программ для расчета конструкций, такого рода оценки нетрудно получить, хотя при варьировании не одного, а нескольких параметров объем перебора вариантов угрожающе возрастает.

В связи с последним обстоятельством полезно обратиться к методам планирования экспериментов, в частности, к факторному планированию, с которого началась вся теория планирования эксперимента [Ермаков (ред.), 1983]. В процессе исследования строится приближенная зависимость некоторого интересующего исследователя результата от изменения определяющих параметров.

При этом предполагается, что для каждого параметра  $x_i$  определен интервал варьирования с верхним  $b_i$  и нижнем  $a_i$  уровнями

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7.84)$$

и для любого из значений  $x_i$  из этого множества может быть получено значение интересующего результата  $Y(x_1, \dots, x_n)$ .

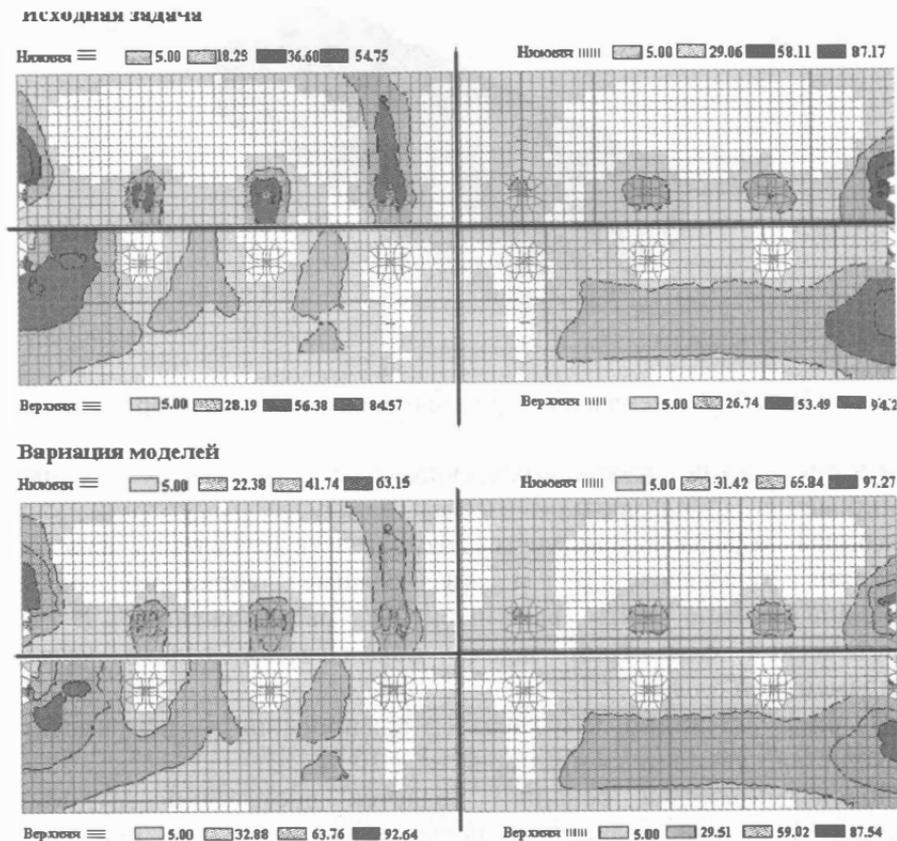


Рис. 7.13. Изополя теоретически необходимой арматуры

В отличие от классических методов планирования, когда варьируется только одна переменная, а остальные поддерживаются на определенном заданном уровне, факторный эксперимент предполагает одновременное изменение всех параметров. Это позволяет исследовать сложные системы, у которых последовательно разграничить влияние отдельных параметров весьма затруднительно или попросту невозможно. Кроме того, правильно организованный многофакторный эксперимент дает выигрыш в точности по сравнению с классическими планами.

Выигрыш достигается за счет того, что в  $n$ -мерном пространстве параметров  $x_i$  точки, где производится эксперимент, располагаются на максимально возможном расстоянии друг от друга [Налимов, 1971] (стр. 144), и это достигается за счет свойств многомерного пространства без увеличения интервала варьирования (7.84) по каждой отдельной переменной. Действительно, при варьировании по каждой отдельной переменной указанные расстояния определяются как  $(b_i - a_i)$ , т.е. длинами ребер  $n$ -мерного параллелепипеда, а в многомерном факторном эксперименте точки располагаются в вершинах этого параллелепипеда, и расстояния между ними определяются длинами его диагоналей.

Вычисления организуются на основе так называемой матрицы планирования с элементами, равными  $+1$  или  $-1$ , в зависимости от того, на каком уровне находится рассматриваемый параметр. Такие матрицы хорошо изучены и приводятся в специальной литературе. В *полном факторном эксперименте* реализуются все возможные комбинации уровней всех переменных параметров, что для двухуровневой схемы (рассматриваются только верхние и нижние уровни) приводит к необходимости выполнения  $2^n$  расчетов.

Даже не для очень больших значений  $n$  это число может оказаться слишком большим. В связи с этим чаще используются дробные факторные планы типа  $2^{n-1}$ . Эти планы строятся следующим образом. Для  $(n - 1)$  основных параметров выбирается полный факторный план, предполагающий исследование всех вариантов значений, а для каждого из оставшихся параметров в матрице планирования задаются значения, равные произведению любого (но не меньшего двух) числа признаков  $+1$  или  $-1$ , которые назначены для основных факторов. Это свидетельствует о том, что соответствующие взаимодействия (парные, тройные и т.д.), учтенные в произведении основных факторов, мы полагаем существенными. Предполагается, что выделение основных параметров и выявление их тесно связанных комбинаций должно быть установлено на основании некоторых качественных соображений априорного типа. После этого матрица планирования составляется совершенно формально и, например, дробный факторный план  $2^{5-2}$  может быть построен так, как указано в табл. 7.3.

Результаты расчетов позволяют получить аппроксимирующие выражения для описания зависимости характеристик напряженно-деформированного состояния системы от значений менявшихся параметров. Конечно, сами разрешающие уравнения уже дают такое описание, но речь идет о явной аппроксимации.

Таблица 7.3.

Расчет	Основные факторы			( $x_4$ )	( $x_5$ )
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_2x_3$
1	+1	+1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1	-1
4	-1	-1	+1	+1	+1
5	+1	+1	-1	+1	-1
6	-1	+1	-1	-1	+1
7	+1	-1	-1	-1	+1
8	-1	-1	-1	+1	-1

Для ее построения чаще всего используют приемы интерполяции, основанные на равномерном (чебышевском) или среднеквадратичном приближении аппроксимируемой функции в точках заданной области пространства проектных переменных. Далее для определенности мы будем предполагать, что варьируемые параметры являются жесткостными характеристиками системы.

Пусть имеется последовательность  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$  точек из области поиска, в которых выполнен расчет конструкции и определены значения аппроксимируемых характеристик  $P_e(\mathbf{X}^{(k)})$ , к числу которых могут относиться усилия, перемещения, их расчетные комбинации и т.п. Будем искать аппроксимирующие выражения в форме

$$P = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(\mathbf{X}), \quad (7.85)$$

где  $\varphi_i(\mathbf{X})$  — заданные координатные функции, а  $a_i$  — неизвестные коэффициенты. При среднеквадратичной аппроксимации ищутся такие значения  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), которые доставляют минимум среднеквадратичной ошибке

$$E = \sum_{k=1}^n \left\{ P_e(\mathbf{X}^{(k)}) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(\mathbf{X}^{(k)}) \right\}^2. \quad (7.86)$$

Необходимые условия минимума  $\partial E / \partial a_j = 0$  приводят к системе уравнений относительно искомых коэффициентов  $a_i$ , имеющей вид

$$\sum_{k=1}^n \left\{ P_e(\mathbf{X}^{(k)}) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(\mathbf{X}^{(k)}) \right\} \varphi_j(\mathbf{X}^{(k)}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (7.87)$$

Качество аппроксимации во многом зависит от удачного выбора координатных функций  $\varphi_i(\mathbf{X})$ . Исследования вида явных зависимостей для основных параметров напряженно-деформированного состояния позволило рекомендовать дробно-рациональные выражения вида

$$P_j = [Q^p(a_i, \mathbf{X})] / [Q^q(a_i, \mathbf{X})] \quad (7.88)$$

для тех случаев, когда в роли переменных проектирования выступают жесткостные параметры [Гребенюк, Янков, 1989]. В (7.88) через  $Q^p$  обозначен алгебраический полином степени  $p$ .

Чаще всего используются дробно-рациональные выражения (аппроксимация Паде [Бейкер, Грейв-Моррис, 1986]) вида  $Q^0/Q^1$ ,  $Q^1/Q^1$  или  $Q^1/Q^2$ , для которых число неизвестных коэффициентов  $a_i$  относительно невелико. При этом в некоторых случаях целесообразно перейти к обратным переменным  $z_i = 1/x_i$ , что повышает точность аппроксимации. Отыскание коэффициентов  $a_i$  можно строить на основе решения задачи минимизации квадратичной функции ошибок

$$E_1 = \sum_{k=1}^N \left\{ P_e(Z^{(k)}) - \left[ \frac{Q^p(a_i, Z^{(k)})}{Q^q(a_i, Z^{(k)})} \right] \right\}^2. \quad (7.89)$$

На рис. 7.14 представлен один из примеров, для которого проверялись различные варианты аппроксимации. В качестве варьируемого параметра (в прямой форме) принят момент инерции стойки, для изменения которого установлены достаточно широкие границы. Результаты расчетов приведены в табл. 7.4.

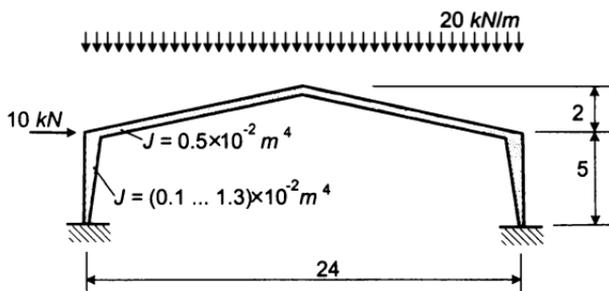


Рис. 7.14. Пример для аппроксимации усилий и перемещений

Полезно заметить, что аппроксимация типа (7.88) может использоваться не только для компонент вектора перемещений или вектора усилий, но и для других параметров. Так, в работе [Калинина, Перельмутер, 1985] использовалась линейная аппроксимация для представления расчетных комбинаций (оггибающих) внутренних усилий в системе, подверженной многим нагружениям.

Другой пример приведен в работе [Черная, 1973], где для конструкции в виде перекрестной системы из гибких нитей и балок получены аппроксимирующие выражения для значений

максимального перемещения, максимального изгибающего момента в балочных элементах и максимального натяжения в гибких нитях.

Таблица 7.4.

Вид используемых функций	Переменные	Ошибка аппроксимации, %	
		Усилия	Перемещения
Линейная	$J_{col}$	9,9 — 68,3	36,4 — 101,0
Линейная	$1/J_{col}$	4,3 — 52,1	17,0 — 62,0
Квадратичная	$J_{col}$	5,9 — 19,6	24,8 — 103,0
Квадратичная	$1/J_{col}$	1,7 — 11,3	1,7 — 8,2
Дробно-рациональная $Q^1/Q^1$	$J_{col}$	0,03 — 3,27	3,8 — 57,4
Дробно-рациональная $Q^1/Q^1$	$1/J_{col}$	0,02 — 0,44	0,3 — 10,1
Аппроксимация Паде $Q^1/Q^1$	$J_{col}$	3,4 — 7,50	48,2 — 62,5
Аппроксимация Паде $Q^0/Q^1$	$J_{col}$	27,7 — 36,1	2,8 — 8,4

Обозначение:  $J_{col}$  — момент инерции сечения стойки рамы.

## 7.7. Предельное равновесие при неопределённом нагружении

Задача определения предельной нагрузки для идеальной упруго-пластической системы, как известно (см., например, [Чирас, 1982], [Проценко, 1982]) сводится к решению задачи линейного программирования. В статической формулировке такая задача записывается в форме

$$\max_{x_0, x_i} \left\{ x_0 \left| S_i^+ \geq n_i^p x_0 + \sum_{j=1}^m n_{ij} x_j \geq S_i^-, i = 1, \dots, k \right. \right\}, \quad (7.90)$$

где через  $x_0$  обозначен параметр интенсивности нагружения;  $S_i^+$ ,  $S_i^-$  — соответственно верхнее и нижнее значения предельного усилия в  $i$ -м сечении;  $n_i^p$  и  $n_{ij}$  — усилия в  $i$ -м сечении основной системы метода сил от действия нагрузок и от единичного воздействия  $j$ -го неизвестного:  $m$  — степень статической неопределимости;  $k$  — количество опасных сечений.

В тех случаях, когда соотношения между внешними силами не могут быть заданы точно, т.е. имеет место некоторая

неопределенность нагружения, могут быть известны интервалы  $n_i^{\min} \leq n_i^p \leq n_i^{\max}$  ( $i=1, \dots, k$ ). Эта информация может быть легко получена или оценена априори на основании простейших физических соображений о природе нагрузок и условиях работы конструкции. Тогда становится логичной постановка задачи в виде минимакса

$$\min_{n_i^p} \max_{x_0, x_j} \left\{ x_0 \left| S_i^+ \geq n_i^p x_0 + \sum_{j=1}^m n_{ij} x_j \geq S_i^-; n_i^{\min} \leq n_i^p \leq n_i^{\max}; i=1, \dots, k \right. \right\}, \quad (7.91)$$

что соответствует рассмотрению некоторой «игры против природы» [Воробьев, 1967]. Иными словами, отыскивается максимально возможное значение предельной нагрузки при наименее благоприятных предположениях о реализуемых соотношениях между приложенными к системе внешними силами.

Было показано [Перельмутер, 1972], что можно построить эквивалентную игре (7.91) задачу линейного программирования, заключающуюся в максимизации параметра  $x_0$  при следующих ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} S_i^+ &\geq n_i^{\max} \alpha_i^+ - n_i^{\min} \alpha_i^- + \sum_{j=1}^m n_{ij} x_j \geq S_i^-; \\ x_0 - \alpha_i^+ + \alpha_i^- &= 0; \\ \alpha_i^+ &\geq 0; \alpha_i^- &\geq 0; \end{aligned} \right\} i=1, \dots, k. \quad (7.92)$$

Это значит, что решение задачи реализуется на граничных значениях нагрузок, действующих на систему.

В качестве примера рассмотрим двухпролетную балку, схема которой представлена на рис. 7.15,а.

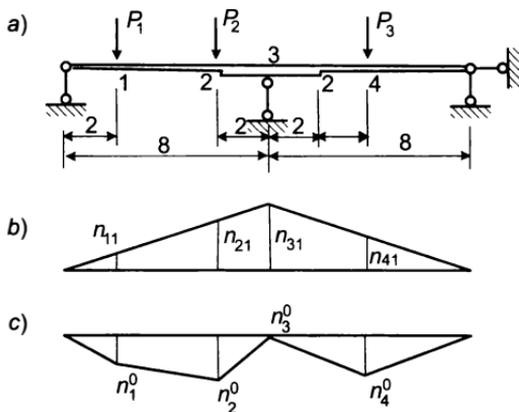


Рис. 7.15. Схема к примеру расчета

Балка нагружена тремя сосредоточенными силами, которые с точностью до множителя интенсивности нагружения  $x_0$  меняются в диапазонах  $0,75x_0 \leq x_0P_1 \leq 1,25x_0$ ;  $2,00x_0 \leq x_0P_2 \leq 4,00x_0$  и  $2,50x_0 \leq x_0P_3 \leq 3,50x_0$ . Предельные усилия в четырех проверяемых сечениях равны

$$S_1^+ = S_2^+ = S_4^+ = -S_1^- = -S_2^- = -S_4^- = 0,8; \quad S_3^+ = -S_3^- = 1,0.$$

Используя эпюры моментов в основной системе, полученной врезанием шарнира на промежуточной опоре, с величинами  $n_{11} = 0,25$ ;  $n_{21} = 0,75$ ;  $n_{31} = 1,0$  и  $n_{41} = 0,5$ , можно получить значения интервалов

$$2.125 \leq n_1^p \leq 3.875; \quad 3.375 \leq n_2^p \leq 6.625; \quad n_3^p = 0; \quad 5.000 \leq n_4^p \leq 7.000,$$

где обозначено

$$n_1^p = 1.5P_1 + 0.5P_2; \quad n_2^p = 0.5P_1 + 1.5P_2; \quad n_3^p = 0; \quad n_4^p = 2.0P_3.$$

Условия задачи линейного программирования (7.92) записываются в виде

$$0,8 \geq 3,875\alpha_1^+ - 2,125\alpha_1^- - 0,250x_1 \geq -0,8;$$

$$0,8 \geq 6,625\alpha_2^+ - 3,375\alpha_2^- - 0,750x_1 \geq -0,8;$$

$$1,0 \geq -1,000x_1 \geq -1,0;$$

$$0,8 \geq 7,000\alpha_4^+ - 5,000\alpha_4^- - 0,500 \geq -0,8;$$

$$x_0 + \alpha_1^- - \alpha_1^+ = 0; \quad x_0 + \alpha_2^- - \alpha_2^+ = 0; \quad x_0 + \alpha_4^- - \alpha_4^+ = 0;$$

$$\alpha_1^+ \geq 0; \quad \alpha_2^+ \geq 0; \quad \alpha_4^+ \geq 0; \quad \alpha_1^- \geq 0; \quad \alpha_2^- \geq 0; \quad \alpha_4^- \geq 0,$$

а ее решение дает  $x_0 = 0,1857$ . Интересно отметить, что если принять соотношения нагрузок в виде  $P_1:P_2:P_3 = 1:3:3$ , что соответствует серединам интервалов неопределенности, то решение задачи (7.92) дает  $x_0 = 0,2195$ . Разница  $\Delta x_0 = 0,031$  есть «плата за неопределенность» [Воробьев, 1967], которая тем меньше, чем более тесными являются оценки диапазонов изменения нагрузок.

Сам факт существования «платы за неопределенность» является принципиальным. Он свидетельствует о том, что дополнительная информация имеет ценность, и затраты на ее получение следует измерять с этой ценностью. Вообще же, сопоставление ценности дополнительных возможностей, включая и информационные, с возможной ценностью результата давно подмечено на неформальном уровне, и такие выражения, как «игра не стоит свеч» (дальнейший поиск невыгоден) или «чем богаты, тем и рады» (выбираем из того, что уже есть), служат тому подтверждением.

## 8. АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ

*«... a computer program does not make a good engineer, only a good engineer should use a computer program!»*

**Dr. Leroy Z. Emkin.** Computer Aided Engineering: Dangers / Ethics / Quality and a return to engineering common sense.— 1997.— January 15.

### 8.1. Шарнирно-стержневые системы

Шарнирно-стержневая система (ферма) является одной из наиболее часто используемых расчетных моделей. При этом действительная конструкция узловых сопряжений практически никогда не является истинным шарниром (рис. 8.1), более того, их оси могут не пересекаться в одной точке (рис. 8.1,*b*).

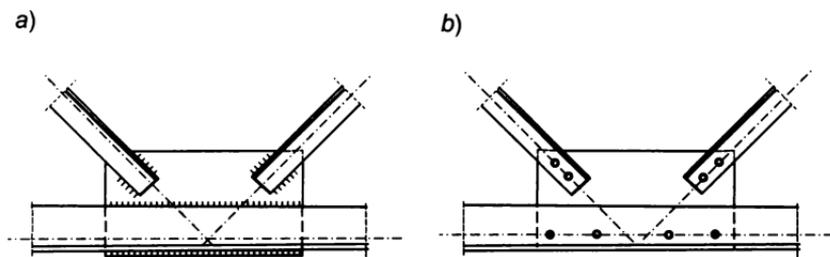


Рис. 8.1. Узлы ферм

При оправдании применения шарнирной модели обычно ссылаются на одно из следующих обстоятельств (или их совокупность):

- стержни являются столь гибкими, что практически не воспринимают изгибающих моментов;
- все внешние нагрузки приложены к узлам, и поэтому преобладающими являются продольные усилия.

Более аккуратным является следующее рассуждение [Шулькин, 1978]. Если задана конструкция, имеющая жесткие узлы, то наряду с ней можно рассмотреть и ее *шарнирную схему*, отличающуюся тем,

что жесткие узлы заменены идеальными шарнирами. Возникает вопрос, можно ли использовать шарнирную схему в качестве расчетной модели конструкции. Для ответа на него учтем, что в заданной системе стержни могут испытывать и удлинения, и изгиб, тогда как в шарнирной схеме — только удлинения. Жесткость стержня при изгибе имеет порядок  $EI/l^3$ , а при растяжении-сжатии —  $EA/l$  ( $I$  — момент инерции;  $A$  — площадь). Для тонкого стержня

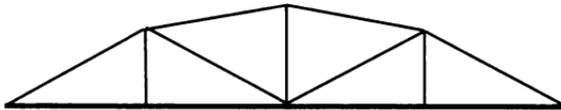
$$\frac{EI/l^3}{EA/l} = \frac{r^2}{l^2} = \frac{1}{\lambda^2} \ll 1, \quad (8.1)$$

где  $r^2 = I/A$  — квадрат радиуса инерции,  $\lambda = r/l$  — гибкость стержня.

Если шарнирная схема неизменяема, то любая нагрузка может быть воспринята ею (является для нее равновесной), и при этом такой нагрузке будут соответствовать удлинения первого порядка малости. Действительно, из (8.1) следует, что деформация изгиба, не учитываемая в шарнирной схеме, вносит незначительный вклад в жесткость конструкции, так что внешние силы воспринимаются, в основном, благодаря удлинениям стержней. Иначе обстоит дело, если шарнирная схема является изменяемой. В этом случае имеются нагрузки (неравновесные для шарнирной схемы), которые могут быть восприняты только за счет изгиба стержней.

Конечно, приведенное рассуждение является чисто качественным, и на него не следует ориентироваться безоговорочно. Так, если нижний пояс фермы, имеющей неизменяемую шарнирную схему (см. рис. 8.2, *a*) запроектирован намного более жестким, чем верхний пояс и решетка, то целесообразно учесть его неразрезность, принимая расчетную схему комбинированной (рис. 8.2, *b*).

a)



b)

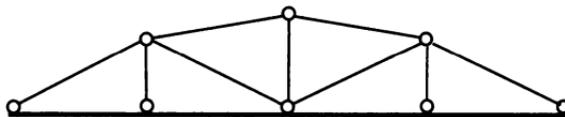


Рис. 8.2. Расчетные схемы фермы

Иногда в качестве обоснования используют рекомендации по ограничению сверху отношения поперечных размеров сечения к

длине стержня величиной  $1/10...1/12$ , полученные для мостовых ферм в цикле исследований под руководством Б.Е. Патона [Патон, Горбунов, 1935]. При этом часто забывают, что эти рекомендации относятся к системам с решетками вполне определенного типа, загруженным вполне определенным способом и выполненным из мягкой стали, т. е. не являются абсолютными.

При ручном расчете шарнирная схема настолько облегчает вычисления, что ее используют при малейшей возможности. Но при расчете с помощью ЭВМ почти не составляет никакого труда учесть жесткость узлов, и, казалось бы, исчезает сама проблема. Однако при этом загромождается (точнее — может загромодиться) несущественной информацией массив результатов расчета. В связи с этим применение шарнирно-стержневых моделей вряд ли будет сужаться, и на обоснованность их использования следует обращать серьезное внимание. Особенно внимательным следует быть в тех случаях, когда программный комплекс не только выполняет статический и динамический расчет, но и подбирает сечения элементов. Тогда может оказаться, что предположение проектировщика о достаточной гибкости стержней не выполняется для сечений, подобранных в автоматическом режиме.

Другой неприятной особенностью расчетных схем с попыткой формального рассмотрения ферменных конструкций как рамных является ухудшение обусловленности разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, вызванное резким различием по порядку величин коэффициентов, зависящих от изгибных и осевых компонент деформаций. В том случае, когда возникает подозрение на возможность значительной потери точности расчета при использовании расчетной схемы фермы с жесткими узлами, а проектировщик все же интересуется развивающимися в стержнях усилиями от изгиба, можно сначала выполнить расчет фермы как шарнирно-стержневой системы, определив тем самым линейные перемещения всех ее узлов. На втором этапе, на котором отыскиваются изгибные компоненты усилий в стержнях, рассматривается та же система, но с жесткими узлами, закрепленными от всех линейных перемещений, при этом в качестве внешних воздействий принимаются заданные перемещения узлов, полученные на первом этапе расчета.

Кроме того, что при расчете шарнирно-стержневых систем пренебрегают изгибной компонентой, для большинства стержневых конструкций не учитывают и податливость стержня, связанную с работой стержня на сдвиг. Это тоже давняя традиция, обосновываемая в стандартных курсах строительной механики

незначительным вкладом сдвиговой компоненты в интеграл Мора. Попутно заметим — следовало бы оговаривать, что пренебрежение деформацией сдвига недопустимо, если рассматривается система с анизотропными элементами, обладающими малой жесткостью сдвига, например, относительно короткие деревянные балки или стержни двутаврового сечения, где касательные напряжения в тонких стенках достигают значительных величин [Ржаницын, 1982], стр. 68.

Наличие эксцентриситетов, вызванных неточностью центровки стержней в узлах и случайными искривлениями элементов, приводит к тому, что элементы ферм работают как сжато- или растянуто-изогнутые, даже при отсутствии внеузловой нагрузки. Для учета этого обстоятельства иногда к напряжениям от растяжения (сжатия) добавляют вычисленные как для рамной системы напряжения от изгиба, пытаясь таким образом уточнить расчет. Как было показано в работе [Динкевич, 1969], этот дополнительный расчет заведомо ничего не уточняет, если он осуществляется в рамках линейной теории (по недеформированной схеме). Действительно, при значительных продольных силах в элементах за счет эффектов продольно-поперечного изгиба (в зарубежной литературе такие расчеты называются расчетами «с учетом эффектов второго порядка») жесткости на изгиб растянутых стержней заметно увеличиваются, а сжатых — уменьшаются, что приводит к перераспределению моментов, значения которых могут заметно измениться.

Для стропильной фермы по типовому проекту ПК-01-125 (рис. 8.3) расчеты дали результаты, приведенные в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

Элемент	Изгибающий момент, [кг×см]		$M_2 / M_1$
	$M_1$	$M_2$	
1	8710	14930	1,715
2	10350	16000	1,545
3	17220	22180	1,285
4	12850	7800	0,607
5	18570	6220	0,335

В этой таблице через  $M_1$  обозначены моменты, вычисленные без учета влияния продольных сил, т.е. по обычной схеме вычислений, используемой для стержневых систем рамного типа, а через  $M_2$  — вычисленные по правилам расчета при продольно-поперечном изгибе, когда элементы матрицы жесткости являются функциями от параметра  $\nu$ , где  $\nu^2 = (NI^2/EI)$ .

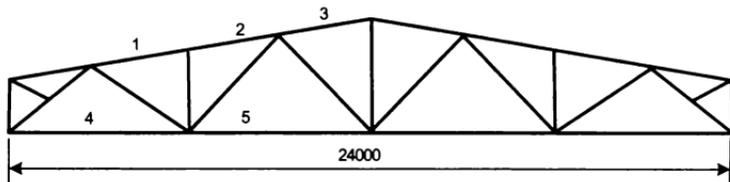


Рис. 8.3. Схема фермы

## 8.2. Монтаж

Процесс фактического создания сложной системы в общем случае является многоэтапным и тесно увязан с последовательностью выполняемых операций по сборке системы. При этом в том или ином порядке могут выполняться работы по установке и удалению некоторых элементов системы, установке или удалению балластных грузов, регулированию длин тех или иных элементов, изменению состояния некоторых связей и т.п. Кроме того, на некоторых шагах этого процесса возможно проведение контрольных измерений внутренних сил в элементах и/или перемещений в некоторых точках. Каждая из этих операций определяет некоторую *стадию* монтажа. Те из стадий, которые относятся к одной и той же расчетной схеме, определяют *этап* монтажа. Иначе говоря, в используемой нами терминологии один монтажный этап может включать в себя одну или несколько стадий монтажа.

Разработчик конструкции обычно может с некоторой степенью точности указать желательную для него картину напряженно-деформированного состояния (НДС), которая должна быть реализована в окончательно собранной и преднапряженной конструкции при действии на нее вполне определенной нагрузки (например, собственного веса). Кроме того, обычно бывает заданным набор *регулируемых параметров* системы (перечень элементов, длины которых можно регулировать, список узлов, в которых можно разместить балластную нагрузку и т.п.). Некоторые из этих регулируемых параметров могут быть заданы заранее, другие подлежат определению расчетным путем, исходя из желательного характера преднапряжения. На последние могут быть наложены условия, ограничивающие как их величину, так и предопределяющие знак. Эти условия назначаются разработчиком конструкции, исходя из соображений, касающихся физической природы регулирующих воздействий. Например, регулирующее воздействие балластной

пригрузки имеет вполне определенное направление и знак, а величины дислокаций вантовых элементов должны быть только положительными, поскольку дислокации противоположного знака вантами не воспринимаются<sup>1</sup>.

Большинство из действий, выполняемых в процессе монтажа, приводит к изменению расчетной схемы и/или напряженного и деформированного состояния системы.

Воздействия на систему, определяющие характер ее напряженного и деформированного состояния, разбиваются на два класса:

- *известные воздействия*, для которых заранее определены их величина, место приложения и характер действия;
- *неизвестные управляющие параметры*, для которых заранее известен лишь характер воздействия и место его приложения к системе, а величина этого воздействия подлежит определению.

В обоих случаях в роли воздействий могут выступать сосредоточенные и распределенные нагрузки, температура, дислокационные воздействия и др. При этом воздействия могут быть групповыми (обобщенными), и тогда в качестве неизвестного управляющего параметра выступает общий масштабный множитель, определяющий интенсивность такого группового воздействия.

Усилия в элементах или перемещения некоторых точек системы, которые проектировщик хотел бы выдержать в определенных и заранее заданных пределах на тех или иных стадиях монтажа (в частности, и после его окончания) при действии вполне определенной нагрузки, будем называть *контролируемыми параметрами*. Именно из условий, наложенных на значения контролируемых параметров, расчетом определяются величины управляющих параметров.

Можно указать некоторый набор элементарных операций, последовательность которых дает возможность выполнить все необходимые преобразования расчетной схемы для определения НДС в процессе монтажа и создания предварительного напряжения системы. Выделение таких элементарных операций, вообще говоря, может быть выполнено различными способами. Приведенный ниже набор операций [Mitsui, Kanemitsu, 1999] характеризуется тем, что с каждой из них связывается, по возможности, наиболее простое действие по преобразованию разрешающих уравнений метода перемещений или по определению НДС.

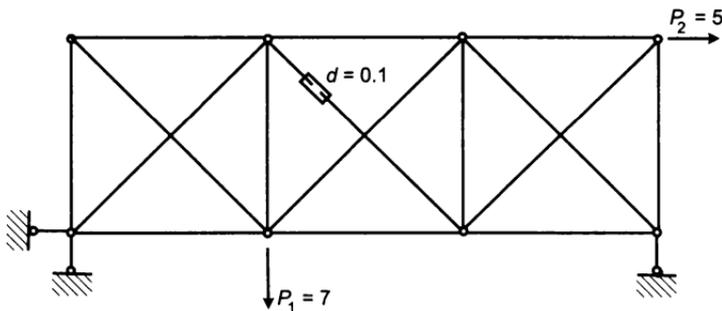
---

<sup>1</sup> Конечно, в отношении вант здесь имеется в виду некий гипотетический случай отсутствия поперечной нагрузки на гибкую нить или пренебрежения этой нагрузкой в расчетной схеме.

Сразу же заметим, что на самом деле следует четко различать суммарное НДС системы, возникающее на каждой из стадий монтажа с учетом всех предшествующих стадий, и приращение НДС, вызванное дополнительными воздействиями на систему, относящимися исключительно к рассматриваемой стадии монтажа. Контролю, разумеется, подлежат параметры суммарного НДС, тогда как определению расчетным путем на каждом из этапов монтажа подлежат параметры приращений НДС. Подчеркнем, что существенным здесь является наделение системы свойством памяти по отношению к суммарному НДС, что позволяет в процессе монтажа запоминать и наследовать накопленные напряжения и перемещения.

Итак, среди элементарного набора операций выделяем следующие.

**А) Нагружение системы известным воздействием,** представляющим собой набор заданных нагрузок, дислокаций и температурных воздействий (рис. 8.4).



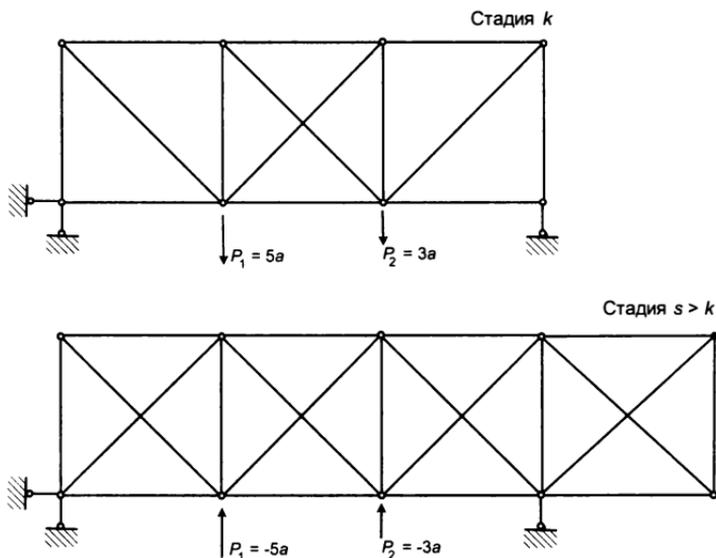
**Рис. 8.4.** Нагружение системы известными воздействиями

Эта операция относится к вполне определенной стадии монтажа, во время которой происходит рассматриваемое нагружение. Вызванное ею изменение НДС возникает на рассматриваемой (например,  $k$ -ой) стадии и наследуется всеми последующими стадиями от  $(k+1)$  до  $n$ . Здесь и далее в этом разделе  $n$  является номером последней стадии монтажа. Иногда в процессе монтажа на одной из последующих стадий, скажем, на стадии  $l$ , где  $l > k$ , к системе прикладывается «аннулирующее» нагружение, имеющее тот же характер, что и рассматриваемое на  $k$ -ой стадии, но противоположное по знаку. Тогда удобно рассматривать это аннулирующее нагружение как независимо возникающее, поскольку в противном случае наследование нагружения  $k$ -ой стадии монтажа сохранится только до  $l$ -ой стадии и будет потеряно на стадиях от  $l+1$  до  $n$ .

**В) Нагружение системы неизвестной нагрузкой (управляющее воздействие)** — эта операция не отличается принципиально от рассмотренной выше, однако тот факт, что значение управляющего параметра пока не известно, заставляет выполнить расчет не на определенную величину нагружения, а на его единичное значение. В результате мы получим не фиксированное изменение НДС, а лишь некоторый вспомогательный результат (числа влияния), который впоследствии может быть использован для определения значений управляющих параметров и НДС.

Свойства наследуемости НДС и его локализация в пределах изолированного суперэлемента (либо изолированного фрагмента другого типа) здесь такие же, как и в предыдущем случае.

Более общим случаем является нагружение изменившейся схемы управляющим воздействием, равным ранее использовавшемуся (в другой схеме) управляющему параметру, взятому с некоторым коэффициентом (рис. 8.5).



**Рис. 8.5.** Нагружение управляющим воздействием

Чаще всего упомянутый коэффициент берется равным минус 1, что соответствует разгрузке (удалению балластных грузов), однако для общности можно предполагать и другие его значения (например, коэффициент +1,0 может возникнуть при необходимости удвоения балласта).

В рассматриваемом случае НДС относится к стадиям от  $s$  до  $n$ , где  $s > k$  является номером стадии, на которой вводится рассматриваемое нагружение. Изменение НДС локализуется уже в пределах

изменившейся системы, а не того ее состояния, для которого использовался предыдущий управляющий параметр.

**С) Монтаж ненапряженной внешней связи** в узле системы, запрещающей изменение определенного перемещения или поворота. Необходимо отметить, что речь идет именно о запрете изменения перемещения (рис. 8.6), а не о запрете самого перемещения или поворота (обнуления его величины).

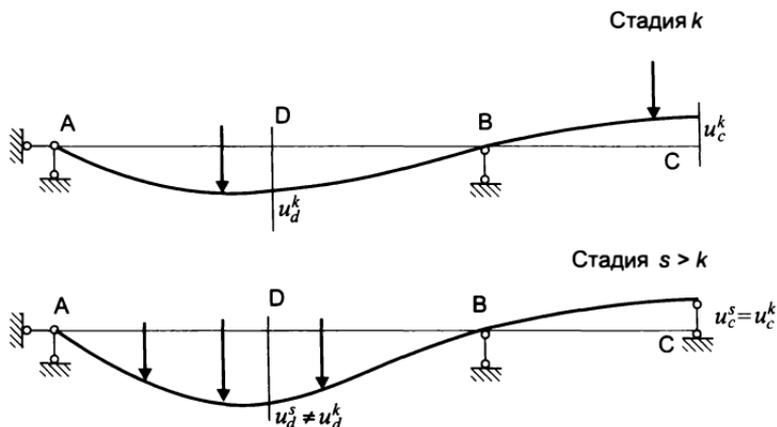


Рис. 8.6. Монтаж ненапряженной связи

Последнее потребовало бы установки связи с некоторым усилием (напряженной связи).

Устанавливаемая ненапряженная связь меняет расчетную схему, но не меняет ее НДС, которое остается таким же, как и на предыдущем этапе.

**Д) Демонтаж внешней связи** (рис. 8.7).

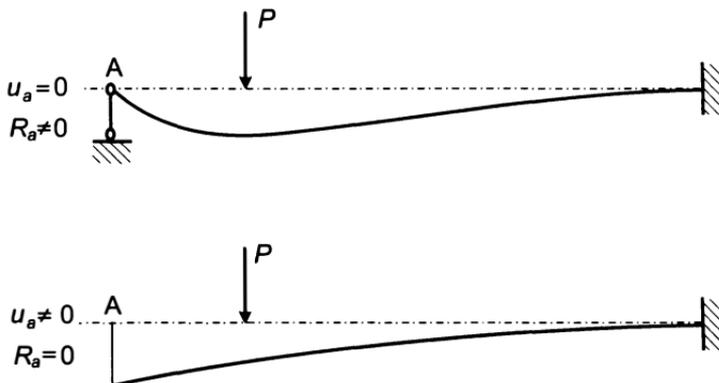


Рис. 8.7. Демонтаж внешней связи

В данном случае меняется не только расчетная схема, но и НДС. Последнее происходит из-за того, что в общем случае удаляемая связь является напряженной, и перед изменением расчетной схемы необходимо обнулить усилие в удаляемой связи. Здесь усилие в удаляемой связи играет роль контролируемого параметра, для которого требуется точное выполнение условий контроля.

Возможен и другой подход к удалению напряженной связи, который следует также из принципа освобождаемости от связей — равновесие не нарушится, если вместо удаленной связи приложить к системе ее реакцию. Затем, уже в новой системе без связи, следует погасить реакцию удаленной связи. Это можно сделать, приложив в узел примыкания связи силу, равную этой реакции по величине, но направленную противоположно.

**Е) Монтаж элемента** возможен без преднапряжения и с преднапряжением (последнее может быть выполнено различными способами). Такая операция в зависимости от принятого способа создания преднапряжения по разному меняет НДС системы и всегда связана с корректировкой расчетной схемы. Разновидностью рассматриваемой операции является задание неизвестного значения преднапряжения, выполняющего в этом случае роль управляющего параметра. Тогда, как и в операции «нагружение системы неизвестной нагрузкой», выполняются расчеты на единичное воздействие, а результатом будут вспомогательные данные, которые могут использоваться для определения НДС и значений управляющих параметров.

**Ф) Удаление из системы элемента или суперэлемента** связано не только с изменением расчетной схемы, но и с необходимостью учета изменения НДС. Поскольку в преобразованной системе на оставшуюся часть со стороны удаленной части не должно быть никаких воздействий, то рассматриваемая элементарная операция состоит, по сути, из двух шагов:

- обнуление усилий взаимодействия между остающейся и удаляемой частями системы;
- изменение расчетной схемы.

Для того, чтобы физически выполнить первый шаг операции, в конструкции должны находиться устройства, позволяющие регулировать напряженное состояние удаляемой части, по крайней мере, в области стыка с остающейся частью системы (винтовые стяжки, клинья, система балластных грузов и др.). С помощью подбора соответствующих значений управляющих параметров можно

добиться того, что усилия взаимодействия обратятся в нуль, если они до этого не были нулевыми. Здесь следует отметить, что усилия взаимодействия выступают в роли управляющих параметров с той лишь особенностью, что требования контроля (нулевые значения) должны выполняться точно в силу законов природы, в то время как в других случаях контроля допустимо говорить о приближенном выполнении условий контроля.

Рассматриваемая элементарная операция является некоторым обобщением операции «удаление внешней связи», и для ее реализации также может применяться второй подход, а именно — можно представить, что элементы удалены из системы, а их действие на оставшуюся часть заменено силами  $N_j$ , которые существовали в удаленных элементах, и эти силы затем подавляются приложением нагрузки  $P_j = -N_j$ .

**Г) Установка внутренней связи** запрещает изменение определенного взаимного перемещения между узлом системы и концевым сечением примыкающего к узлу элемента (например, при превращении шарнирного сопряжения в жесткое запрещается изменение взаимного угла поворота). Установка такой связи допускается в том случае, когда конечный элемент обладает соответствующей степенью свободы и допускает ее задание в виде «перемещение возможно — перемещение невозможно».

**Н) Удаление внутренней связи** является частным случаем операции «удаление из системы элемента». Как правило, внутренняя связь является напряженной, поэтому и здесь требуется предусмотреть обнуление усилия взаимодействия по аналогии с рассмотренными выше случаями.

**И) Контроль параметров НДС** необходим в тех случаях, когда в создании преднапряжения участвуют неизвестные управляющие параметры. Суть операции состоит в том, что реализуются ограничения в виде равенств с допусками на точность выполнения или в виде двусторонних неравенств, которые относятся к перемещениям некоторой группы узлов или к усилиям в некоторых элементах системы. Соответственно заданию на контроль подлежат вычислению значения управляющих параметров, с помощью которых и достигается выполнение требуемых ограничений, при этом контроль может быть отнесен к определенным этапам монтажа или к окончательно собранной системе.

### 8.2.1. Генетическая нелинейность

Все расчеты, связанные с монтажом системы и с процессом создания предварительного напряжения, как правило, выполняются в предположении справедливости обычных допущений линейной строительной механики для каждого этапа монтажа. Однако, в целом, за счет изменения расчетной схемы при переходе от этапа к этапу, задача является нелинейной. Такая нелинейность, обусловленная историей создания системы, могла бы быть названа *генетической*.

Для каждой стадии монтажа можно использовать любой из классических методов строительной механики, но, с учетом специфики многоэтапного расчета, полезно представить эти методы в форме, где отражается переменность системы. Для разрешающих уравнений метода перемещений, например, будем писать

$$\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{u}_r = \Delta \mathbf{q}_r, \quad (8.2)$$

где  $\mathbf{K}_r$  — матрица жесткости системы на  $r$ -том этапе, а  $\Delta \mathbf{u}_r$  и  $\Delta \mathbf{q}_r$  — векторы дополнительных перемещений и дополнительных приведенных узловых нагрузок, относящихся к  $r$ -ому этапу соответственно. Зная  $\Delta \mathbf{u}_r$ , можно определить приращения усилий  $\Delta \mathbf{s}_r$  и получить накопленные по всем  $r$  этапам значения перемещений  $\mathbf{u}_r$  и усилий  $\mathbf{s}_r$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r-1} + \Delta \mathbf{u}_r, \quad (8.3)$$

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{s}_{r-1} + \Delta \mathbf{s}_r. \quad (8.4)$$

Такое поэтапное суммирование компонент НДС необходимо проводить в силу отмеченного выше свойства памяти системы. Соотношения (8.3) и (8.4) уместно называть *законами наследования монтажных состояний конструкции*. Одновременное выполнение линейных соотношений (8.2) и законов наследования (8.3) — (8.4) как раз и порождает генетическую нелинейность задачи.

Понятно, что для воздействий, относящихся к различным стадиям одного и того же этапа монтажа, действуют обычные линейные законы механики — по ранее приведенной терминологической договоренности расчетная схема конструкции меняется только при переходе к следующему монтажному этапу. В этой связи под приращениями  $\Delta \mathbf{u}_r$  и  $\Delta \mathbf{s}_r$  следует понимать накопление перемещений и усилий, произошедшее от момента завершения последней стадии предшествующего этапа монтажа. Однако для упрощения, чтобы не вводить двойной нумерации этапов и стадий, будем считать, что на каждом этапе имеется всего одна монтажная стадия. Такое

предположение на самом деле не является ограничением, так как всегда можно формально увеличить количество этапов до общего количества стадий.

Еще раз подчеркнем, что в некоторых случаях часть нагрузок действует только в рамках  $r$ -ого этапа монтажа, и при переходе к последующим этапам снимается. Такая ситуация типична, например, для навесного монтажа конструкции, когда вес кранового оборудования учитывается при формировании вектора  $\Delta q_r$  с расположением кранов, соответствующих именно этому этапу. При переходе к следующему  $(r+1)$ -ому этапу монтажа вектор узловых нагрузок формируется с учетом нового положения кранового оборудования, но при этом нужно помнить о необходимости приложения на  $(r+1)$ -ом этапе и отрицательных крановых нагрузок, аннулирующих их воздействия на систему, относящиеся к предыдущему этапу. Если этого не сделать, то законы наследования (8.3) и (8.4) не будут работать.

В тех случаях, когда в роли воздействия на систему выступают нагрузки или дислокации, заданные с точностью до неизвестного множителя  $\alpha_k$  (управляющие параметры), расчет выполняется при единичном значении  $\alpha_k = 1$  и его результатом является набор чисел влияния  $U_k$  и  $S_k$  для перемещений и усилий, с помощью которых могут быть записаны все необходимые выражения.

В общем случае на каждом отдельном этапе монтажа может быть не один параметр, а совокупность управляющих параметров. Введем следующие обозначения:  $m_k$  — общее количество управляющих параметров, которыми проектировщик может распоряжаться на  $k$ -ом этапе монтажа,  $\alpha_j^k$  —  $j$ -й управляющий параметр, относящийся к  $k$ -ому этапу. В силу линейности задачи на каждом из этапов монтажа относительно приращений компонент НДС, а также на основании законов наследования (8.3) и (8.4), справедлива зависимость

$$T_i^r = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} W_{ij}^{rk} \alpha_j^k + \bar{W}_i^r, \quad (8.5)$$

связывающая между собой контролируемые параметры  $T_i^r$  и управляющие параметры  $\alpha_j^k$  с помощью матрицы чисел влияния  $W$ .

Компонентами вектора  $T$  являются усилия  $s_i^r$  и перемещения  $u_i^r$ , которые подлежат контролю на  $r$ -ом этапе монтажа. Матрица  $W$  состоит из коэффициентов влияния управляющих параметров  $\alpha_j^k$  ( $j$ -й управляющий параметр на  $k$ -ом этапе) на величины  $T_i^r$  ( $i$ -й контролируемый параметр на  $r$ -ом этапе). Вектор  $\bar{W}$  содержит в

качестве компонент те значения контролируемых параметров, которые накоплены к  $r$ -ому этапу от влияния известных нагрузок и воздействий.

Очевидно, что управляющие параметры, введенные на  $k$ -ом этапе, не могут влиять на значения контролируемых параметров (впрочем, как и на любые другие компоненты НДС) на этапах, предшествовавших появлению управляющего воздействия, и элементы матрицы влияния  $W_{ij}^{rk} = 0$  при  $r < k$  для всех  $i$  и  $j$ .

Следовательно, матрица  $W$  имеет блочно-треугольную структуру такого типа, как это показано в табл. 8.2.

Таблица 8.2.

	$k=1$	$k=2$	...	$k=s$	...	$k=n$
$r=1$	$W^{11}$	$0$	...	$0$	...	$0$
$r=2$	$W^{21}$	$W^{22}$	...	$0$	...	$0$
...	...	...	...	...	...	...
$r=l$	$W^{l1}$	$W^{l2}$	...	$W^{ls}$	...	$0$
...	...	...	...	...	...	...
$r=n$	$W^{n1}$	$W^{n2}$	...	$W^{ns}$	...	$W^{nn}$

Здесь блок матрицы с верхними индексами  $r$  и  $k$  относится к этапу контроля  $r$  и этапу регулирования  $k$ . Размеры блоков определяются числом контролируемых и управляющих параметров, вводимых на каждом этапе.

Матрица влияния  $W$  имеет размеры  $M \times N$ , где  $M$  — общее число контролируемых параметров,  $N$  — суммарное количество управляющих параметров. Тогда, образуя полный вектор контролируемых параметров  $T$  и полный вектор управляющих параметров  $\alpha$ , запишем систему уравнений (8.5) в матричной форме

$$T = W\alpha + \bar{W} \quad (8.6)$$

Пусть матрица  $W$  имеет ранг  $N$ , что позволяет выделить среди всех строк этой матрицы  $N$  линейно независимых. Без ограничения общности можно считать, что линейно независимыми являются первые  $N$  строк матрицы  $W$ , так как этого всегда можно добиться простой перестановкой строк в системе уравнений (8.6) при условии, что  $\text{rank} W = N$ .

Перепишем теперь (8.6) в блочной форме

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} \bar{W}_1 \\ \bar{W}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

где  $W_1$  — невырожденная квадратная матрица порядка  $N$ . В результате решения системы (8.7) получим

$$\alpha = W_1^{-1}(T_1 - \bar{W}_1), \quad (8.8)$$

и при этом векторы  $T_1$  и  $T_2$  будут связаны линейными соотношениями

$$T_2 = W_2 W_1^{-1}(T_1 - \bar{W}_1) + \bar{W}_2. \quad (8.9)$$

Для каждого из контролируемых параметров задается коридор допустимых значений в форме ограничивающих неравенств

$$T_i^{\min} \leq T_i \leq T_i^{\max} \quad (i = 1, \dots, M). \quad (8.10)$$

Заметим, что ограничения на контролируемые параметры в форме равенств являются частным случаем задания коридора допустимых значений при ширине коридора равной нулю, то есть при  $T_i^{\min} = T_i^{\max}$  для некоторого индекса  $i$ .

Совокупность первых  $N$  ограничений в (8.10), относящихся к компонентам вектора  $T_1$ , определяет  $N$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $P_1$ , тогда как последние  $(M-N)$  ограничений в (8.10) относятся к компонентам вектора  $T_2$  и образуют прямоугольный параллелепипед  $P_2$  в пространстве размерности  $(M-N)$ . Если найдется хотя бы одна точка из  $P_1$ , которая при линейном преобразовании (8.9) переходит в точку, принадлежащую  $P_2$ , то задача подбора управляющих параметров  $\alpha$  имеет решение. В противном случае не существует такого набора управляющих параметров  $\alpha$ , при котором все контролируемые параметры попадают в коридор допустимых значений (8.10), и проектные решения требуют изменений.

Надо сказать, что авторам неизвестен какой либо программный комплекс, наделенный способностью к решению расчетных задач монтажных состояний конструкций в такой общей постановке. В этой связи на практике инженеры вынуждены задаваться набором управляющих параметров  $\alpha$ , исходя из интуиции, из опыта проектирования и т.п., а затем проверять выполнение контролируемых ограничений типа (8.10). В частности, в качестве первого приближения часто выбирают центральную точку параллелепипеда  $P_1$ , то есть полагают

$$T_i = \frac{1}{2} (T_i^{\min} + T_i^{\max}) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (8.11)$$

При необходимости управляющие параметры корректируются, и расчет производится заново.

Вполне возможна (и даже наиболее вероятна) ситуация, когда образ прямоугольника  $P_1$  при отображении (8.9) пересекается с

прямоугольником  $P_2$  не в одной точке, что соответствует неединственности решения в отношении выбора допустимого вектора управляющих параметров  $\mathbf{a}$ . В этом случае инженер может распорядиться предоставленным ему произволом в целях оптимизации конструкции. Поскольку формулировка функции цели при таком варианте оптимизации зависит от конкретной проектной задачи и не может быть сформулирована в сколько-нибудь общем виде, мы не останавливаемся далее на этом. Собственно, для задачи монтажа достаточно найти хотя бы одно из допустимых решений по условиям ограничений (8.10).

Наконец, заметим, что случай, когда ранг матрицы  $\mathbf{W}$  меньше числа управляющих параметров  $N$ , не вносит ничего нового в постановку задачи, поскольку всегда можно пополнить эту матрицу дополнительными линейно независимыми строками так, чтобы ранг пополненной матрицы был равен  $N$ . Введение в матрицу  $\mathbf{W}$  этих новых строк равносильно пополнению списка контролируемых параметров до величины,  $M + N - \text{rank} \mathbf{W}$ , где  $\text{rank} \mathbf{W}$  — ранг первоначальной (до пополнения линейно независимыми строками) матрицы. Для того, чтобы новые, формально введенные контролируемые параметры не оказывали воздействия на решение задачи, достаточно установить для них бесконечную в обе стороны ширину коридора.

Наиболее часто в процессе монтажа ограничиваются набором управляющих параметров, определяющих внутреннее самонапряженное состояние конструкции. Как это было показано в главе 3, количество возможных линейно независимых состояний самонапряжения дискретной конструкции равно степени ее статической неопределимости. Поэтому и число управляющих параметров  $N$  в таком случае не превышает степени статической неопределимости системы. С другой стороны, количество контролируемых параметров  $M$  может быть достаточно большим числом — проектировщик, как правило, хотел бы быть уверенным в выполнении условий прочности для всех элементов системы. Если в постановке задачи пользоваться не коридором допустимых значений контролируемых параметров, а точно указанными величинами (это соответствует случаю сужения ширины коридора до нуля), то тогда система уравнений (8.6) может и не иметь решения.

Отказ от решения переопределенной системы уравнений (8.6) является фатально обязательным. Возможно, что инженер имеет некоторые соображения при стремлении к созданию именно такого, как он указал, набора контролируемых параметров. Можно пойти ему навстречу, решая в этом случае переопределенную систему (8.6) :

смысле среднеквадратичного приближения. Это эквивалентно домножению (8.6) слева на транспонированную матрицу  $\mathbf{W}^T$ , что приводит к системе уравнений порядка  $N$  с положительно определенной матрицей  $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$

$$\mathbf{W}^T\mathbf{T}_0 = \mathbf{W}^T\mathbf{W}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{W}^T\bar{\mathbf{W}}. \quad (8.12)$$

Здесь через  $\mathbf{T}_0$  обозначен вектор контролируемых параметров с заранее принятыми значениями. Решение системы уравнений (8.12), разумеется, не будет точно удовлетворять исходной системе (8.6). Но здесь у проектировщика имеется возможность вернуться к концепции коридора, восстановив по (8.6) значения контролируемых параметров по принятым из решения системы (8.12) значениям управляющих параметров

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T(\mathbf{T}_0 - \bar{\mathbf{W}}). \quad (8.13)$$

Если какие-то из компонент вектора  $\mathbf{T}$ , полученные по (8.13), выходят за рамки допустимых отклонений от компонент вектора  $\mathbf{T}_0$ , то задачу подбора вектора  $\boldsymbol{\alpha}$  можно пытаться решать с использованием взвешенного метода наименьших квадратов. Чем больше отклонение компоненты вектора  $\mathbf{T}$  по (8.13) от границы соответствующего коридора, тем больший вес имеет смысл приписать соответствующему уравнению в исходной системе уравнений (8.6). Возможны и другие подходы к назначению весовых коэффициентов. Например, такие, которые основаны на ранжировании важности тех или иных параметров. О важности можно иногда судить по ширине коридора допустимых значений — чем он уже, тем важнее для пользователя его выдержать.

Наиболее просто расчеты, связанные с учетом монтажа, выполняются в тех случаях, когда заранее задана вся последовательность операций, и никакие управляющие параметры при этом не отыскиваются. Расчетчик просто «следует природе», и готов примириться с полученными результатами. Эти результаты могут значительно отличаться от привычных, когда система предполагается созданной сразу в полном объеме, и лишь затем к ней начинают прикладывать внешние нагрузки.

Необходимость учета последовательности монтажа можно проиллюстрировать на простом примере расчета двухпролетной трехэтажной рамы. При монтаже каждого этажа ригель присоединяется к стойкам шарнирно и несет при этом нагрузку 2,0 т·м. Затем узлы присоединения ригелей омоноличиваются и ригели догружаются весом плит перекрытия, которые создают

дополнительную нагрузку 2,0 т/м. Так монтируются все этажи (рис. 8.8).

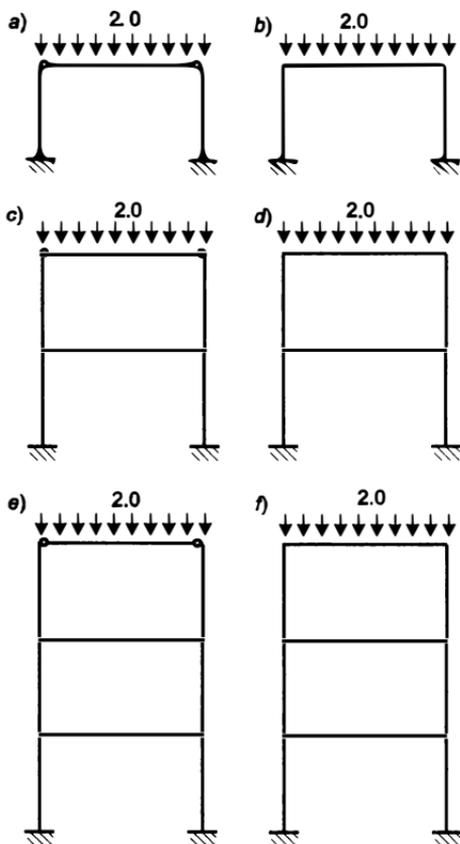


Рис. 8.8. Монтажные состояния плоской рамы

Последовательный расчет конструкции на стадиях монтажа а) ... ф) и суммирование полученных результатов дает эпюру изгибающих моментов, представленную в левой части рис. 8.9. Для сравнения справа приведена эпюра моментов, которая была бы получена в полностью готовой системе, если бы к ее ригелям была бы приложена нагрузка 4,0 т/м.

Другим достаточно характерным примером, показывающим, насколько эти два подхода могут различаться, могут служить приведенные в [Гильман, Борисенко, 1973] результаты расчета квадратной в плане железобетонной сферической оболочки, собираемой без подмостей из элементов размером 3×3 м. Последовательность монтажа указана цифрами на схеме четверти оболочки (см. рис. 8.10, а). Картина прогибов на различных стадиях

монтажа, представленная на рис. 8.10, *b*, указывает на значительное расхождение результатов расчета с теми, которые могли бы быть получены при игнорировании особенностей навесной сборки оболочки.

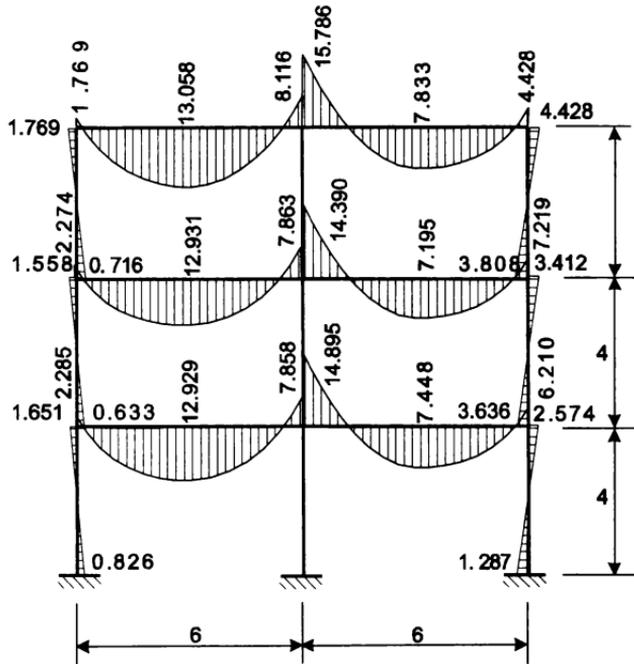


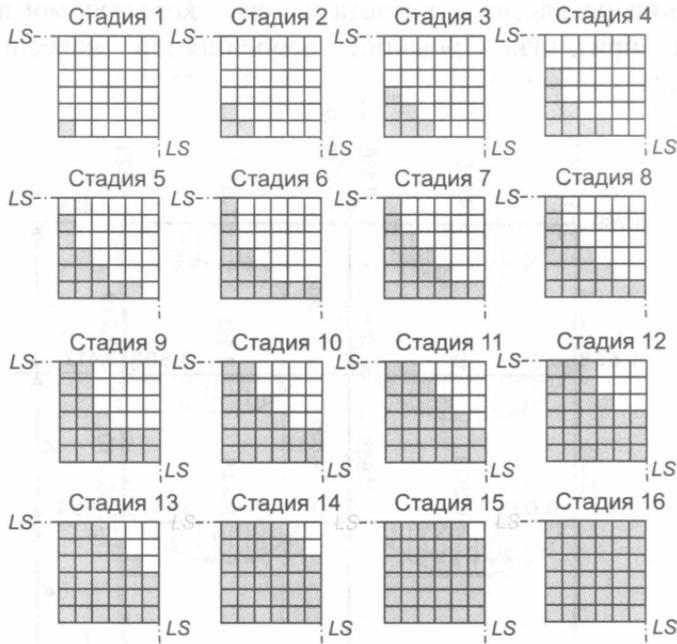
Рис. 8.9. Сопоставительные эпюры моментов в раме

Вариант сборки на подмостях в некоторой степени мог бы имитировать обычно применяющийся подход к расчету систем, как не имеющих предыстории и созданных «одномоментно». Нетрудно видеть, к чему приводит такой подход, который широко укоренился в расчетной практике и соответствует обычно используемой в стандартных курсах теории упругости (иногда и без явного указания) так называемой «гипотезе о естественном состоянии тела» или об отсутствии напряжений дислокационного типа.

По-видимому, это связано с тем, что в этих курсах рассматриваются двумерные и трехмерные непрерывные задачи для односвязных областей, где, как это показано в [Новожилов, 1958], дислокационные напряжения не могут возникнуть. Вот как об этом пишет В.В. Новожилов [1958], стр. 184:

*«Возникновение дислокационных напряжений всегда сопряжено с образованием из тела, свободного от напряжений, другого тела, степень связности которого, по крайней мере, на единицу больше, чем степень связности исходного тела.»*

a)



b)

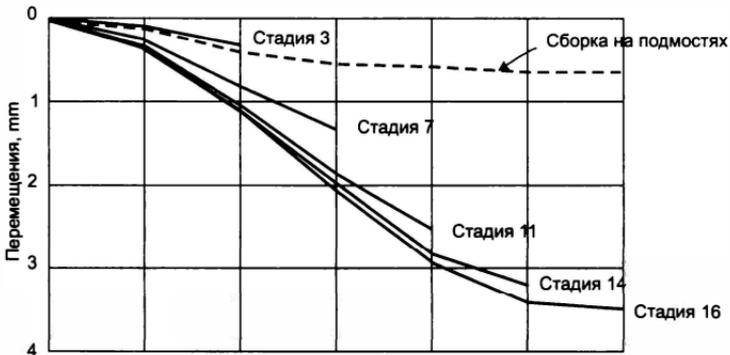


Рис. 8.10. Результаты расчета оболочки при навесном монтаже

В этом, кстати говоря, одно из тонких и принципиальных различий между дискретными и одномерными непрерывными системами, с одной стороны, и двух-трехмерными непрерывными системами — с другой стороны, на которое почему-то не обращается внимание в стандартных курсах строительной механики. Действительно, само понятие статической неопределимости в дискретных и непрерывных стержневых системах связано с возможностью существования состояний самонапряжения. Непрерывные же двумерные и трехмерные задачи, по определению, статически неопределимы —

уравнений равновесия недостаточно для отыскания компонент тензора напряжений, и, в то же время, состояние самонапряжения для односвязных областей невозможно.

Но большинство реальных конструкций не являются односвязными или могли быть таковыми только в процессе своего создания. Имеющийся опыт выполнения последовательности расчетов на монтажные состояния показывает, что часто нельзя не учитывать то напряженно-деформированное состояние, которое определяется историей создания конструкции и оказывается «запаянным» в системе.

Отметим, что исследование процесса монтажа может быть построено на использовании преобразований с псевдообратными матрицами Мура-Пенроуза. Сошлемся на работу [Перельмутер, 1998], в которой ставилась задача определения последовательности сборки, при которой минимизируется количество дополнительных опорных раскреплений, предотвращающих изменчивость лишь частично собранной конструкции.

На рис. 8.11 показан результат решения такой задачи для примера достаточно простой системы арочного типа. Это решение выполнялось с учетом дополнительного условия, что временные раскрепленья должны не только обеспечить неизменяемость, но и гарантировать, что не будет превзойден определенный уровень напряжений в элементах, вызываемый собственным весом.

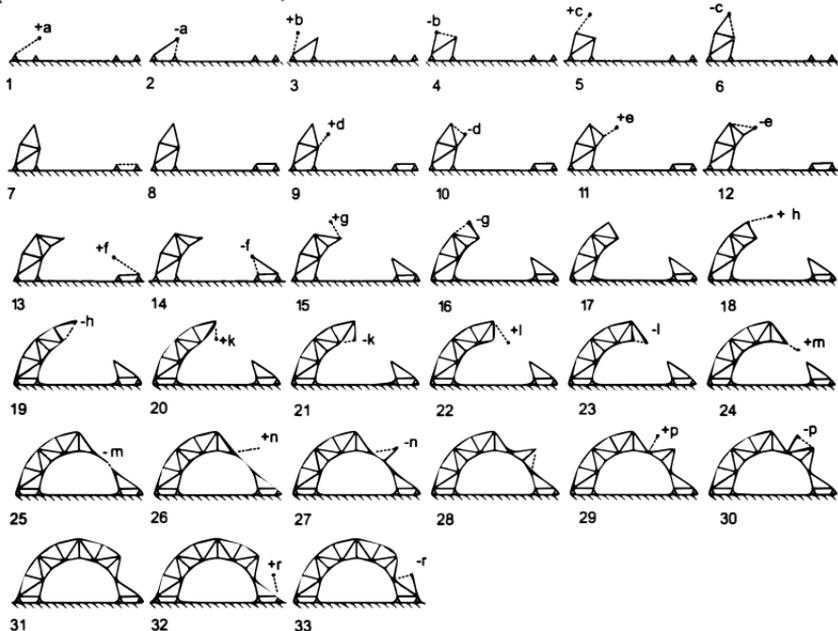
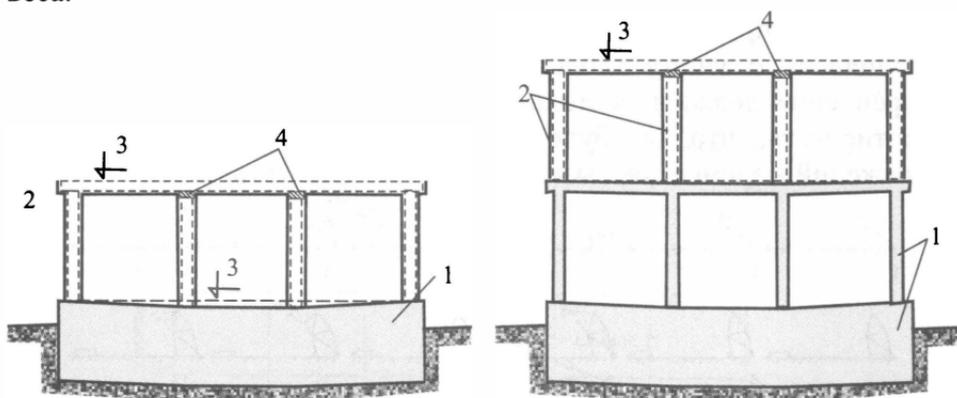


Рис. 8.11. Последовательность сборки

При строительстве многоэтажных зданий с железобетонным каркасом, у которых нагрузка от собственного веса конструкций является доминирующей, наблюдаются некоторые неожиданные эффекты, если в расчетной модели упомянутая нагрузка не возникает постепенно по мере возведения здания, а прикладывается одновременно.

Этот факт проявляется особенно в монолитных железобетонных зданиях. Дело в том, что при возведении каждого этажа опалубка выставляется таким образом, чтобы верхняя поверхность бетонируемого перекрытия получилась горизонтальной. По существу корректируется проектная длина колонн, которые наращиваются на величину просадки уже возведенной части здания (рис. 8.12). Эта процедура в некотором смысле повторяет методику корректировки геометрической схемы большепролетных сооружений путем введения строительного подъема. Разница состоит лишь в том, что корректировка геометрии реализуется постепенно по мере возведения сооружения и передачи на него соответствующей части собственного веса.



**Рис. 8.12.** Возведение монолитного здания: 1 — построенная часть, 2 — опалубка, 3 — проектные отметки, 4 — дополнительная часть колонны

К чему приводит учет этого обстоятельства, можно показать на примере расчета здания, расчетная схема которого показана на рис. 8.13,а. Здание имеет несимметрично расположенное ядро жесткости и диафрагменные стены в верхнем ярусе, перекрытия загружены равномерной распределенной нагрузкой 15 кПа. При традиционном подходе, когда нагрузки прикладываются к невесомой расчетной схеме одновременно, мы получаем деформированную схему, которая показана на рис. 8.13,в. При этом наблюдается «эффект подвешенной колонны», усилие растяжения в колонне верхнего яруса достигает

120 тонн. Если же вести расчет с учетом последовательности возведения и приложения нагрузок, то усилия в колонне по оси 2 получают значения, показанные на рисунке справа от схемы — никакого растяжения здесь нет и картина распределения усилий полностью соответствует ожидаемой.

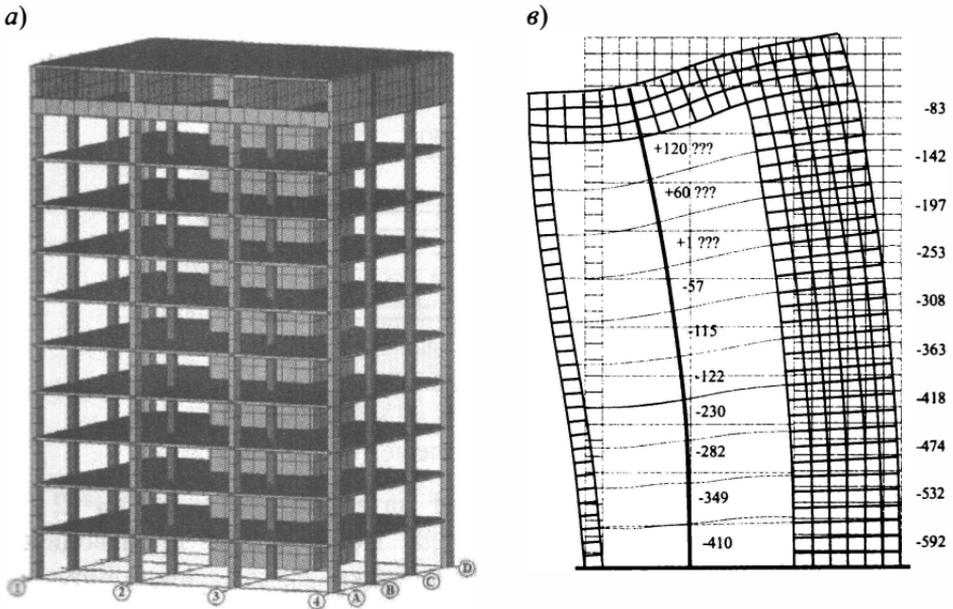


Рис. 8.13. К примеру расчета: а — каркас здания; в — деформированная схема по оси 2 (традиционный расчет)

### 8.3. Преднапряжение

Часто в конструкциях искусственно создается некоторое заранее планируемое преднапряжение, причем одним из наиболее частых способов создания преднапряжения является установка специальных запрягаемых элементов [Перельмутер, 1998].

Необходимо отметить, что при введении в систему напряженного элемента следует тщательно оценить способ создания преднапряжения, поскольку недооценка деталей тех операций, которые фактически выполняются в процессе монтажа, может привести к грубым ошибкам.

Покажем это на примере простой системы, изображенной на рис. 8.14, где монтируемый элемент, имеющий жесткость на растяжение/сжатие  $EA = 20000$ , расположен между узлами А и В, а «система» представлена стержнем с жесткостью на растяжение/сжатие  $EA = 2000$ , изгибной жесткостью  $EI = 2000$  и с бесконечно жесткими консолями. При этом можно представить себе несколько описанных ниже вариантов реализации монтажа этого элемента с преднапряжением, величина которого для определенности будет считаться равной  $P_0 = 2$ .

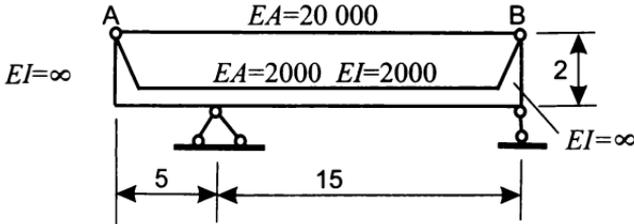


Рис. 8.14. К расчету элемента, устанавливаемого с преднапряжением

#### Вариант А: Натяжение элемента «на систему».

В этом случае разомкнутый элемент натягивается силой  $P_0 = 2$  по схеме, представленной на рис. 8.15,а. После этого производится замыкание разреза (рис. 8.15,б) и нагрузка  $P_0 = 2$  ликвидируется путем приложения сил  $P_0$  обратного знака к общей точке соединенной конструкции (рис. 8.15,с).

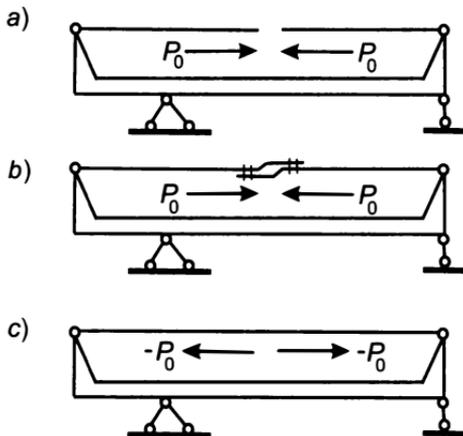


Рис. 8.15. Последовательность натяжения «на систему»

Последняя операция не меняет (в рассматриваемом случае) напряженного состояния, поскольку две равные и противоположно направленные силы, приложенные в одной точке конструкции,

равносильны отсутствию силового воздействия. Полученное напряженное состояние системы представлено в виде эпюр внутренних сил на рис. 8.16.

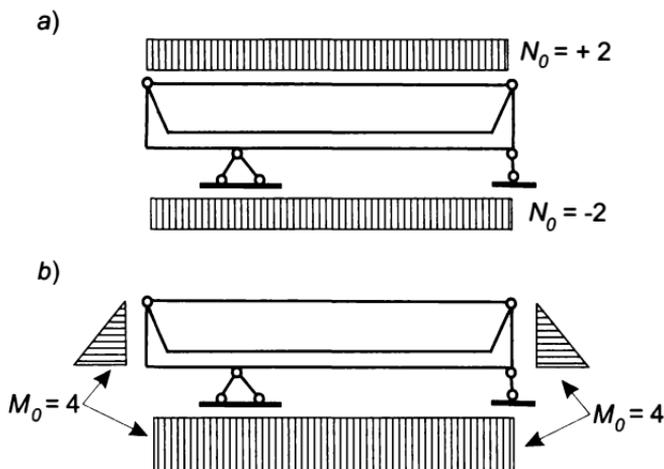


Рис. 8.16. Результаты при натяжении «на систему»

### Вариант В: Натяжение элемента «на землю» с подключением к системе.

В этом случае элемент растягивается силами  $P_0 = 2$ , которые уравновешиваются реакциями «земли» в дополнительных узлах  $A_1$  и  $B_1$  (рис. 8.17,а).

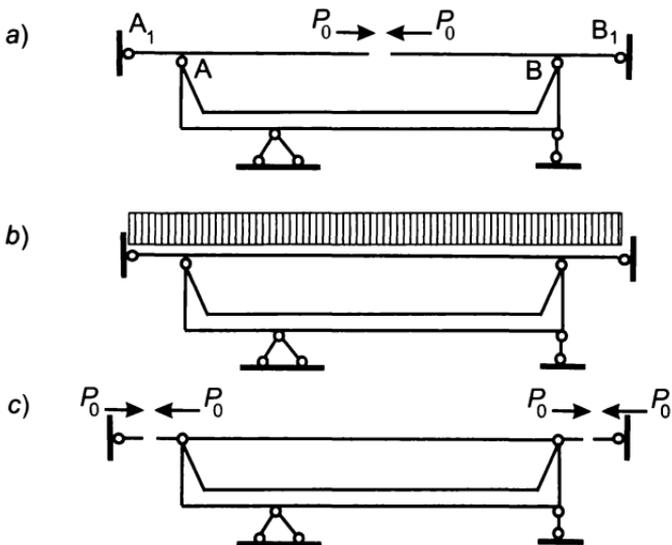


Рис. 8.17. Натяжение «на землю»

Затем такой, уже напряженный элемент присоединяется к системе (рис. 8.17, *b*), которая от этого не получает никаких усилий.

Отсоединение элемента АВ от узлов  $A_1$  и  $B_1$  можно представить в виде замены связей  $AA_1$  и  $BB_1$  их реакциями (рис. 8.17, *c*) и затем ликвидации этих реакций путем приложения усилий обратного знака. Компоненты этих усилий, действующие на узлы  $A_1$  и  $B_1$  (на «землю»), не вызывают напряжений в системе, в то время как компоненты, действующие на узлы А и В, вызывают внутренние усилия, которые необходимо учесть.

Суммарное напряженное состояние представлено в виде эпюр продольных сил на рис. 8.18.

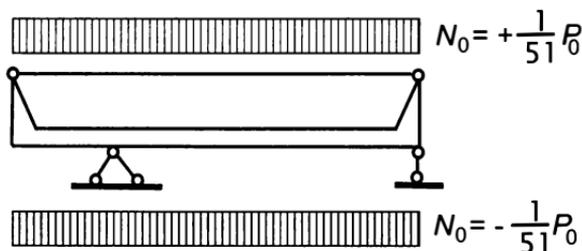


Рис. 8.18. Результаты расчета при натяжении «на землю»

### Вариант С: Частичное натяжение элемента «на землю».

Оно может быть реализовано по схеме рис. 8.19, либо по схеме рис. 8.20. Эпюры продольных сил в состоянии преднапряжения показаны на рис. 8.19, *b* и рис. 8.20, *b* соответственно.

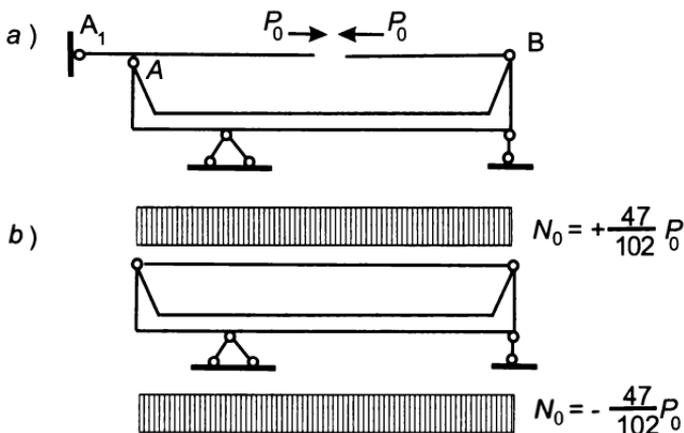


Рис. 8.19. Частичное натяжение «на землю» (вариант С-1)

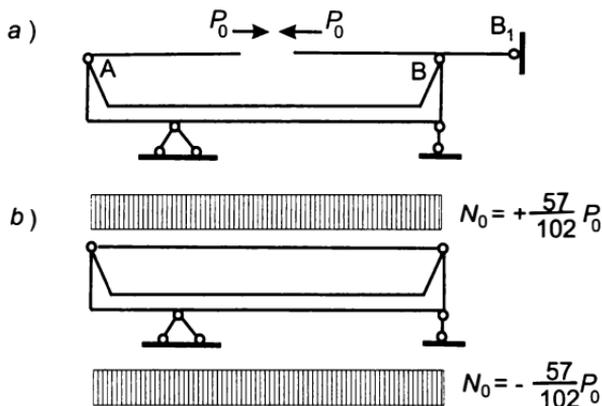


Рис. 8.20. Частичное натяжение «на землю» (вариант С-2)

Сопоставляя результаты выполненных расчетов, можно увидеть, что при одинаковой величине активного усилия  $P_0 = 2$  установившееся в системе напряженное состояние существенно меняется в зависимости от принятой схемы создания преднапряжения, принимая значения из диапазона  $1/51 \dots 2,0$ , причем только в случае натяжения «на систему»  $N_0 = P_0$ . Этот результат не случаен, поскольку натяжение «на систему» можно рассматривать как физическую реализацию известного в механике принципа освобождения от связей (любую связь можно отбросить, не нарушая равновесия, если заменить ее действие на систему реакцией этой связи), правда, применяемого в обратном порядке.

## 8.4. Конструкции с гидравлическими домкратами

При монтаже тяжелых конструкций нередко используют систему гидродомкратов, поскольку гидродомкраты являются идеальным механическим устройством, позволяющим выравнять усилия, передающиеся на узлы опирания. Именно поэтому целесообразно рассмотреть особенности расчетов конструкций, опирающихся на систему гидродомкратов, в разделе, соседствующем с иными расчетными задачами монтажных состояний конструкций. Хотя надо сказать, что постановка и решение задачи расчета конструкций, опирающихся на гидродомкраты, имеет более широкое применение. Отметим здесь, что такие задачи возникают также при расчете судоподъемников и некоторых типов крановых механизмов.

Отрываясь от непосредственных проблем строительства, упомянем также некоторые задачи геомеханики и биомеханики, сводящиеся к

расчету тел с полостями, заполненными сжимаемой или идеальной несжимаемой жидкостью (например, задача об определении напряженного состояния глазного яблока). Дискретизация непрерывной задачи об определении напряженного состояния двумерного или трехмерного тела с полостью, заполненной жидкостью, приводит к тем же самым уравнениям, которые используются в постановке задачи о расчете конструкций, опирающихся на систему гидродомкратов.

Итак, пусть упругая конструкция опирается на гидродомкраты, объединенные в несколько независимых групп (рис. 8.21).

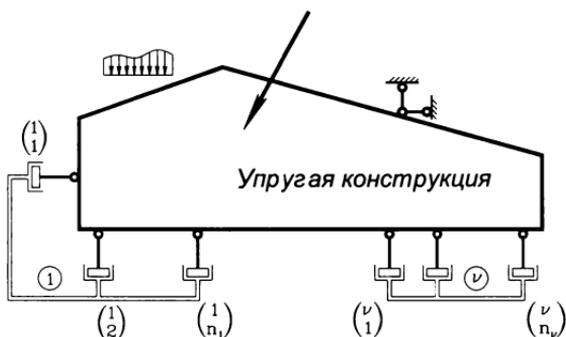


Рис. 8.21. Опирание упругой конструкции на систему гидродомкратов

Пусть количество групп гидродомкратов равно  $v$ , а число домкратов в некоторой группе с номером  $\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, v$ ) равно  $n_\alpha$ . Пронумеруем домкраты внутри каждой группы, сопоставив каждому из домкратов индексную пару  $(\alpha, i)$  так, что первый индекс указывает на номер группы, а второй индекс — на номер домкрата внутри группы. На рис. 8.21 для удобства восприятия индексная пара дана в вертикальном расположении, причем первый индекс (номер группы) показан сверху, а нижний индекс (номер домкрата внутри группы) показан снизу. Для упрощения запоминания системы индексов примем также соглашение об использовании греческого алфавита для индексации групп домкратов, и латинского алфавита — для индексации домкратов внутри группы.

Примем следующую систему обозначений:

- $x_{\alpha, i}$  — усилие в домкрате  $(\alpha, i)$ , которое будем считать положительным при сжатии поршня;
- $Z_{\alpha, i}$  — перемещение точки конструкции, жестко связанной с домкратом  $(\alpha, i)$ , по направлению движения поршня (положительное при увеличении объема жидкости в гидродоцилиндре);

- $F_{\alpha,i}$  – площадь поршня гидродомкрата ( $\alpha,i$ );
- $p_\alpha$  – давление жидкости в группе гидродомкратов  $\alpha$ .

Усилие  $x_{\alpha,i}$  в каждом из гидродомкратов группы  $\alpha$  пропорционально площади поршня  $F_{\alpha,i}$

$$x_{\alpha,i} = p_\alpha F_{\alpha,i}. \quad (8.14)$$

Из условия равенства давлений жидкости  $p_\alpha$  в каждом из домкратов, принадлежащих одной группе, получаем

$$c_{\alpha,1} x_{\alpha,1} = c_{\alpha,2} x_{\alpha,2} = \dots = c_{\alpha,n_\alpha} x_{\alpha,n_\alpha}, \quad c_{\alpha,i} = F_{\alpha,0} / F_{\alpha,i}, \quad (8.15)$$

где  $F_{\alpha,0}$  — некоторая константа, имеющая размерность площади.

Из условия сохранения общего объема жидкости в каждой из групп домкратов следует связь между перемещениями каждого из домкратов одной группы

$$f_{\alpha,1} z_{\alpha,1} + f_{\alpha,2} z_{\alpha,2} + \dots + f_{\alpha,n_\alpha} z_{\alpha,n_\alpha} = \Delta_\alpha, \quad f_{\alpha,i} = F_{\alpha,i} / F_{\alpha,0}, \quad (8.16)$$

где  $\Delta_\alpha$  — заданная величина, определяемая объемом жидкости, дополнительно нагнетаемой в гидросистему  $\alpha$ -ой группы домкратов.

Для расчета рассматриваемых систем иногда удается применить модель, основанную на использовании свойств рычажного механизма. Например, группу из 8 домкратов, можно представить с помощью рычажной модели так, как это показано на рис. 8.22, причем соотношения между плечами рычагов подбираются так, чтобы выполнялись условия (8.15). При большом числе домкратов рычажная модель содержит много дополнительных элементов и звеньев.

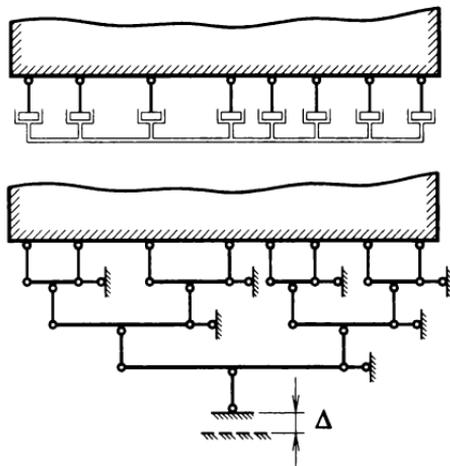


Рис. 8.22. Рычажная модель для гидросистемы из 8 домкратов

Заметим, что рычажный механизм состоит из абсолютно жестких элементов и, если воспользоваться для их описания нуль-податливыми элементами, то количество узлов и элементов будет еще больше. Кроме того, в некоторых ситуациях направления движения поршней домкратов одной группы не параллельны друг другу (например, в первой группе домкратов на рис. 8.21). В этом случае построение рычажной модели вообще затруднено.

Указанные обстоятельства порождают целесообразность разработки специальных приемов, ориентированных на расчет конструкций, подпадающих под рассматриваемый класс систем.

Рассмотрим сначала задачу в следующих предположениях:

- (I) основная система метода сил, образованная из заданной системы удалением всех домкратов, геометрически неизменяема;
- (II) жидкость в гидросистеме несжимаема.

Поскольку усилия во всех домкратах одной группы связаны соотношениями (8.15), то можно рассматривать совокупность  $n_\alpha$  сил  $x_{\alpha,i}$  как одну обобщенную силу, определяемую величиной

$$X_\alpha = c_{\alpha,i} x_{\alpha,i} \quad (i = 1, \dots, n_\alpha). \quad (8.17)$$

Пусть  $g_{\alpha\beta,ij}$  — перемещение в основной системе по направлению движения поршня домкрата  $(\alpha,i)$  от действия силы  $x_{\beta,j} = 1$ .

Матрицу податливости основной системы метода сил, отвечающую обобщенным силам  $X_\alpha$ , обозначим  $[[g_{\alpha\beta}]]$ . Поскольку  $g_{\alpha\beta}$  представляет собой возможную работу, совершаемую совокупностью сил  $c_{\alpha,1}x_{\alpha,1} = 1, \dots, c_{\alpha,n_\alpha}x_{\alpha,n_\alpha} = 1$  на соответствующих этим силам перемещениях, вызванных одновременно приложенными к основной системе силами  $c_{\beta,1}x_{\beta,1} = 1, \dots, c_{\beta,n_\beta}x_{\beta,n_\beta} = 1$ , то

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \sum_{j=1}^{n_\beta} g_{\alpha\beta,ij} f_{\alpha,i} f_{\beta,j}. \quad (8.18)$$

Пусть  $\Delta_{\alpha,ip}$  — перемещение в основной системе от внешней нагрузки. Тогда грузовое перемещение  $\Delta_{\alpha p}$ , отвечающее обобщенной силе  $X_\alpha$ , определится по формуле

$$\Delta_{\alpha p} = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \Delta_{\alpha,ip} f_{\alpha,i}. \quad (8.19)$$

Дополнительную работу в системе (функционал Кастильяно К) представим в виде квадратичной формы от обобщенных сил  $X_\alpha$ . Имеем

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} g_{\alpha\beta} X_{\alpha} X_{\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Delta_{\alpha p} X_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Delta_{\alpha} X_{\alpha}. \quad (8.20)$$

Последняя сумма в (8.20) представляет собой работу, совершаемую силами  $x_{\alpha,i}$  на перемещениях поршней домкратов. Действительно,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} x_{\alpha,i} z_{\alpha,i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} c_{\alpha,i} x_{\alpha,i} f_{\alpha,i} z_{\alpha,i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} X_{\alpha} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} f_{\alpha,i} z_{\alpha,i} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Delta_{\alpha} X_{\alpha}. \quad (8.21)$$

Условия стационарности функционала  $K$  приводят к каноническим уравнениям метода сил

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} g_{\alpha\beta} X_{\beta} + \Delta_{\alpha p} - \Delta_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \nu). \quad (8.22)$$

Покажем теперь, что для перемещений  $z_{\alpha,i}$ , вычисленных по удовлетворяющим системе уравнений (8.22) усилиям  $X_{\alpha}$ , выполняется условие баланса жидкости (8.16). Действительно,

$$z_{\alpha,i} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\beta}} g_{\alpha\beta,ij} x_{\beta,j} + \Delta_{\alpha,ip} \quad (8.23)$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} f_{\alpha,i} z_{\alpha,i} &= \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\beta}} g_{\alpha\beta,ij} f_{\alpha,i} f_{\beta,j} X_{\beta} + \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \Delta_{\alpha,ip} f_{\alpha,i} = \\ &= \sum_{\beta=1}^{\nu} g_{\alpha\beta} X_{\beta} + \Delta_{\alpha p} = \Delta_{\alpha}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Освободимся теперь от ограничивающего предположения (I). Если в результате удаления всех домкратов получается геометрически изменяемая система, имеющая, скажем,  $\mu$  степеней свободы как жесткого тела, то основную систему образуем после дополнительного введения  $\mu$  связей, восстанавливающих геометрическую неизменяемость. В этом случае приходим к задаче на условный экстремум функционала  $K$  при дополнительных условиях вида

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} a_{\gamma\beta} X_{\beta} + a_{\gamma p} = 0 \quad (\gamma = 1, \dots, \mu), \quad (8.25)$$

представляющих собой требование нулевых усилий в дополнительно введенных связях, устраняющих геометрическую изменяемость основной системы. Здесь  $a_{\gamma\beta}$  и  $a_{\gamma p}$  — усилия в  $\gamma$ -ой дополнительной связи от единичной обобщенной силы  $X_{\beta} = 1$  и внешней нагрузки соответственно.

Метод множителей Лагранжа приводит вместо системы (8.22) к следующим уравнениям

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} g_{\alpha\beta} X_{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{\mu} a_{\gamma\alpha} \lambda_{\gamma} + \Delta_{\alpha p} - \Delta_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \nu), \quad (8.26)$$

которые следует рассматривать совместно с (8.25) как единую систему линейных алгебраических уравнений порядка  $(\nu + \mu)$ .

Лагранжевы множители  $\lambda_{\gamma}$  представляют собой перемещения в заданной системе по направлению введенных дополнительных связей.

Величина  $\Delta_{\alpha}$ , фигурирующая выше, определяется из условия сохранения объема жидкости

$$\sum_{i=1}^{n_{\alpha}} F_{\alpha,i} z_{\alpha,i} = V_{\alpha} = F_{\alpha,0} \Delta_{\alpha}, \quad (8.27)$$

где  $V_{\alpha}$  — объем жидкости, дополнительно нагнетаемой в гидросистему  $\alpha$ -ой группы домкратов. Отсюда следует, что

$$\Delta_{\alpha} = V_{\alpha} / F_{\alpha,0}. \quad (8.28)$$

Если требуется учесть сжимаемость жидкости и тем самым снять ограничение (II), то следует исходить из зависимости

$$x_{\alpha,i} = E F_{\alpha,i} \frac{V_{\alpha} - \sum_{j=1}^{n_{\alpha}} F_{\alpha,j} z_{\alpha,j}}{V_{\alpha,0}}, \quad (8.29)$$

где  $V_{\alpha,0}$  — первоначальный объем жидкости в гидросистеме  $\alpha$ -ой группы домкратов,  $E$  — упругий модуль объемного сжатия жидкости. Из последнего соотношения с учетом (8.16) и (8.17) получим

$$\Delta_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{F_{\alpha,0}} - \frac{V_{\alpha,0}}{F_{\alpha,0}} \frac{X_{\alpha}}{E F_{\alpha,0}} \quad (8.30)$$

Подстановка (8.30) в (8.26) приводит к следующей системе разрешающих уравнений задачи

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} (g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) X_{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{\mu} a_{\gamma\alpha} \lambda_{\gamma} + \Delta_{\alpha p} - \Delta_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, \nu),$$

$$\sum_{\beta=1}^{\nu} a_{\gamma\beta} X_{\beta} + a_{\gamma p} = 0 \quad (\gamma = 1, \dots, \mu), \quad (8.31)$$

где

$$h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{V_{\alpha,0}}{F_{\alpha,0} E F_{\alpha,0}}, \quad (8.32)$$

при этом  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, а величина  $\Delta_\alpha$  определяется формулой (8.28).

Мы не будем рассматривать здесь поясняющий пример расчета, отсылая читателя к нашей статье [Перельмутер, Сливкер, 1979], где такой пример приведен.

### 8.4.1. Жидкостный конечный элемент

Рассмотренный выше способ расчета упругой системы, опирающейся на гидродомкраты, основан на применении метода сил, что не всегда просто вписывается в расчетные компьютерные программы, поскольку большинство из них базируется на применении метода перемещений.

Покажем, как можно построить разрешающие уравнения метода перемещений, учитывающие работу гидродомкратов. Для этого будем рассматривать группу домкратов в качестве своеобразного конечного элемента, который мы назовем *жидкостным конечным элементом*.

Полная потенциальная энергия  $L$ , накапливаемая при деформации сжимаемой жидкости для  $\alpha$ -ой группы гидродомкратов, давление в которой равно  $p_\alpha$ , может быть представлена в виде

$$L = \frac{1}{2} \int p_\alpha \varepsilon_\alpha dV. \quad (8.33)$$

Здесь  $\varepsilon_\alpha$  — относительное изменение объема, а интегрирование распространяется на весь объем  $V$  жидкости в  $\alpha$ -ой гидросистеме.

Если учесть, что

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n_\alpha} F_{\alpha,j} z_{\alpha,j} - F_{\alpha,0} \Delta_\alpha}{V_{\alpha 0}}, \quad (8.34)$$

а давление связано с  $\varepsilon_\alpha$  законом упругости

$$p_\alpha = E \varepsilon_\alpha, \quad (8.35)$$

то подстановка (8.34) и (8.35) в (8.33) определяет  $L$  как квадратичную функцию от перемещений поршней домкратов (с точностью до независящей от  $z_{\alpha,i}$  константы), то есть, как функционал Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} E \frac{\sum_{i=1}^{n_\alpha} \sum_{j=1}^{n_\alpha} F_{\alpha,i} F_{\alpha,j} z_{\alpha,i} z_{\alpha,j} - 2F_{\alpha,0} \Delta_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} F_{\alpha,i} z_{\alpha,i}}{V_{\alpha 0}}, \quad (8.36)$$

и искомые компоненты матрицы жесткости жидкостного конечного элемента могут быть получены как вторые частные производные

$$k_{\alpha,ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial z_{\alpha,i} \partial z_{\alpha,j}} = \frac{E}{V_{\alpha 0}} F_{\alpha,i} F_{\alpha,j} \quad (i = 1, \dots, n_{\alpha}). \quad (8.37)$$

Элементы грузового вектора, относящиеся к воздействию заданного перемещения  $\Delta_{\alpha}$ , также нетрудно найти

$$k_{\alpha,ip} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \Delta_{\alpha} \partial z_{\alpha,i}} = \frac{E}{V_{\alpha 0}} F_{\alpha,i} F_{\alpha,o} \quad (i = 1, \dots, n_{\alpha}). \quad (8.38)$$

Формулами (8.37) и (8.38) определяются все необходимые жесткостные характеристики жидкостного конечного элемента, обладающего  $n_{\alpha}$  степенями свободы.

Подчеркнем, что приведенные выше формулы определяют компоненты матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{\alpha} = [[k_{\alpha,ij}]]$  ( $i, j = 1, \dots, n_{\alpha}$ ) и грузового вектора  $\mathbf{p}_{\alpha} = [[k_{\alpha,ip}]]$  для узловых перемещений жидкостного конечного элемента, отвечающего  $\alpha$ -ой группе гидродомкратов, направленных вдоль движения поршней домкратов. В направлении, перпендикулярном движению поршней жидкостный конечный элемент не сопротивляется. Это обстоятельство нужно иметь в виду при формировании общей матрицы жесткости системы  $\mathbf{K}$  и вектора узловых нагрузок  $\mathbf{p}$ , что, возможно, потребует предварительного координатного преобразования  $\mathbf{K}_{\alpha}$  и  $\mathbf{p}_{\alpha}$ , если направления движения поршней не совпадут с осями локальных (для узлов) систем координат. На деталях этой процедуры не останавливаемся, так как она принципиально не отличается от стандартных способов координатных преобразований матриц жесткости конечных элементов.

В заключение отметим, что метод перемещений вырождается при  $E \rightarrow \infty$  (несжимаемая жидкость), тогда как уравнения метода сил не работают при  $E \rightarrow 0$  (газовая подушка, применяемая в пневмоконструкциях).

## 8.5. Модель «здание - основание»

### 8.5.1. Учет распределительной способности грунта

При расчете конструкций на упругом основании возникают проблемы учета распределительных свойств основания, которые игнорируются в простейшем случае винклерова основания (клавишная модель). Большинство реальных грунтов обладает распределительной

способностью, когда, в отличие от винклеровой расчетной схемы, в работу вовлекаются не только непосредственно нагруженные части основания, но и примыкающие к ним области ненагруженного грунта. Следовательно, для учета распределительной способности основания необходимо, во-первых, использовать модели основания, отличные от винклеровой и, во-вторых, ввести в расчетную схему те части основания, которые расположены за пределами фундаментной конструкции. Последнее необходимо потому, что работа усилий взаимодействия между конструкцией и упругим основанием уходит на накопление потенциальной энергии, запасаемой упругим основанием как в пределах площадки, занимаемой конструкцией, так и за ее пределами.

Недостатки винклеровой механической модели основания, в принципе неспособной адекватно отразить реальную картину взаимодействия между конструкцией и подстилающим ее грунтом, хорошо известны проектировщикам. Главное ее достоинство — это предельная математическая простота. Вот почему, несмотря на очевидные и неизлечимые пороки, винклерова модель по-прежнему и популярна, и продолжает применяться. Спросите любого сколь-нибудь грамотного инженера о том, почему он удовлетворяется расчетом с использованием такой несовершенной и далекой от «правды жизни» модели, и весь спектр ответов от оправдательных до смущенно-извинительных на самом деле в основе содержит один мотив: так много проще для самих расчетов<sup>2</sup>.

В общем случае усилие взаимодействия  $r$  между конструкцией и подстилающим ее упругим основанием связано с перемещением  $w$  дневной поверхности упругого основания интегральной зависимостью (рассматривается двумерный случай)

$$w(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)r(\xi,\eta)d\Omega, \quad (8.39)$$

где  $G(x,y,\xi,\eta)$  — так называемое ядро упругого основания, представляющее собой функцию влияния, а именно — перемещение точки  $P(x,y)$  дневной поверхности упругого основания от единичной силы, приложенной в точке  $Q(\xi,\eta)$  по направлению нормали к этой поверхности. В (8.39) интегрирование ведется по двумерной области  $\Omega$ , в которой функция  $r$  отлична от нуля<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Как это смахивает на старый анекдот о подвыпившем мужчине, ползающим на ночной улице под фонарем в поисках потерянного кошелька. А на вопрос об уверенности, что кошелек находится в окрестности фонарного столба, этот человек отвечает, что потерял свой кошель в другом месте, но ищет его там, где светлее.

<sup>3</sup> Функцию  $r$  иногда называют *отпором* упругого основания.

Наиболее разработанными являются модели упругого основания, у которых осадочная лунка дневной поверхности грунта от действия единичной силы является поверхностью вращения, то есть ядро фактически является функцией расстояния  $\rho$  от точки  $Q(\xi, \eta)$  приложения силы до точки  $P(x, y)$  замера перемещения

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(\rho), \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2. \quad (8.40)$$

Натурные исследования показывают [10], что модель Винклера лучше отображает действительность в случаях илистых, торфяных грунтов и мелкозернистых водонасыщенных песков. Для винклерова основания ядро  $G$  представляет собой дельта-функцию Дирака

$$G(\rho) = \delta(\rho)/k, \quad (8.41)$$

где  $k$  — так называемый *коэффициент постели* упругого основания.

При связанных грунтах применение модели Винклера становится совершенно необоснованным и искажающим реальную работу конструкции на упругом основании. Модель в виде упругого полупространства (Г.Э. Проктор, Н.М. Герсеванов, Б.Н. Жемочкин, М.И. Горбунов-Посадов и другие) представляет основание как изотропное упругое тело бесконечных размеров в плане и по глубине. Известное из теории упругости решение задачи Буссинеска позволяет записать ядро упругого полупространства в виде

$$G(\rho) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E \rho}, \quad (8.42)$$

где  $\nu$  и  $E$  — соответственно коэффициент поперечной деформации и модуль упругости грунта. По сравнению с винклеровой моделью упругое полупространство, напротив, завышает распределительные способности грунта, что неоднократно было показано в эксперименте [Горбунов-Посадов и др., 1984].

Понижения распределительной способности упругого основания можно достичь, если глубину сжимаемой грунтовой толщи считать не бесконечной, а ограниченной некоторой величиной  $H$ . Ядро при этом окажется функцией не только расстояния  $\rho$ , но будет зависеть от  $H$ , как от параметра. В этом случае приходим к модели основания как упругого слоя конечной толщины. Ядро упругого слоя конечной толщины представляет собой сложную функцию, зависящую, к тому же, и от краевых условий, которые ставятся на *ночной поверхности* упругого основания<sup>4</sup>. Если рассматривать слой конечной толщины и

<sup>4</sup> Среди «грунтовок» принято называть *дневной поверхностью* упругого основания внешнюю (наружную) поверхность грунта, на которой и располагается

лежащую на нем конструкцию в рамках единой расчетной схемы, то можно воспользоваться методом конечных элементов. Однако, за счет увеличения размерности задачи на единицу (двумерная задача расчета изгибаемой плиты, лежащей на слое, становится трехмерной) объем вычислительной работы вырастает на порядок — вспомним известное изречение о «*проклятии размерности*».

### 8.5.2. Модель основания с двумя коэффициентами постели

На сегодняшний день известны десятки предложений по совершенствованию механической модели грунтового основания, но, по-видимому, следующим по простоте математической постановки задачи после винклеровой модели шагом явилась разработка модели упругого основания с двумя коэффициентами постели, независимо и исходя из совершенно разных предпосылок, предложенная Пастернаком [1954], Филоненко-Бородичем [1945], Власовым и Леонтьевым [1960]. Модель основания с двумя коэффициентами постели, с одной стороны, устраняет главный порок модели Винклера (позволяет учитывать распределительную способность грунта), а с другой стороны — почти не усложняет математическую постановку задачи по сравнению с моделью Винклера.

Для основания с двумя коэффициентами постели ядро определяется модифицированной функцией Бесселя второго рода нулевого порядка (иногда называемой функцией Макдональда)  $K_0$  [11], а именно

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi C_2} K_0(\rho\sqrt{C_1/C_2}), \quad (8.43)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — первый и второй коэффициенты постели упругого основания, причем первый характеризует жесткость основания на сжатие, тогда как второй — на сдвиг.

Для модели упругого основания с двумя коэффициентами постели интегральное соотношение (8.39) может быть обращено, при этом связь между  $w$  и  $r$  принимает форму простой дифференциальной зависимости

$$r = -C_2 \nabla^2 w + C_1 w, \quad (8.44)$$

---

вышележащая конструкция. Но тогда для нижней, не испытывающей перемещений, поверхности грунтового основания напрашивается симметричный термин *ночная поверхность*. Такое название навеяно ассоциацией с вечной темнотой в глубинных слоях грунтового основания.

где  $\nabla^2$  — оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и именно в простоте дифференциальной зависимости (8.44) и заключается математическая, а значит и вычислительная привлекательность этой модели.

Двухпараметровая модель, в отличие от винклеровой модели, дает возможность предсказать изгиб плиты при равномерном нагружении, а также осадки поверхности упругого основания за пределами плана конструкции.

Предположив, что на двухпараметровом основании покоится изгибаемая плита со свободными от внешних связей кромками, получим, что двухпараметровая модель порождает так называемые фиктивные поперечные силы, возникающие на свободных от закреплений краях плиты. Именно это обстоятельство послужило поводом для неоднократных атак на двухпараметровую модель со стороны приверженцев иных моделей (таких, как упругое полупространство или слой конечной толщины), расценивающих этот факт как математический парадокс, искажающий, в угоду математике, физическую сторону явления.

На самом деле, несложно показать, что здесь нет никакого дополнительного математического парадокса. Возьмем, к примеру, упругое полупространство или слой конечной толщины. Если получить аккуратное решение для плиты, покоящейся на таком основании, то под краями плиты контактное напряжение (отпор упругого основания  $r$ ) будет иметь особенность — точечное значение отпора равно бесконечности. Приведем для иллюстрации выражение для отпора  $r$ , развивающегося под подошвой круглого штампа радиуса  $R$ , вдавливаемого силой  $P$  в упругое полупространство [Власов, Леонтьев, 1960], стр. 218

$$r(\rho) = \frac{P}{2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2}}, \quad (8.45)$$

где  $\rho \leq R$  — текущая радиальная координата точки штампа, под которой вычисляется отпор  $r$ .

Порядок особенности зависит от используемой модели, и все, чем отличается в этом смысле двухпараметровая модель, это то, что для нее эта особенность принимает вид дельта-функции Дирака, являющейся математическим представлением сосредоточенной силы. Но если уж не смущает бесконечное значение функции отпора на

краю плиты, то в равной мере не должна смущать и сосредоточенная сила в составе этой же функции и проявляющаяся в том же месте!

Симптоматичным является и возврат интереса к двухпараметровой модели упругого основания со стороны специалистов по проблемам механики грунтов [Манвелов, Бартошевич, 1961]. Сама модель получила дальнейшее развитие, появились работы, описывающие дискретный аналог двухпараметровой модели упругого основания [Тельфандейн, Шелест, 1974]. Такая дискретная двухпараметровая модель показана на рис. 8.23, где для простоты изображения приведена одномерная задача. В этой модели z-образные абсолютно жесткие элементы соединены с землей совокупностью пружин, являющихся дискретным аналогом коэффициента  $C_1$  (характеризующего жесткость основания на сжатие), тогда как тружины, расположенные между соседними z-образными элементами служат дискретным аналогом коэффициента  $C_2$  (характеризующего жесткость основания на сдвиг).

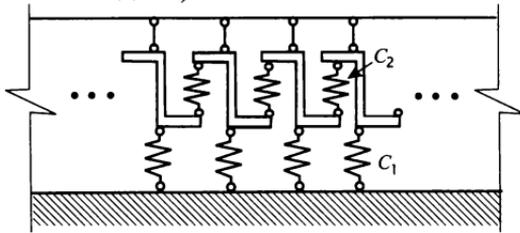


Рис. 8.23. Дискретный аналог двухпараметровой модели

Несомненным вычислительным достоинством двухпараметровой модели является то обстоятельство, что эта модель органично записывается в стандартную процедуру метода конечных элементов, не добавляя каких-либо новых степеней свободы в расчетную схему объединенной с основанием конструкции. Все, что нужно для этого сделать, это откорректировать выражения для компонент матриц жесткости конечных элементов изгибаемой плиты, покоящейся на упругом основании. При этом такая корректировка легко осуществляется как для теории изгиба тонких плит, так и для плит средней толщины [Елсукова, Сливкер, 1976].

Для того, чтобы наметить общий подход процедуры метода конечных элементов применительно к задачам расчета конструкций, покоящихся на упругом двухпараметровом основании, обратимся к выражению для полной потенциальной энергии системы «конструкция + основание»

$$L = E_k + E_0 - \Pi, \quad (8.46)$$

где  $E_k$  — энергия, накапливаемая при деформации самой конструкции,  $E_0$  — энергия, запасаемая в упругом основании,  $\Pi$  — работа внешних сил.

Из (8.46) видно, что учет работы упругого основания в составе объединенной системы определяется выражением для  $E_0$ .

Для двухпараметровой модели упругого основания выражение для энергии  $E_0$  несложно получить формальным способом, восстановив функционал, для которого дифференциальное уравнение (8.44) является уравнением Эйлера. Однако, имея в виду интересы потенциального читателя книги, который скорее механик, чем математик, получим выражение для энергии  $E_0$  на основе рассуждений механического характера. С этой целью удобно обратиться к трактовке двухпараметровой модели, предложенной Филоненко-Бородичем [1945].

Согласно Филоненко-Бородичу двухпараметровая модель упругого основания для одномерного случая представляет собой неограниченную в обе стороны нерастяжимую нить, натянутую силой  $C_2$  и соединяющую верхние концы непрерывно расположенных пружин с распределенной жесткостью  $C_1$  — так называемая *ламинарная модель*. В двумерном случае ламинарная модель замещается *мембранной моделью*, в которой роль нерастяжимой нити отводится нерастяжимой мембране с натяжением  $C_2$ . Можно мысленно вообразить, что натяжение нити  $C_2$  осуществляется с помощью механического устройства, по которому нить с одного конца закреплена от перемещений, а с другого конца — перекинута через неподвижный блок и удерживает груз веса  $C_2$ , создающий необходимое натяжение нити — рис. 8.24.

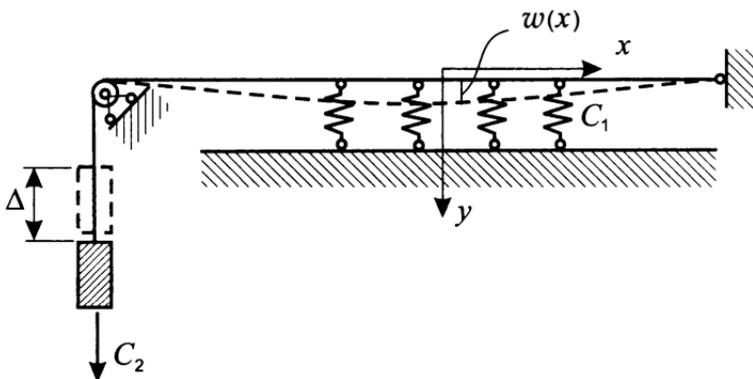


Рис. 8.24. К определению энергии деформации упругого основания

При осадке поверхности упругого основания  $w(x)$  энергия  $E_0$  складывается из двух составляющих

$$E_0 = E_{01} + E_{02}, \quad (8.47)$$

где  $E_{01}$  — энергия осаждаемых пружин,  $E_{02}$  — потенциальная энергия, запасаемая подвешенным грузом, поднимающимся на некоторую высоту  $\Delta$ . Несложно подсчитать и величину каждой из этих составляющих. В результате имеем

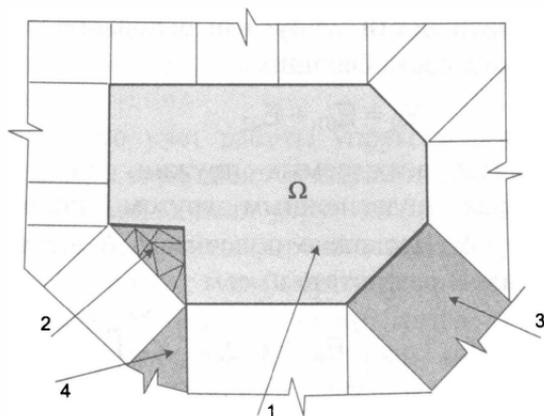
$$E_{01} = \frac{1}{2} C_1 \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx, \quad E_{02} = C_2 \Delta = \frac{1}{2} C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (8.48)$$

Обобщая полученные выражения для энергии  $E_0$  на двумерный случай, с учетом возможного изменения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в плане получаем

$$E_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_1 w^2 + C_2 (w_{,x}^2 + w_{,y}^2)] d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} [C_1 w^2 + C_2 (w_{,x}^2 + w_{,y}^2)] d\Omega. \quad (8.49)$$

Здесь  $\Omega$  — двумерная область в плоскости  $(X, Y)$ , по которой конструкция соприкасается с упругим основанием (считается, что конструкция соприкасается с упругим основанием посредством изгибаемой фундаментной плиты);  $\Omega_e$  — область плоскости  $(X, Y)$ , внешняя к области  $\Omega$ , то есть дополнение области  $\Omega$  до всей плоскости. Символом  $w$  обозначено перемещение фундаментной плиты конструкции, нормальное к поверхности упругого основания, а нижними индексами после запятой обозначены частные производные по соответствующим координатам. Первый интеграл в (8.49) служит основой для корректировки матрицы жесткости конечных элементов фундаментной плиты, тогда как интеграл по области  $\Omega_e$  в (8.49) учитывает работу основания за пределами плана плиты.

Учет части основания, расположенного во внешней области  $\Omega_e$ , может выполняться с использованием «полубесконечных конечных элементов» типа *клина* или *полосы*, предложенных в работе [Елсукова, Сливкер, 1976]. Эти своеобразные полубесконечные конечные элементы реализованы, например, в программном комплексе **SCAD**. Такие элементы позволяют смоделировать все окружение области  $\Omega$ , если она является выпуклой и многоугольной (рис. 8.25).



**Рис. 8.25.** Расположение законтурных конечных элементов типа клина и полосы: 1 — плита; 2 — дополнение области  $\Omega$  до выпуклой; 3 — элемент-полоса; 4 — элемент-клин

Следует четко представлять себе, что эти конечные элементы способны лишь приближенно описывать поведение упругого основания за пределами плана плиты. Изменение вертикальных перемещений дневной поверхности упругого основания в направлении нормали к границе плиты для этих элементов характеризуется экспоненциальным законом, что правильно отражает асимптотику на бесконечности, но не более того. Далее, сокращение размеров сеточного разбиения только в пределах плана плиты при прочих равных условиях приводит лишь к изменению одного из размеров (а именно, ширины) полубесконечных элементов типа полосы. Поэтому при такой стратегии использования последовательности вложенных сеточных разбиений речь может идти о сходимости не к точному решению задачи, а к решению близкой задачи, отличающейся от исходной за счет некоторого искажения работы упругого основания во внешней к  $\Omega$  области.

Конечно, в резерве у инженера всегда остается возможность снизить влияние этого искажения, окружив извне область  $\Omega$  двумя-тремя (или несколькими) дополнительными рядами обычных конечных элементов с нулевой жесткостью плиты, однако на практике расчетчики редко пользуются этой возможностью. Здесь важно, чтобы расчетчик в принципе понимал существование и происхождение искажающего влияния полубесконечных элементов, а значит, и подходил к решению задачи не формально, а осознанно. Что же касается программного обеспечения, то оно способно оказать реальную помощь инженеру в проведении соответствующих оценок хотя бы в среднем (на энергетическом уровне), если используемая

программа обладает возможностью подсчета энергии деформации как всей системы, так и любой ее выделенной части<sup>5</sup>.

Стоит также отметить, что применение полубесконечных элементов не является единственным возможным способом учета вклада законтурного упругого основания в работу всей конструкции. Например, для решения возникающей проблемы Г.С. Колосовой [1985] был использован прием дополнения области  $\Omega$  до круговой области  $\Omega_1$ , охватывающей  $\Omega$ ,  $\Omega \subseteq \Omega_1$ . Внутри  $\Omega_1$  решение строится по обычной схеме МКЭ, во внешней к  $\Omega_1$  области — аналитически, разложением в тригонометрический ряд по контурной координате с последующей сшивкой этих двух решений. Несмотря на теоретическую привлекательность такого способа расчета, он, насколько это известно авторам, не реализован в какой-либо из программ промышленного применения.

Возвращаясь к полубесконечным элементам, заметим, что многоугольность области практически всегда обеспечивается с той или иной степенью точности. Если же область  $\Omega$  является невыпуклой или неодносвязной, то она должна быть дополнена до выпуклой односвязной области конечными элементами ограниченных размеров. При этом в дополняемых частях толщина плиты принимается равной нулю.

Использование только имеющихся конечных элементов на упругом основании (стержней, плит, оболочек) и специальных законтурных элементов не позволяет создать произвольную расчетную схему конструкции на упругом основании. В частности, могут возникнуть сложности, например, при попытке построить расчетную модель плотины, работающей в условиях плоской деформации, если используемый расчетный комплекс (например, **SCAD**) не имеет элементов типа балки-стенки на упругом основании.

Проблема решается очень просто путем включения между контуром плотины и грунтом элементов стержневого типа на упругом основании. При этом жесткость такого стержня может быть задана нулевой. Аналогично можно «подстелить» плиту с нулевой жесткостью на упругом основании под массивную часть расчетной модели. Этот же прием внесения в расчетную схему элементов плиты нулевой жесткости применяется при необходимости учета взаимного влияния двух раздельно (но достаточно близко) расположенных конструкций на

<sup>5</sup> Обращаем внимание разработчиков программного обеспечения на это обстоятельство как на еще один аргумент в пользу оснащения коммерческой разработки специальной функцией — способностью подсчета энергии деформации системы и ее отдельных частей.

упругом основании. В этом случае область между двумя пространственно разделенными конструкциями заполняется фиктивными элементами плиты нулевой изгибной жесткости, а совместная работа конструкций обеспечивается только упругим основанием.

### 8.5.3. Упругие характеристики основания <sup>6</sup>

Грунтовое основание сооружений по-разному работает на значительные длительные нагрузки, связанные с уровнем напряжений, превышающих структурную прочность на сжатие, и на кратковременные нагрузки относительно небольшой интенсивности. По сути, первый вариант работы основания связан с периодом возведения сооружения и его первоначального нагружения, когда происходит активная осадка сооружения вследствие необратимых деформаций основания, а второй — с периодом нормальной эксплуатации сооружения. Каждой из указанных стадий соответствуют свои обобщенные упругие характеристики естественных или искусственных оснований.

Обычно проектировщики испытывают определенные затруднения при назначении этих характеристик, особенно для неоднородных слоистых оснований, т.к. получение соответствующих экспериментальных данных требует проведения специальных натурных испытаний, а накопленные из опыта проектирования табличные данные далеко не адекватны реальным условиям. Отметим, что СНиП 2.02.01–83\* «Основания зданий и сооружений» дает определенный набор нормативных значений прочностных и деформационных характеристик грунтов, в том числе модули деформации (Приложение 1 к этому документу). Пункт 2.10 этих норм допускает возможность применения других параметров, характеризующих взаимодействие фундаментов с грунтом основания и устанавливаемых опытным путем, в том числе коэффициенты жесткости основания.

Характеристики упругого основания (модуль деформации), которые выбираются при комплексном расчете здания совместно с основанием, обычно определяются по некоторой усредненной упругой характеристике, представляющей результаты штамповых испытаний по ГОСТ 12374–77. При этом спрямляющая характеристика получается методом наименьших квадратов при

<sup>6</sup> В этом пункте, который можно рассматривать как комментарии к некоторым разделам нормативных документов, действующих на момент написания книги в России и других странах СНГ: СНиП 2.02.01–83\* — «Основания зданий и сооружений», мы следуем рекомендациям В.Г. Федоровского и С.Г. Безволева [2000].

обработке данных в диапазоне значений от бытового давления  $\sigma_g$  до 80% предельного значения [Горбунов-Посадов и др., 1984].

Возможно расчетное определение упругих характеристик многослойного основания, в соответствии с которым при сжимаемой толще основания  $h$  осадки  $w$  вычисляются с использованием формулы послойного суммирования

$$w(x, y) = \int_0^h \varepsilon_z dz, \quad (8.50)$$

где деформация  $\varepsilon_z$  определяется как

$$\varepsilon_z = \beta \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_0}{E_e}, & \sigma \leq p_c \\ \frac{p_c - \sigma_0}{E_e} + \frac{\sigma - p_c}{E_0}, & \sigma > p_c \end{cases} \quad (8.51)$$

$\sigma$  — суммарное эффективное вертикальное напряжение  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_p$ ;  
 $\sigma_0$  — начальное вертикальное эффективное напряжение до начала приложения нагрузки, т.е. бытовое давление  $\sigma_g$  за вычетом давления от грунта котлована и с добавкой давления от уже существующих соседних сооружений;

$\sigma_p$  — дополнительное вертикальное эффективное напряжение;

$E_0$  — модуль общей (упругопластической) деформации;

$E_e$  — модуль упругой (обратимой) деформации;

$p_c = R_{0c}\sigma_g + \Delta p_c$  — структурная прочность на сжатие, зависящая от плотности (пористости) грунта и давления;

$\beta$  — коэффициент, отражающий степень стесненности боковых деформаций и изменяющийся от  $\beta_1 = 0,7$  непосредственно под фундаментной плитой, где имеет место компрессия, т.е. сжатие без возможности боковых деформаций, до  $\beta_2 = 1$  на большом расстоянии от плиты, а в промежутке принимающий значения

$$\beta = \beta_1(\beta_2 - \beta_1)\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (8.52)$$

где  $\alpha$  — значение  $\sigma_p$  от равномерно распределенной нагрузки  $p = 1$  по площади плиты.

Бытовое давление определяется в пределах каждого слоя по формуле

$$\sigma_g = \bar{\sigma}_{gi} + \gamma'_i(z_i - z), \quad (8.53)$$

где  $\bar{\sigma}_{gi}$  — бытовое давление на кровле  $i$ -го слоя  $z = z_i$ ;  $\gamma'_i$  — удельный вес грунта  $i$ -го слоя с учетом взвешивания при насыщении водой.

Другие напряжения вычисляются как  $\sigma_0 = \sigma_g + \Delta\sigma_0$  с учетом того, что  $\Delta\sigma_0$  — влияние веса вынутого при отрывке котлована грунта, ко-

торое получается интегрированием по прямоугольникам влияния веса грунта (рис. 8.26) на участках котлована и существующих нагрузок.

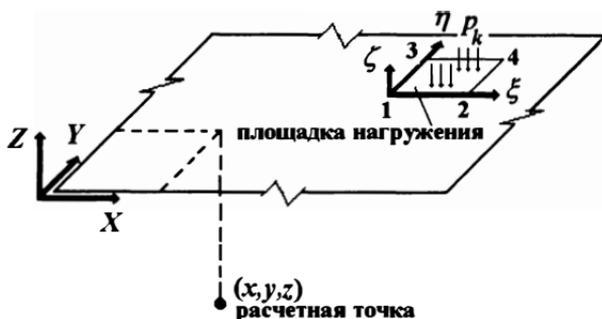


Рис. 8.26. К схеме интегрирования

Изменение эффективного вертикального напряжения

$$\Delta\sigma_k = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{3P_k(\zeta - z)^3}{2\pi R^5} d\xi d\eta, \quad (8.54)$$

где  $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ , если  $z > \zeta$   $\Delta\sigma_k = 0$ .

Как правило, дно котлована принимается на отметке  $z = z_f$ , равной отметке подошвы плиты;  $\sigma_p$  получается аналогичным интегрированием от заданной нагрузки по подошве плиты, величина  $\alpha$  — аналогичным интегрированием единичной нагрузки только по подошве плиты

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_k &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{3\zeta^3}{2\pi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{5/2}} d\xi d\eta = \\ &= F(\xi_2, \eta_2) + F(\xi_1, \eta_1) - F(\xi_1, \eta_2) - F(\xi_2, \eta_1), \end{aligned} \quad (8.55)$$

где

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\xi\eta\zeta(\xi^2 + \eta^2 + 2\zeta^2)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}(\xi^2 + \zeta^2)(\eta^2 + \zeta^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin \frac{\xi\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \zeta^2)(\eta^2 + \zeta^2)}} \right] \end{aligned} \quad (8.56)$$

Для вычислимости при наличии особенностей принимается, что  $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$  при  $\zeta < 0$  и  $F(0, 0, 0) = 0,25$  (давление под углом равномерно нагруженной площади).

Расчет производится суммированием вкладов от всех элементарных площадок нагружения и, в конце концов, дает значение общей осадки в каждой точке сетки, принадлежащей фундаментной

плите. Для соответствующей элементарной площадки теперь можно определить расчетный коэффициент постели

$$k_{w_i} = p_i / w_i. \quad (8.57)$$

При относительно небольшой изменчивости величин  $k_{w_i}$ , когда их максимальное и минимальное значения отличаются не более чем в полтора раза, можно принять в качестве обобщенной модели упругого основания упругий слой или упругое полупространство, а также эквивалентную им модель двухпараметрового упругого основания, обобщенную для слоистого полупространства. Обобщенные упругие характеристики основания  $C_1$  и  $C_2$ , являющиеся коэффициентами деформативности основания при сжатии и сдвиге соответственно, находятся из сопоставления решения Ж. Буссинеска для осадки полупространства под жестким штампом, загруженным равномерно распределенной нагрузкой (равномерным удельным давлением), и решения для осадок полупространства под нагрузкой согласно двухпараметровой модели.

В случае большого разброса значений  $k_{w_i}$  обычно используют винклерову модель. Чаще всего это относится к конструкциям, располагаемым на грунтовых основаниях, имеющих неоднородное строение в пределах плана здания, или в тех случаях, когда рассматриваются здания, состоящие из разных конструктивных объемов, резко отличающихся по высоте и в плане. В этих случаях приходится задаваться примерным распределением давлений под подошвой фундамента, затем определять осадки и приведенные упругие характеристики основания, и с их помощью строить комплексную модель сооружения, расположенного на упругом винклеровом основании. По этой модели выполняется расчет схемы «здание-основание», что приводит к уточнению картины давлений, передаваемых на грунт. Если эта картина меняется существенно, расчет повторяется снова, начиная с определения осадок.

## 8.6. О назначении характеристик двухпараметрового упругого основания

Наиболее обоснованным следует признать способ назначения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  двухпараметрового упругого основания, опирающийся на данные полевых (натурных) испытаний.

Известно [Пастернак, 1954], что задача о круглом штампе радиуса  $R$ , расположенном на упругом основании с двумя коэффициентами постели, при действии на штамп эксцентрично приложенной силы  $P$  (рис. 8.27) имеет следующее решение для осадки  $w_0$  в центре штампа и поворота  $\varphi$  штампа

$$w_0 = \frac{P}{\pi R^2 C_1} \frac{\xi K_0(\xi)}{\xi K_0(\xi) + 2K_1(\xi)}, \quad \varphi = \frac{4Pe}{\pi R^4 C_1} \frac{\xi K_1(\xi)}{\xi K_1(\xi) + 4K_2(\xi)}, \quad (8.58)$$

где, помимо уже введенных обозначений, положено:

- $e$  — эксцентриситет приложения силы  $P$ ,
- $K_1$  и  $K_2$  — функции Макдональда первого и второго порядков от безразмерного аргумента  $\xi$

$$\xi = R \sqrt{C_1/C_2}. \quad (8.59)$$

Из двух уравнений системы (8.50) получаем

$$\frac{w_0 e}{R^2} = f(\xi), \quad (8.60)$$

при этом трансцендентная функция  $f(\xi)$  имеет вид

$$f(\xi) = \frac{K_0(\xi)}{4K_1(\xi)} \frac{\xi K_1(\xi) + 4K_2(\xi)}{\xi K_0(\xi) + 2K_1(\xi)}. \quad (8.61)$$

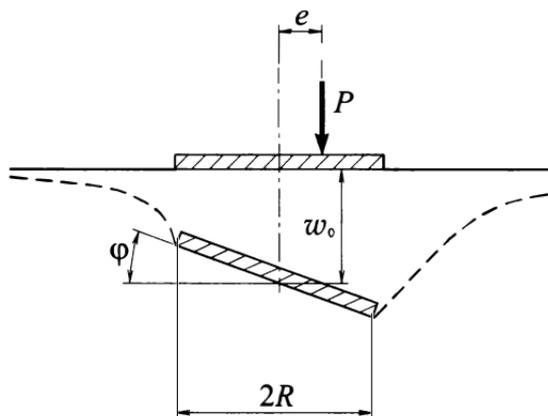


Рис. 8.27. Круглый штамп под действием силы и момента

Если в распоряжении инженера находятся результаты штамповых испытаний, то из решения трансцендентного уравнения (8.60) определится безразмерный параметр  $\xi$ , подстановка значения которого в первое из уравнений (8.58) дает возможность вычислить

значение коэффициента  $C_1$ , а из (8.59) и значение второго коэффициента  $C_2$ . Именно так рекомендует поступать П.Л. Пастернак [1954], построивший для облегчения расчетов график функции  $f(\xi)$ , который мы воспроизводим здесь на рис. 8.28.

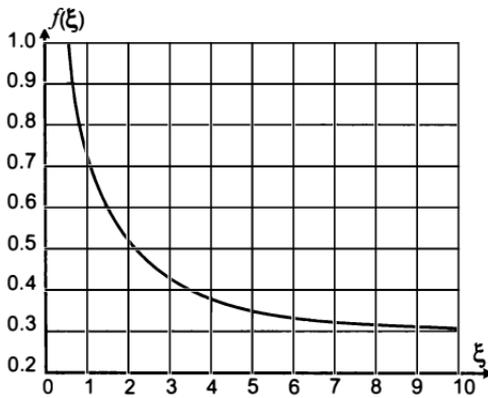


Рис. 8.28. График функции  $f(\xi)$

Само собой разумеется, что наиболее надежные результаты получаются при наличии серии испытаний, причем для штампов различных диаметров. Как справедливо указывает Пастернак, если статистическая обработка результатов вычислений коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  по результатам натуральных испытаний выявит достаточную устойчивость этих коэффициентов в пределах площадки строительства, то это будет самой надежной основой для принятия числовых значений искомых коэффициентов при последующем формировании расчетной схемы конструкции и упругого основания.

Увы, как раз именно этими данными (результатами натуральных испытаний) инженер располагает далеко не всегда, поскольку в лучшем случае таковые испытания проводятся только тогда, когда речь идет о проектировании весьма ответственных сооружений.

Если поступать в соответствии с рекомендациями норм, то можно вычислить характеристики сжимаемой толщи грунта, определив условные (осредненные по высоте грунтовой толщи) параметры упругого слоя:  $E$ ,  $H$  и  $\nu$ . Располагая инструментом вычислений в виде расчетной программы, способной обрабатывать двухпараметровую модель упругого основания, расчетчик будет стремиться перейти от модели упругого слоя конечной толщины к модели основания с двумя коэффициентами постели. Иначе говоря, возникает задача, которую можно назвать «моделированием модели». Задача ставится следующим образом: по заданным параметрам слоя  $E$ ,  $H$  и  $\nu$  требуется подобрать два коэффициента постели  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы

двухпараметровая модель в каком-то смысле наилучшим образом приближала модель упругого слоя.

Практическая потребность в таком моделировании ощущалась давно, поэтому предлагались различные подходы к решению указанной задачи, которые могли бы служить основой для выработки практических рекомендаций. Так, в работе [Бородачев, 1975] в качестве условий эквивалентности исходной и заменяющей моделей используются два требования:

- равенство осадок симметрично нагруженного жесткого штампа для исходной и заменяющей модели;
- равенство реактивных давлений в средней точке этого же штампа.

Эти требования, выдвинутые на основе инженерной интуиции, позволяют однозначно определить характеристики двухпараметрового основания. В то же время, в этих требованиях заключен и известный произвол. Так, например, одно из них можно было бы заменить, скажем, условием равенства угла поворота штампа для исходной и заменяющей моделей или каким либо другим условием.

Иной подход к вопросу об установлении приближенной эквивалентности моделей использован Барвашовым [1977], по которому близость двух моделей понимается в смысле близости соответствующих ядер. В силу того, что ядра трудно сопоставлять непосредственно, в [Барвашов, 1977] условие близости ядер заменяется условием близости их трансформант интегрального преобразования Ганкеля. Такой подход привлекателен тем, что в предельном случае (при полном совпадении трансформант) ядра исходной и заменяющей моделей также полностью совпадают, а значит, полностью совпадают и решения соответствующих контактных задач. Некоторым недостатком такого подхода является то обстоятельство, что точный математический смысл меры близости трансформант и ядер при этом не устанавливается.

Попытка сопоставления двух моделей упругого основания, где в качестве меры близости выбирается близость этих моделей по энергии, что стало уже традиционным при построении прикладных моделей в задачах механики, была осуществлена в работе [Сливкер, 1981]. Не останавливаясь на математических деталях, отметим здесь, что в результате выполненного исследования в [Сливкер, 1981] построен общий алгоритм, позволяющий на основе итерационного процесса установить значения параметров  $C_1$  и  $C_2$ , при которых гарантируется наилучшая в энергетическом смысле близость двух моделей упругого основания.

Оказалось, что наилучшие в указанном энергетическом смысле коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  зависят не только от параметров исходной модели, но также от размеров и формы конструкции в плане, а самое главное — от ее жесткости.

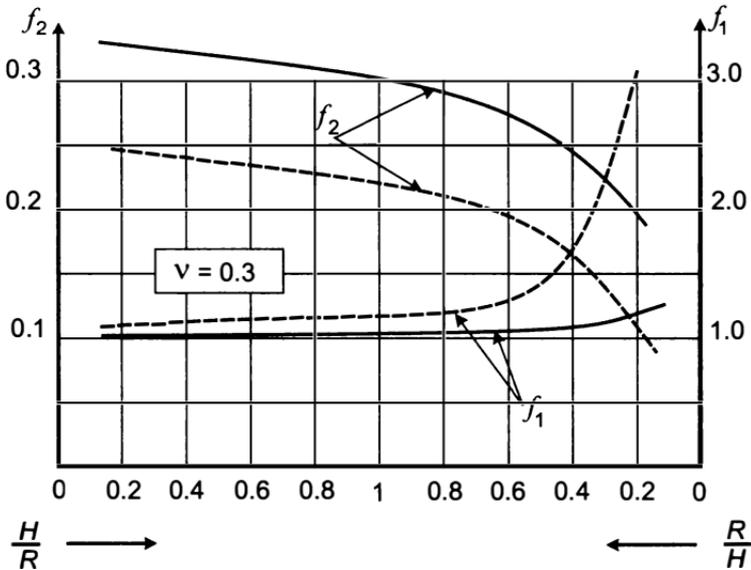


Рис. 8.29. Графики функций  $f_1$  и  $f_2$

Влияние жесткости изгибаемой фундаментной плиты на коэффициенты двухпараметровой модели упругого основания может быть оценено на основании графиков, представленных на рис. 8.29.

На этом рисунке сплошными линиями изображено решение для задачи о круглом штампе радиуса  $R$ , а пунктирная линия демонстрирует решение о воздействии равномерно распределенной нагрузки непосредственно на круглую площадку радиуса  $R$  упругого основания (нулевая жесткость плиты).

Графики на рис. 8.29 относятся к двум функциям  $f_1$  и  $f_2$ , зависящим от относительного размера штампа или площадки нагружения, то есть от величины  $R/H$ . Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  связаны со значениями этих функций следующими соотношениями

$$C_1 = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)H} f_1, \quad C_2 = \frac{E_0 H}{2(1+\nu_0)} f_2, \quad (8.62)$$

где

$$E_0 = E / (1-\nu^2), \quad \nu_0 = \nu / (1-\nu).$$

Из этих графиков видно, что при относительно малой глубине  $H$  сжимаемой толщи функция  $f_1$  (а значит, и коэффициент  $C_1$ ) почти не зависит от жесткости плиты. Функция  $f_2$  (а значит, и коэффициент  $C_2$ ) более чувствительна к изменению жесткости фундаментной плиты.

### 8.6.1. Модель основания «ССС»

Именно так назвали свою модель упругого основания В.А. Барвашов и В.Г. Федоровский [1978], предложившие усовершенствовать двухпараметровую модель упругого основания за счет введения дополнительного слоя винклеровых пружин с распределенной жесткостью  $C_3$ , накрывающего сверху мембранную модель Филоненко-Бородича<sup>7</sup>. Априори ясно, что дополнительный параметр должен позволить более аккуратно отобразить свойства реального грунтового основания на формальную математическую модель. Кроме того, эта модель выбивает почву из под ног оппонентов двухпараметровой модели, поскольку никаких фиктивных поперечных сил на краях фундаментных плит, покоящихся на основании с моделью *ССС*, не возникает. Авторы статьи [Барвашов, Федоровский, 1978] обратили также внимание на то, что применение этой модели становится еще более логичным при наличии свайного поля под фундаментом конструкции.

Есть и еще одно важное обстоятельство, по которому эта модель может вызвать интерес у расчетчиков. Дело в том, что развитые расчетные программы, способные работать с двухпараметровой моделью (например, программная система **SCAD**), не требуют абсолютно никакой переделки для выполнения расчетов конструкций, покоящихся на основании с тремя коэффициентами постели!

Действительно, для этого достаточно в исходной информации к задаче двухпараметровую часть упругого основания замоделировать как обычно и связать ее с вышележащей фундаментной плитой дискретными пружинами, расположенными в узлах сетки конечных элементов этой плиты. Что касается сеточного разбиения двухпараметровой части упругого основания, то оно образуется простым сносом по вертикали сетки конечных элементов фундаментной плиты. Сказанного достаточно, чтобы обосновать целесообразность более подробного рассмотрения здесь модели *ССС*.

<sup>7</sup> Мы не знаем, как это название должно звучать по замыслу разработчиков модели и изобрели для себя «си-си-си», но в редакции усмотрели в этом шалости, так что переходим на скучное «три цэ».

Для дальнейшего введем следующую терминологию. Помимо дневной и ночной поверхностей упругого основания определим и ее *вечернюю* поверхность<sup>8</sup>, под которой будем понимать плоскость расположения мембраны с натяжением  $C_2$ , как это показано на рис. 8.30.

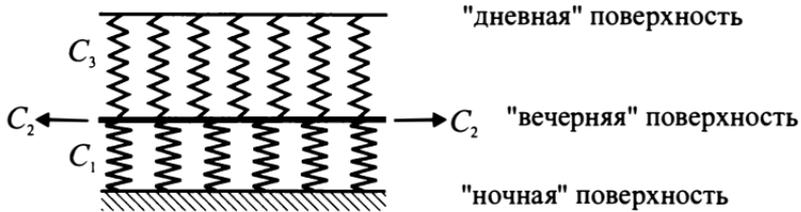


Рис. 8.30. Схема упругого основания по модели ССС

Пусть  $w$  — перемещения дневной поверхности упругого основания, а  $v$  — перемещения ее вечерней поверхности. Нетрудно заметить, что функция отпора  $r$  и перемещения дневной и вечерней поверхностей связаны следующими соотношениями

$$r = C_3(w - v), \quad r = -C_2 \nabla^2 v + C_1 v. \quad (8.63)$$

Рассмотрим задачу о круглом штампе радиуса  $R$ , вдавливаемом в упругое основание ССС центрально приложенной силой  $P$ . Обозначим осадку штампа  $w_0$ . Как известно, в полярных координатах  $(\rho, \theta)$  дифференциальный оператор Лапласа  $\nabla^2$  принимает вид

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial(\cdot)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2}, \quad (8.64)$$

и поскольку в рассматриваемом случае нагрузка осесимметрична, то производная по угловой координате в (8.64) исчезает. Далее, вне пределов штампа отпор  $r$  равен нулю (перемещения дневной поверхности следят за перемещениями вечерней поверхности  $w = v$ ), а для определения отпора под штампом можно воспользоваться первой из формул (8.63), положив там  $w = w_0$ . В результате приходим к следующей системе дифференциальных уравнений задачи

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dv}{d\rho} \right) - \frac{C_1 + C_3}{C_2} v = -\frac{C_3}{C_2} w_0 \quad \text{при } \rho \leq R, \quad (8.65)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dv}{d\rho} \right) - \frac{C_1}{C_2} v = 0 \quad \text{при } \rho \geq R. \quad (8.66)$$

<sup>8</sup> Вечерние сумерки, как известно, являются переходным состоянием природы от дневной освещенности к ночной темноте.

Каждое из уравнений (8.65) и (8.66) является дифференциальным уравнением Бесселя, так что решение для  $v$  можно представить в виде линейных комбинаций модифицированных функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка  $I_0$  и  $K_0$  плюс частное решение неоднородного уравнения для (8.65)

$$v(\rho) = \begin{cases} A_1 I_0(\beta\rho) + B_1 K_0(\beta\rho) + \gamma w_0 & \rho \leq R \\ A_2 I_0(\alpha\rho) + B_2 K_0(\alpha\rho) & \rho \geq R \end{cases}, \quad (8.67)$$

где

$$\alpha^2 = C_1 / C_2, \quad \beta^2 = (C_1 + C_3) / C_2, \quad \gamma = C_3 / (C_1 + C_3). \quad (8.68)$$

Поскольку  $I_0$  обладает особенностью на бесконечности, а  $K_0$  — в нуле, то из четырех постоянных интегрирования в (8.67) две должны быть исключены, то есть  $B_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ . Две оставшиеся константы  $A_1$  и  $B_2$  и неизвестную пока осадку штампа  $w_0$  определим из непрерывности  $v$  при  $\rho = R$  и из интегральных условий равновесия. По непрерывности  $v$  имеем

$$\gamma w_0 = B_2 K_0(\xi) - A_1 I_0(\eta), \quad (8.69)$$

где

$$\xi = \alpha R, \quad \eta = \beta R. \quad (8.70)$$

Суммарное усилие в пружинах верхнего слоя по условиям равновесия должно равняться внешней силе  $P$ , то есть

$$P = C_3 \int_0^{2\pi} \int_0^R (w_0 - v) \rho d\rho d\theta. \quad (8.71)$$

Приведем известные соотношения теории Бесселевых функций [Лебедев, 1963]

$$\frac{d}{d\rho} [\rho^n I_n(\beta\rho)] = \beta \rho^n I_{n-1}(\beta\rho), \quad \frac{d}{d\rho} [\rho^n K_n(\alpha\rho)] = -\alpha \rho^n K_{n-1}(\alpha\rho). \quad (8.72)$$

Теперь из (8.71) в результате подстановок и интегрирования получаем

$$(1-\gamma)w_0 = \frac{P}{\pi R^2 C_3} + A_1 \frac{2}{\eta} I_1(\eta). \quad (8.73)$$

Еще одно уравнение равновесия получим, разрезая нижний слой пружин между ночной и вечерней поверхностями и приравнивая суммарное усилие в этих пружинах внешней нагрузке  $P$ , что дает

$$P = C_1 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R v(\rho) \rho d\rho + \int_R^\infty v(\rho) \rho d\rho \right] d\theta \quad (8.74)$$

Интегрирование (8.74) с учетом (8.67) и (8.72) приводит к

дополнительному соотношению

$$\gamma w_0 = \frac{P}{\pi R^2 C_1} - A_1 \frac{2}{\eta} I_1(\eta) - B_2 \frac{2}{\xi} K_1(\xi). \quad (8.75)$$

Из (8.73) определяем  $A_1$ , а сложив (8.73) и (8.75), найдем  $B_2$

$$A_1 = \left[ (1-\gamma)w_0 - \frac{P}{\pi R^2 C_3} \right] \frac{\eta}{2I_1(\eta)},$$

$$B_2 = \left[ -w_0 + \frac{P}{\pi R^2 \gamma C_1} \right] \frac{\xi}{2K_1(\xi)}. \quad (8.76)$$

Подставив полученные выражения для  $A_1$  и  $B_2$  в уравнение (8.69), получим окончательно выражение для осадки штампа

$$w_0 = \frac{P}{\pi R^2 C_1} \frac{F_1}{\gamma(2\gamma + F_1)}, \quad (8.77)$$

где

$$F_1 = \frac{\xi K_0(\xi)}{K_1(\xi)} + (1-\gamma) \frac{\eta I_0(\eta)}{I_1(\eta)}. \quad (8.78)$$

Заметим, что фактически  $F_1$  является функцией двух безразмерных параметров  $\xi$  и  $\eta$ , поскольку, как это следует из (8.68) и (8.70),

$$1-\gamma = \xi^2 / \eta^2. \quad (8.79)$$

Перейдем теперь к задаче о штампе под воздействием моментной нагрузки  $M = Pe$  (см. рис. 8.25). В этом случае, как это нетрудно заметить, функции осадок дневной и вечерней поверхностей могут быть представлены в виде

$$w = \varphi \rho \sin \theta, \quad v = u(\rho) \sin \theta, \quad (8.80)$$

где  $u$  — новая неизвестная функция, зависящая только от радиальной координаты. Заметим, что угловая координата  $\theta$  отсчитывается от оси, относительно которой действует момент  $M$ . В результате, вместо уравнений (8.65) и (8.66) приходим к уравнениям

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{du}{d\rho}) - \left( \frac{C_1 + C_3}{C_2} + \frac{1}{\rho^2} \right) u = -\frac{C_3}{C_2} \varphi \rho \quad \text{при } \rho \leq R, \quad (8.81)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{du}{d\rho}) - \left( \frac{C_1 + C_3}{C_2} + \frac{1}{\rho^2} \right) u = -\frac{C_3}{C_2} \varphi \rho \quad \text{при } \rho \leq R, \quad (8.82)$$

общее решение которых представимо с помощью модифицированных функций Бесселя первого порядка

$$u(\rho) = \begin{cases} A_1 I_1(\beta\rho) + B_1 K_1(\beta\rho) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \rho, & \rho \leq R \\ A_2 I_1(\alpha\rho) + B_2 K_1(\alpha\rho), & \rho \geq R \end{cases} \quad (8.83)$$

Тот факт, что частное решение неоднородного уравнения (8.81) представимо в виде линейной функции от  $\rho$ , а именно — в виде  $\varphi\rho(\beta^2 - \alpha^2) / \beta^2$ , проверяется непосредственной подстановкой в (8.81).

Из условия ограниченности решения в нуле и на бесконечности снова получаем  $A_2 = 0$  и  $B_1 = 0$ , а из непрерывности решения при  $\rho = R$  с учетом введенных ранее обозначений находим

$$\varphi R \frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta^2} = B_2 K_1(\xi) - A_1 I_1(\eta). \quad (8.84)$$

Реактивный момент, развивающийся в пружинах верхнего слоя, приравняем внешнему моменту  $M$

$$\begin{aligned} M &= 2C_3 \int_0^\pi \int_0^R (\rho - u) \sin^2 \theta \rho^2 d\rho d\theta = \\ &= C_3 \pi \int_0^R \left[ \varphi \rho \frac{\alpha^2}{\beta^2} - A_1 I_1(\beta\rho) \right] \rho^2 d\rho. \end{aligned} \quad (8.85)$$

Принимая во внимание (8.72) и интегрируя, получаем отсюда

$$M = C_3 \pi R^3 \left[ \varphi R \frac{\xi^2}{4\eta^2} - A_1 \frac{I_2(\eta)}{\eta} \right]. \quad (8.86)$$

Тот же самый момент  $M$  создается и усилиями в пружинах нижнего слоя, то есть

$$\begin{aligned} M &= \\ &= 2C_1 \int_0^\pi \left\{ \int_0^R \left[ A_1 I_1(\beta\rho) + \varphi \rho \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \right] \rho^2 d\rho + \int_R^\infty B_2 K_1(\alpha\rho) \rho^2 d\rho \right\} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned} \quad (8.87)$$

и, следовательно,

$$M = C_1 \pi R^3 \left[ \varphi R \frac{\eta^2 - \xi^2}{4\eta^2} + A_1 \frac{I_2(\eta)}{\eta} + B_2 \frac{K_2(\xi)}{\xi} \right]. \quad (8.88)$$

Заметим, что при интегрировании в (8.87) учтена асимптотика  $\rho^2 K_2(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Из (8.86) и (8.88) находим постоянные интегрирования

$$A_1 = \left[ \varphi R \frac{\xi^2}{4\eta^2} - \frac{(1-\gamma)M}{\gamma\pi R^3 C_1} \right] \frac{\eta}{I_2(\eta)},$$

$$B_2 = \left( -\varphi R \frac{1}{4} + \frac{M}{\gamma\pi R^3 C_1} \right) \frac{\xi}{K_2(\xi)}. \quad (8.89)$$

После подстановки (8.89) в (8.84) получаем следующее выражение для угла поворота штампа

$$\varphi R = \frac{M}{\gamma\pi R^3 C_1} \frac{4F_2}{\gamma(4\gamma + F_2)}, \quad (8.90)$$

где

$$F_2 = \frac{\xi K_1(\xi)}{K_2(\xi)} + (1-\gamma) \frac{\eta I_1(\eta)}{I_2(\eta)}. \quad (8.91)$$

Итак, имея решение (8.77) для осадки штампа и (8.90) для поворота штампа, из их отношения находим, что

$$\frac{w_0 e}{\varphi R^2} = \frac{(4\gamma + F_2)F_1}{4(2\gamma + F_1)F_2}. \quad (8.92)$$

В (8.92) справа находится функция двух безразмерных параметров  $\xi$  и  $\eta$ , поэтому для их определения требуется еще одно дополнительное условие. В качестве такого дополнительного условия возьмем осадку  $w_q$  дневной поверхности упругого основания ССС, замеренную в центре круга того же радиуса  $R$ , при нагружении равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , приложенной непосредственно к поверхности упругого основания. Если положить  $q\pi R^2 = P$ , то получим

$$w_q = \frac{P}{\pi R^2 C_3} + \frac{P}{\pi R^2 C_1} [1 - \xi K_1(\xi)] = \frac{P}{\pi R^2 C_1} \left[ \frac{1}{\gamma} - \xi K_1(\xi) \right] \quad (8.93)$$

и, следовательно,

$$\frac{w_0}{w_q} = \frac{F_1}{(2\gamma + F_1)[1 - \gamma \xi K_1(\xi)]}. \quad (8.94)$$

Совместное решение системы двух трансцендентных уравнений (8.92) и (8.94) определяет значения искомых параметров  $\xi$  и  $\eta$ , которые дают возможность восстановить все три коэффициента  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Действительно, зная  $\xi$  и  $\eta$ , а также замеренную величину осадки штампа  $w_0$ , можно получить коэффициент  $C_1$ , воспользовавшись для этого формулой (8.77). Вспоминая теперь (8.68), (8.70) и (8.79), находим и оставшиеся два неизвестных коэффициента постели

$$C_2 = C_1 R^2 / \xi^2, \quad C_3 = C_1 (\eta^2 / \xi^2 - 1). \quad (8.95)$$

Остановимся теперь на анализе решения системы нелинейных уравнений (8.92) и (8.94), переписав эти уравнения в следующем виде

$$a = F_a(\xi, \eta), \quad b = F_b(\xi, \eta), \quad (8.96)$$

где обозначено

$$a = \frac{w_0 e}{\varphi R^2}, \quad b = \frac{w_0}{w_q}, \quad (8.97)$$

и

$$F_a(\xi, \eta) = \frac{(4\gamma + F_2)F_1}{4(2\gamma + F_1)F_2}, \quad F_b(\xi, \eta) = \frac{F_1}{(2\gamma + F_1)[1 - \gamma \xi K_1(\xi)]}. \quad (8.98)$$

Прежде всего установим возможные пределы изменений входных параметров  $a$  и  $b$ , для чего вычислим значения этих параметров для двух крайних по распределительной способности вариантов расчетных моделей упругого основания: винклеровой модели и упругого полупространства.

Для винклеровой модели с коэффициентом постели  $k$  имеем

$$w_0 = \frac{P}{\pi R^2 k}, \quad \varphi = \frac{4Pe}{\pi R^4 k}, \quad w_q = w_0, \quad (8.99)$$

откуда  $a = 1/4$  и  $b = 1$ .

Для упругого полупространства с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  соответствующие формулы записываются в виде ([Уфлянд, 1967], [Безухов, 1953])

$$w_0 = \frac{(1-\nu^2)P}{2ER}, \quad \varphi = \frac{3(1-\nu^2)Pe}{4ER^3}, \quad w_q = \frac{2(1-\nu^2)P}{\pi ER} \quad (8.100)$$

и следовательно,  $a = 2/3$  и  $b = \pi/4$ .

Таким образом, для входных параметров  $a$  и  $b$  имеем следующие ограничения

$$0,25 \leq a \leq 0,667 \quad \text{и} \quad 0,785 \leq b \leq 1. \quad (8.101)$$

Решение системы из двух трансцендентных уравнений (8.96) можно получить с помощью широко распространенной программы **Mathcad 2000**, специально предназначенной для математических задач подобного рода и обладающей к тому же встроенными средствами вычислений модифицированных бесселевых функций  $I_n$  и  $K_n$ . Для ориентировки приведем краткую таблицу значений искомых параметров  $\xi$  и  $\eta$ , вычисленных при различных значениях входных параметров  $a$  и  $b$  (табл. 8.3).

Таблица 8.3.

	$b = \pi/4$	$b = 0,80$	$b = 0,85$	$b = 0,90$	$b = 0,95$
$a = 0,32$	5,336	3,974	2,292	1,305	0,483
	19,787	9,250	3,874	2,084	0,959
	<b>0,835</b>	<b>0,940</b>	<b>1,121</b>	<b>1,046</b>	<b>0,479</b>
$a = 0,35$	2,609	2,339	1,569	0,910	0,309
	6,119	5,091	2,988	1,758	0,889
	<b>0,828</b>	<b>0,845</b>	<b>0,838</b>	<b>0,653</b>	<b>0,213</b>
$a = 0,40$	1,708	1,561	1,079	0,614	0,181
	4,581	4,002	2,574	1,609	0,892
	<b>0,634</b>	<b>0,626</b>	<b>0,547</b>	<b>0,356</b>	<b>0,077</b>
$a = 0,45$	1,325	1,191	0,825	0,458	0,119
	4,248	3,746	2,487	1,607	0,936
	<b>0,497</b>	<b>0,470</b>	<b>0,379</b>	<b>0,217</b>	<b>0,034</b>
$a = 0,50$	1,100	1,012	0,701	0,382	0,091
	4,218	3,741	2,511	1,646	0,979
	<b>0,402</b>	<b>0,386</b>	<b>0,297</b>	<b>0,158</b>	<b>0,020</b>
$a = 0,55$	0,950	0,874	0,605	0,324	0,071
	4,319	3,833	2,583	1,709	1,029
	<b>0,336</b>	<b>0,319</b>	<b>0,237</b>	<b>0,117</b>	<b>0,012</b>
$a = 0,60$	0,840	0,774	0,535	0,283	0,058
	4,497	3,986	2,683	1,781	1,078
	<b>0,286</b>	<b>0,270</b>	<b>0,195</b>	<b>0,092</b>	<b>0,008</b>
$a = 2/3$	0,730	0,674	0,466	0,243	0,046
	4,817	4,252	2,842	1,887	1,143
	<b>0,237</b>	<b>0,223</b>	<b>0,156</b>	<b>0,070</b>	<b>0,005</b>

В каждой ячейке таблицы 8.3 приведены три числа, из которых верхнее относится к значению  $\xi$ , среднее — к  $\eta$ , а нижнее, выделенное полужирным шрифтом, дает значение функции  $F_3(\xi, \eta)$ , необходимое для вычисления параметра  $C_1$ .

Действительно, как это следует из формулы (8.77),

$$C_1 = \frac{P}{\pi R^2 w_0} F_3, \quad \text{где } F_3 = \frac{F_1}{\gamma(2\gamma + F_1)}. \quad (8.102)$$

В заключение, в этом пункте выскажем пожелание разработчикам программных комплексов пополнять соответствующую библиотеку конечных элементов конечными элементами плиты (тонкими и средней толщины), покоящимися на основании ССС.

Конечно, как это уже отмечалось выше, расчетчик может обойтись конечными элементами изгибаемой плиты, покоящейся на упругом двухпараметровом основании (если таковые уже имеются в программном комплексе), внося в расчетную схему сосредоточенные

в узлах плиты пружины, дискретно моделирующие верхний винклеров слой жесткостью  $C_3$ .

Однако, прямое использование соответствующих конечных элементов предпочтительнее по двум соображениям:

- во-первых, это упрощает и облегчает работу пользователя, освобождая его от необходимости вручную подсчитывать и вносить в расчетную схему жесткость каждой дискретной пружины, зависящую, к тому же, от размеров конечных элементов, расположенных на звезде узла, в котором ставится эта пружина (при автоматической генерации сетки это обстоятельство может вырасти в большую проблему, особенно в случае нерегулярных сеток);
- во-вторых, аккуратная и последовательно выдержанная дискретизация исходной континуальной задачи в рамках МКЭ обычно предпочтительнее мешанины из физической и математической дискретизаций хотя бы по соображениям получения оценок погрешности решения.

В этой связи приведем выражение для потенциальной энергии  $E_0$ , которая накапливается в рассматриваемой модели упругого основания

$$E_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [C_3(w-v)^2 + C_1 v^2 + C_2(v_{,x}^2 + v_{,y}^2)] d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} [C_1 v^2 + C_2(v_{,x}^2 + v_{,y}^2)] d\Omega_e. \quad (8.103)$$

Имея выражение для энергии деформации, можно получить стандартным для МКЭ способом компоненты соответствующих матриц жесткости и грузовых векторов.

Не останавливаясь на деталях, обратим внимание лишь на то, что энергия  $E_0$ , запасаемая упругим основанием, зависит от двух функций  $v$  и  $w$ , представляющих собой перемещения вечерней и дневной поверхностей упругого основания. Если оставаться в рамках схемы метода конечных элементов с твердотельными узлами, то это потребует формального введения пары узлов в каждой узловой точке изгибаемой плиты. Оба узла каждой такой пары совпадают по пространственному положению, но перемещения одного из узлов каждой пары определяются функцией  $v$ , а другого — функцией  $w$ . Кстати говоря, понятно, что энергия  $E_k$ , накапливаемая в самой изгибаемой плите, а также потенциал внешних сил  $\Pi$  — см. формулу (8.46) — зависят только от функции  $w$  (логично считать, что

непосредственно к вечерней поверхности упругого основания нагрузка приложена быть не может).

## 8.7. Анализ модели «здание - основание»

### 8.7.1. Итерационный расчет

В настоящее время имеется достаточно большое количество математических моделей, описывающих как конструкции надземной части здания, так и работу основания. Однако, даже с учетом интенсивного развития вычислительной техники детальный совместный расчет основания и сооружения сейчас и в обозримом будущем остается весьма затруднительной задачей. В связи с этим оказывается целесообразным поиск упрощений, существенно не сказывающихся на точности решения большинства задач.

Практика проектирования рассматривает чаще проблемы расчета сооружений с учетом влияния его совместной работы с основанием, а не собственно геотехнические проблемы. При решении задач указанного класса, проектировщика интересует главным образом напряжено-деформированное состояние конструктивных элементов здания, а относительно грунтового основания он готов ограничиться более скудным набором результатов (максимальные осадки, максимальные напряжения и т.п.). Такая целевая установка наталкивает на мысль о раздельном расчете основания и покоящегося на нем здания, однако при этом и складывается парадоксальная ситуация, представленная следующей цитатой из электронной книги А.Г. и К.Г. Шашкиных [[www.georec.narod.ru](http://www.georec.narod.ru)]:

*«... сложилась достаточно парадоксальная ситуация: специалист -надземщик рассматривает здание как стоящее на абсолютно неподатливом основании (на скале) и полученные из такого расчета реакции передает фундаментщику; последний же прикладывает эти реакции на упругую, упруго-пластическую или вязкую среду как абсолютно гибкую нагрузку. Спрашивается: какое же у нас основание — абсолютно жесткое или податливое? Какое у нас здание: абсолютно гибкое или конечной жесткости?».*

В качестве одной из возможных альтернатив можно указать на возможность организации итерационного процесса, который включает следующие шаги:

- задание начального распределения коэффициента постели  $C_1(x,y)$ ;
- расчет совместных перемещений сооружения, плитного фундамента и основания с принятым распределением коэффициента постели  $C_1(x,y)$  при действии заданных нагрузок и определение контактных давлений  $p(x,y)$ ;
- определение осадок основания  $w(x,y)$  с использованием принятой модели основания, а также следующего приближения для коэффициента постели  $C_1(x,y) = p(x,y) / w(x,y)$ ;
- повторение первых двух шагов до достижения сходимости по контрольному параметру (например, по коэффициенту постели или по прогибам плиты).

Прежде чем перейти к анализу некоторых существенных деталей такого расчета, отметим, что итерационный процесс указанного типа, который рекомендован пунктом 12.5.4 СП 50-101-2004, довольно быстро сходится.

На рис. 8.31 в качестве примера представлены значения перемещений для трех последовательных итераций для довольно простого сооружения, которые определены последовательными расчетами в цепочке:

*«предварительное задание давлений на грунт» — «определение коэффициентов постели 1-го приближения» — «расчет здания на упругом основании» — «задание реакций фундаментной плиты в качестве давления на грунт» — «определение коэффициентов постели 2-го приближения» — расчет здания на упругом основании» — «задание реакций фундаментной плиты в качестве давления на грунт» — «определение коэффициентов постели 3-го приближения».*

В более сложных случаях (резкая неравномерность давлений на разные участки основания, сильно неоднородные грунты и т.п.) может потребоваться еще несколько итераций описанного процесса<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Расчеты такого типа удобно выполнять с использованием программы **КРОСС**. Эта программа имеет связь с системой **SCAD** и может воспринимать реакции под фундаментной плитой в качестве нагрузки на основание, а система **SCAD** в свою очередь воспринимает результаты работы **КРОСС** в виде коэффициентов постели фундаментной плиты.

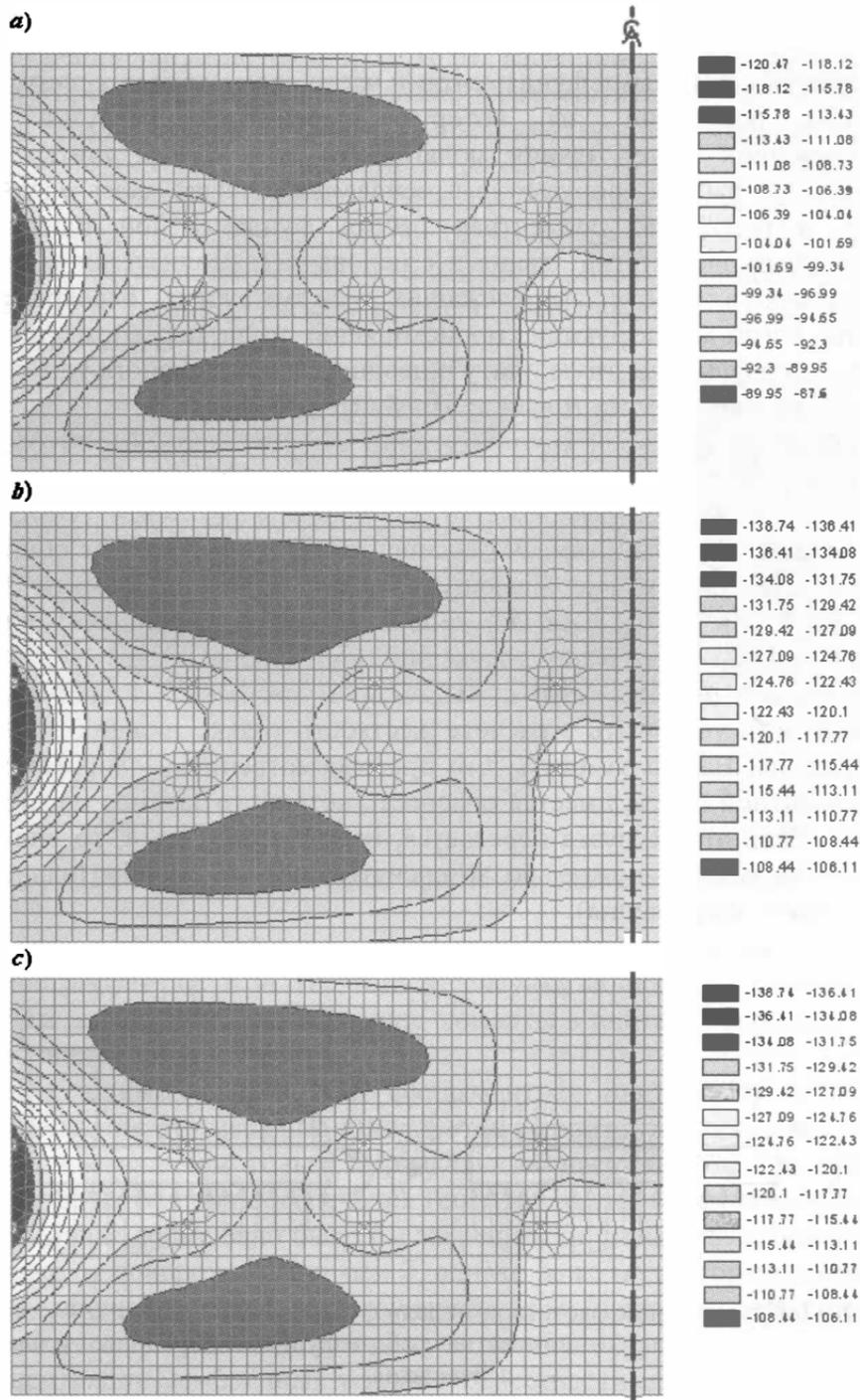
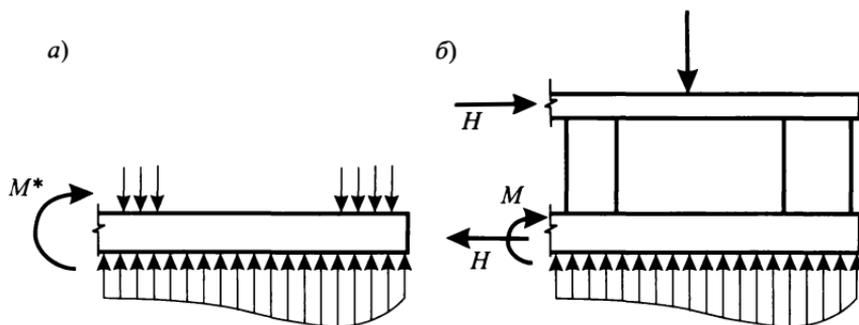


Рис. 8.31. Итерационное уточнение решения задачи «здание-основание»

## 2. Расчетная модель фундаментной плиты

для зданий с плитными фундаментами часто рассматривают плиту на упругом основании, на которую передаются нагрузки от вышележащих частей здания, полагая что этим самым учитывают совместную работу сооружения и основания. Однако здесь следует иметь в виду, что совместная работа фундаментной плиты с надземными элементами здания и с основанием реализуется за счет вовлечения в работу вышележащих междуэтажных перекрытий. Общий изгиб конструкции, происходящий из-за неравномерности нагрузок на фундаментную плиту и неоднородности свойств упругого основания, приводит не только к изгибу фундаментной плиты, но и к появлению мембранной группы усилий в фундаментной плите и в плите перекрытия над подвалом (точнее, к в нескольких плитах междуэтажных перекрытий). Эти мембранные усилия  $H$  создают внутреннюю пару сил, заметно воспринимающую момент от общего изгиба и, тем самым, уменьшающую изгиб фундаментной плиты (см. рис. 8.32). При этом сами по себе значения мембранных усилий невелики и мало сказываются на величине армирования плит.

Полезно заметить, что п. 12.5.2. СП 50-101-2004 допускает возможность учитывать в расчете жесткость только нижних этажей сооружения. Важно заметить, что при рассмотрении изолированной фундаментной плиты имеется опасность неточного задания нагрузки на нее. Если эта нагрузка передается, например, стенами, то они не только загружают плиту, но и препятствуют ее изгибу (вариант штампового нагружения).



**Рис. 8.32.** К построению расчетной модели фундаментной плиты: *а* — плита на упругом основании; *б* — совместная работа фундаментной плиты и плиты перекрытия

Если же на плиту передать только вертикальные нагрузки от вышележащих частей сооружения или же приложить к плите реакции

здания, размещенного на жестком основании, то условие штампового нагружения нарушаются и происходит изгиб плиты в тех местах, где этому препятствуют стены подвала. Соответствующая иллюстрация представлена на рис. 8.33, где показаны прогибы фундаментной плиты по результатам расчета с использованием двух расчетных моделей. Картины прогибов кажутся совпадающими лишь при беглом взгляде, значения прогибов оказываются различными и, самое главное, нарушаются условия стесненности деформаций под стенами, которые в рассматриваемом примере располагаются по верхней и нижней кромке плиты.

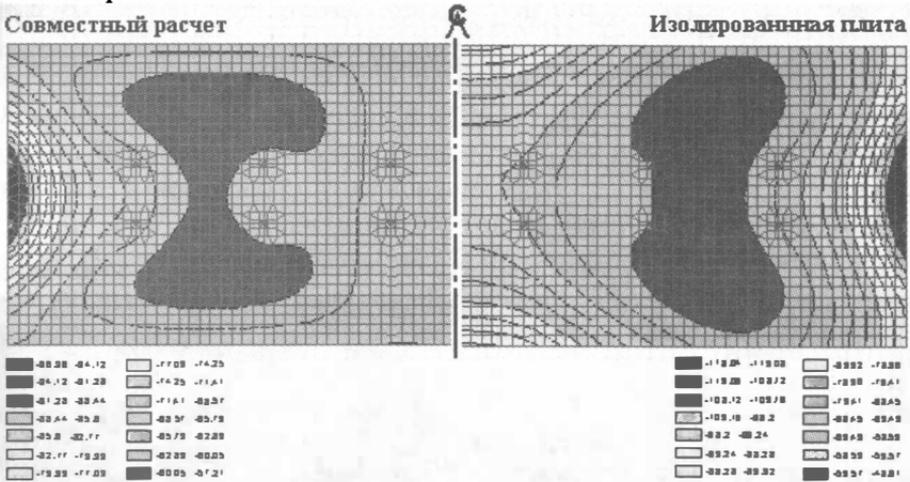
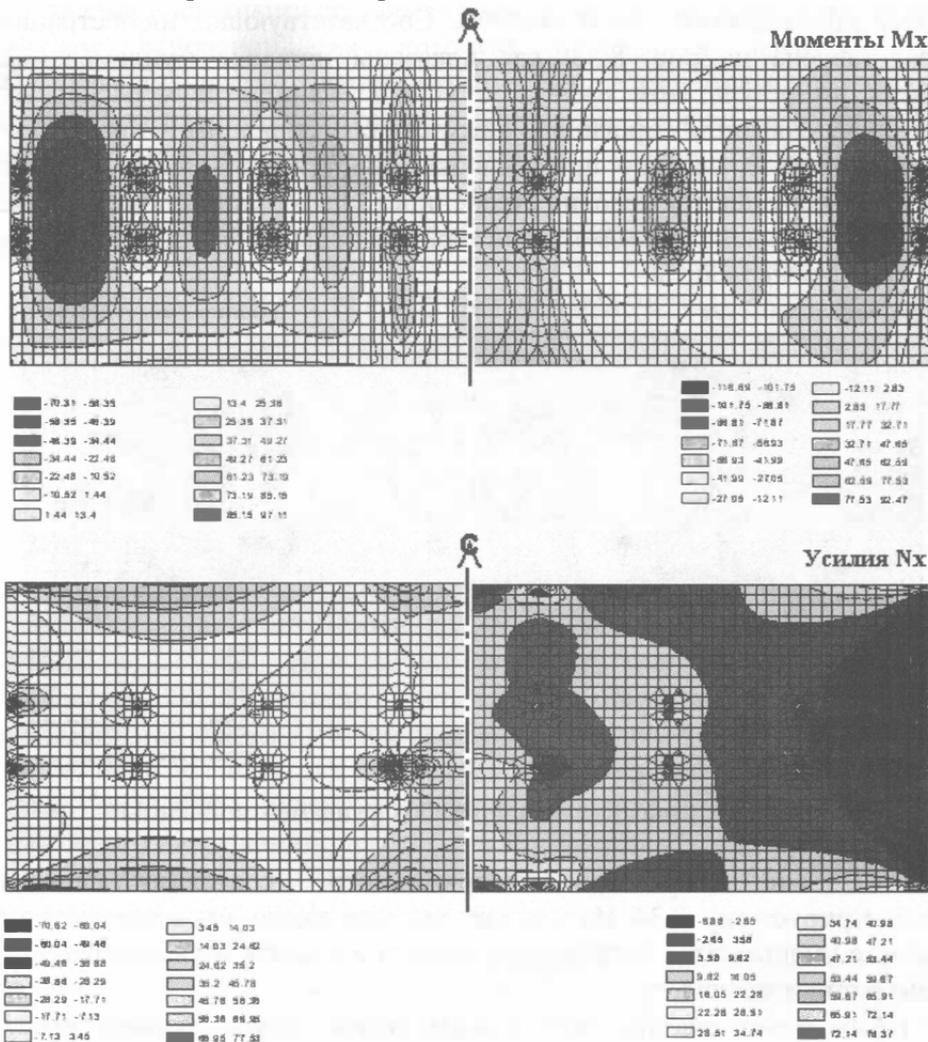


Рис. 8.33. Сопоставление прогибов фундаментной плиты

Изменение характера напряженного состояния плиты иллюстрирует рис. 8.34. Из этого же рисунка видно, как в совместном расчете уменьшается изгибающие моменты в плите и увеличиваются мембранные усилия.

Необходимо сказать, что фундаментная плита обязана иметь раскрепления от смещений и поворотов в горизонтальной плоскости. Даже при наличии только вертикальных нагрузок это требование вытекает из условия обеспечения геометрической неизменяемости. В этом случае достаточно было бы закрепить от смещений вдоль  $X$  и  $Y$ , а также от поворота вокруг оси  $Z$ , однако даже малая горизонтальная составляющая у равнодействующей всех нагрузок (она может возникнуть при решении задачи из-за ошибок округления) приведет к концентрации мембранных усилий в окрестности закрепленной таким образом точки. Более удачным решением является введение во все узлы фундаментной плиты упругих горизонтальных опор, моделирующих фактическое поведение грунтового основания,

которое не только препятствует вертикальным перемещениям, но и оказывает сопротивление горизонтальным смещениям.



**Рис. 8.34.** Прогибы, изгибающие моменты  $M_x$  и мембранные усилия  $N_x$  изолированной фундаментной плиты и фундаментной плиты работающей в составе конструкций подвала

По рекомендации СНиП 2.02.05-87 «Фундаменты машин с динамическими нагрузками» коэффициент упругого равномерного сдвига (жесткость упругой горизонтальной связи) принимается равным величине  $0,7C_z$ , где  $C_z$  — коэффициент упругого равномерного сжатия (жесткость упругой вертикальной связи).

В заключение отметим, что в тех случаях, когда расчетная схема создается по типу рис. 8.32,б упругие горизонтальные связи

участвуют в работе фундаментной плиты и снижают величины мембранных усилий в ней.

### 8.7.3. Об использовании конечноэлементной модели основания

Логичнее всего совместную работу сооружения и основания учитывать в рамках единой модели, где основание представлено некоторой «областью влияния», внутри которой наносится конечноэлементная сетка. Внешние границы этой области грунта выбираются так, чтобы краевые эффекты на этих границах практически не сказывались на напряжениях под сооружением. Обычно для этого следует удалить границу «области влияния» на 3 – 4 максимальных размера фундамента, но не более  $1...1,5$  высоты сжимаемой толщи под фундаментом.

Типичным примером может служить схема, представленная на рис. 8.35, где показан обычно используемый прием разрежения сетки конечных элементов в области, занимаемой основанием, по мере удаления от конструкций надземной части. При назначении удаления границ грунтовой области можно использовать соображения, приведенные в разделе 5.1.

Нижняя граница может быть принята на поверхности подстилающей скалы или слоя грунта, модуль упругости которого примерно на порядок превышает модуль упругости непосредственно под фундаментом. Если таких слоев нет, то можно использовать рекомендации СНиП 2.02.01–83 о назначении толщины сжимаемого слоя грунта, хотя эти рекомендации и относятся не к комплексным расчетам моделей «здание-основание», а к определению осадок. Примерно на такое же расстояние ширина грунтовой зоны должна превышать ширину здания.

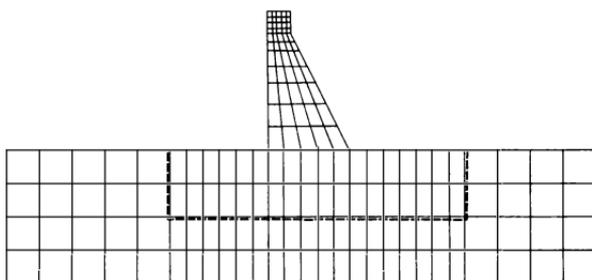
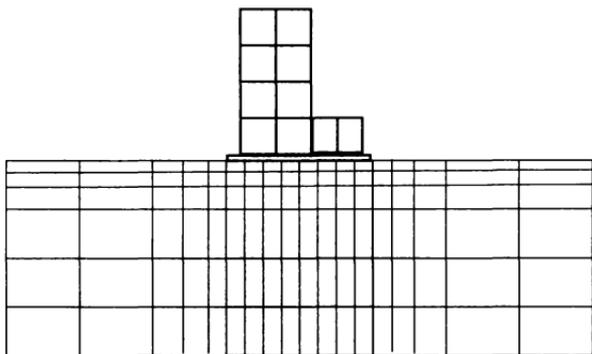


Рис. 8.35. Сетка конечных элементов упругого основания



**Рис. 8.36.** Конечноэлементная модель с указанием границ «малой» и «большой» области, занимаемой основанием плотины

Такое назначение границ грунтовой зоны является вполне удовлетворительным при выполнении статических расчетов, но для динамических расчетов может оказаться неверным. Дело в том, что упругие волны, которые, например, при сейсмическом воздействии беспрепятственно уходят в полубесконечное основание, будут отражаться от границ области (так называемый «эффект коробки»). Для парирования этого эффекта на краях области необходимо поставить специальные граничные условия. В частности, здесь могут быть использованы *поглощающие границы*, которые гасят волны, приходящие извне (например, сейсмические) или *пропускающие границы*, гасящие волны от возмущений, вызванных сооружением [Lysmer, Kuhlemeyer, 1969], [Бирбраер, 1998].

Е. Вильсон [Wilson, 1997] приводит данные о результатах расчета тестовой задачи, в качестве которой рассматривался расчет плотины на естественном основании. Ее конечноэлементная модель представлена на рис. 8.36. Результаты сведены в таблицу 8.4.

**Таблица 8.4.**

Параметры	Плотина без основания	«Малая» область	«Большая» область
Общая масса, [т×сек <sup>2</sup> /м]	33,41	236,710	1382,04
Периоды собственных колебаний, [сек]	0,335 – 0,158	0,404–0,210	0,455 – 0,371
Максимальное смещение, [см]	1,65	3,25	3,33

Если инерционные свойства основания не учитывались, то результаты имели вид, представленный в табл. 8.5.

Таблица 8.5.

Параметры	Плотина без основания	«Малая» область	«Большая» область
Общая масса, [т×сек <sup>2</sup> /м]	33,41	33,41	33,41
Периоды собственных колебаний, [сек]	0,335 – 0,158	0,400 – 0,210	0,415 – 0,207
Максимальное смещение, [см]	1,65	3,22	3,63

Следует также отметить, что использование конечноэлементной модели основания позволяет учесть целый ряд эффектов, например сложный рельеф местности. Соответствующий пример, заимствованный из демонстрационной версии программы STRAUS7, показан на рис. 8.37.

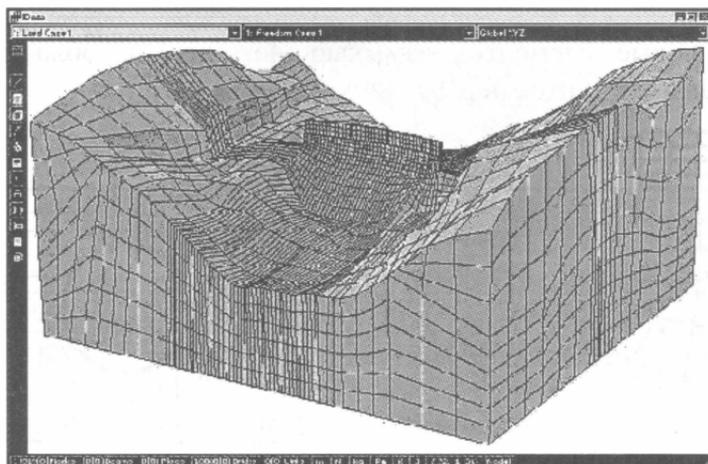


Рис. 8.37. Конечноэлементная модель плотины и грунтового массива

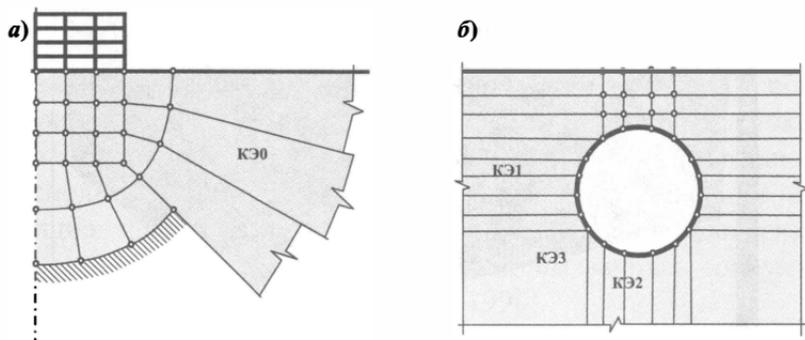
Вопрос о выборе модели упругого основания весьма своеобразно может решаться в случае, когда решается задача о расчете сооружений, имеющих характерную протяженность в одном направлении. Тогда анализ их работы в перпендикулярной плоскости сводится к рассмотрению условий плоской деформации (например, тоннель метрополитена) и здесь, как и в случае плиты на грунте могут быть применены полубесконечные конечные элементы, несколько отличные от предложенных в работе [Елсукова, Сливкер, 1976].

Так, например, в работе Тананайко [2001] была использована плоская расчетная схема, в соответствии с которой контур сооружения вписывался в полуокружность, внутри которой применяются обычные конечные элементы плоской задачи теории упругости, а вне этой полуокружности вводятся специальные

радиально направленные конечные элементы, неограниченно простирающиеся вглубь грунтового массива. Некоторые из таких элементов могут иметь и ограниченную протяженность (рис. 8.36.а) и это позволяет реализовать случай «отражающих волны» и «пропускающих волны» границ в динамической задаче.

Другая аппроксимация полубесконечной деформируемой области предложена в работе [Уздин и др., 1993], в которой предлагалось использовать три типа неограниченных конечных элементов (рис. 8.38,б):

- двухузловые элементы в виде горизонтальных полос постоянной ширины;
- двухузловые элементы в виде вертикальных полос постоянной ширины;
- одноузловые элементы, замыкающие плоские области между группами элементов первых двух типов.



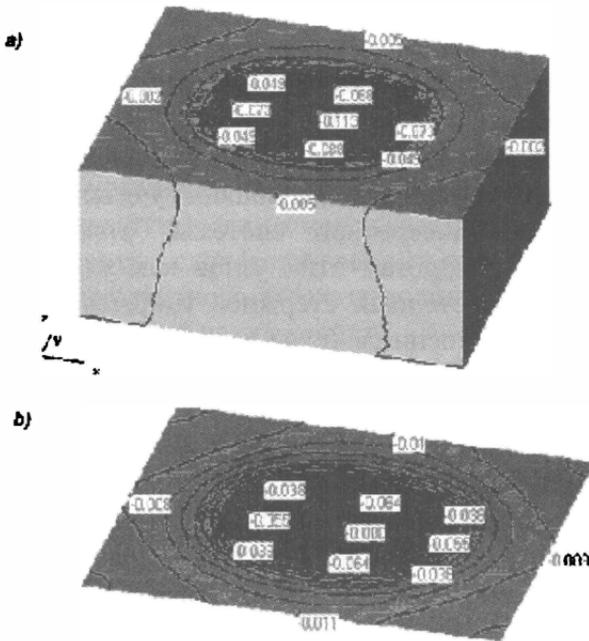
**Рис. 8.38.** Полубесконечные конечные элементы плоской задачи теории упругости

Возвращаясь к задачам статики, отметим, что представляет значительный интерес ответ на вопрос о том, как соотносятся друг с другом результаты расчета, в которых упругое основание представлено различными, часто используемыми моделями упругого основания.

Как показывает анализ, расчеты по двухконстантной (Пастернаковской) модели основания, которая реализована во многих компьютерных программах, получивших широкое распространение, обычно дают удовлетворительное совпадение с расчетами по упругой пространственной модели грунта (рис. 8.39).

Возвращаясь к задачам статики, отметим, что представляет значительный интерес ответ на вопрос о том, как соотносятся друг с другом результаты расчета, в которых упругое основание

представлено различными, часто используемыми моделями упругого основания.



**Рис. 8.39.** Сравнение расчета плиты по различным моделям основания. Изображены изолинии осадок (м): *a)* расчет плиты по пространственной упругой модели грунта; *b)* расчет плиты по двухконстантной модели

Как показывает анализ, выполненный в работе [www.geores.narod.ru], расчеты по двухконстантной (Пастернаковской) модели основания, которая реализована во многих компьютерных программах, получивших широкое распространение, обычно дают удовлетворительное совпадение с расчетами по упругой пространственной модели грунта (рис. 8.39).

## 8.8. Бистержневая модель тонкостенного стержня открытого профиля <sup>10</sup>

Тонкостенные стержни открытого профиля широко применяются в инженерных конструкциях в самых различных областях техники. Общая теория расчета тонкостенных стержней и стержневых систем, составленных из них, в своем законченном виде разработана в трудах

<sup>10</sup> Раздел 8.8 написан совместно с Кунцевичем А.О.

В.З.Власова, и в настоящее время хорошо известна. Вместе с тем, при использовании современных средств автоматизации проектирования инженеры, занимающиеся расчетом конструкций, испытывают определенные трудности, сталкиваясь с необходимостью расчета механических систем, в состав которых входят тонкостенные стержни открытого профиля. Дело в том, что подавляющее большинство расчетных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов, позволяют учитывать до 6 степеней свободы в узлах дискретной системы, отвечающих линейным перемещениям и поворотам этих узлов как жестких тел. В то же время, теория тонкостенных стержней открытого профиля требует введения седьмой степени свободы в примыкающих к тонкостенным стержням узлах. Эта седьмая степень свободы отвечает депланационной составляющей узлового перемещения. Напомним, что под депланацией понимается выход поперечного сечения тонкостенного стержня из плоскости, причем, в соответствии с теорией В.З.Власова мерой депланации служит скорость изменения угла закручивания стержня вдоль его продольной оси.

Нашей целью здесь является демонстрация специального приема, позволяющего обойти эти затруднения, не выходя за рамки требований стандартного расчетного программного комплекса, основанного на методе конечных элементов и позволяющего вводить в каждый из узлов расчетной схемы не более 6 степеней свободы<sup>11</sup>. Как будет показано далее, этот прием основан на построении специальной модели, которую мы назовем *«бистержневой моделью тонкостенного стержня»*.

### 8.8.1. Построение бистержневой модели

Если обратиться к дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях, описывающих изгиб и кручение тонкостенного стержня открытого профиля, записанным относительно перемещений линии центров сдвига поперечных сечений тонкостенного стержня открытого профиля, то можно увидеть, что все отличие в этих уравнениях от аналогичных им уравнений классической теории стержней сплошного сечения заключается в одном уравнении, а именно в уравнении для угла закручивания  $\theta_x$  относительно

<sup>11</sup> В соответствии с введенной нами ранее терминологией, речь здесь идет о возможности применения конечных элементов с твердотельными узлами к расчету тонкостенных стержней.

продольной оси стержня  $X$ . Это уравнение для тонкостенного стержня имеет вид

$$(EI_{\omega}\theta_x'')'' - (GI_x\theta_x')' = m_x, \quad (8.104)$$

где  $I_{\omega}$  — секториальный момент инерции сечения стержня,  $I_x$  — момент инерции при чистом кручении,  $E$  и  $G$  — модули упругости и сдвига материала стержня.

В правой части уравнения (8.104) записывается выражение для внешнего погонного крутящего момента, взятого относительно оси, проходящей через центры сдвига поперечных сечений стержня.

При кручении тонкостенного стержня полный крутящий момент в сечении  $M_x$  складывается из двух величин

$$M_x = M_{\omega} + H, \quad (8.105)$$

где  $H$  — момент чистого кручения, являющийся интегральной характеристикой касательных напряжений, распределенных по толщине стенок сечения по линейному закону,  $M_{\omega}$  — момент стесненного кручения (иногда называемый изгибно-крутящим моментом), порождаемый касательными напряжениями, распределенными равномерно по толщине стенок сечения стержня.

Известно, что эти составляющие полного крутящего момента связаны с углом закручивания  $\theta_x$  следующими дифференциальными зависимостями

$$M_{\omega} = -(EI_{\omega}\theta_x'')', \quad H = GI_x\theta_x'. \quad (8.106)$$

Возникающие при кручении тонкостенного стержня нормальные напряжения  $\sigma$  в сечении порождают бимомент  $B$ , который также определяется через угол закручивания  $\theta_x$ , а именно

$$B = -EI_{\omega}\theta_x''. \quad (8.107)$$

При построении отмеченной выше бистержневой модели тонкостенного стержня, оперирующей шестью степенями свободы в узлах, удобно исходить из энергетических соображений. С этой целью приведем выражение для потенциальной энергии деформации  $E$ , накапливаемой в тонкостенном стержне при его закручивании. Имеем

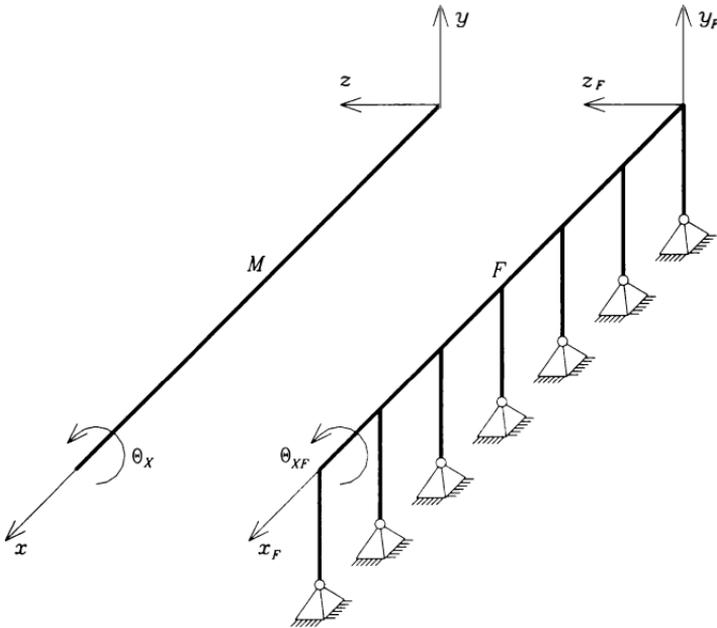
$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [E I_{\omega}(\theta_x'')^2 + GI_x(\theta_x')^2] dx, \quad (8.108)$$

где  $l$  — длина стержня.

В качестве предлагаемой бистерженной модели рассмотрим механическую систему, состоящую из двух стержней одинаковой длины  $l$ , которые назовем *основным* и *фиктивным* стержнями.

Оба эти стержня рассматриваются в классической постановке, то есть в рамках теории Бернулли-Эйлера для стержней сплошного сечения, и поэтому не требуют введения в расчетную схему каких-либо дополнительных степеней свободы.

Пусть  $(X, Y, Z)$  — местная система координат основного стержня, а  $(X_F, Y_F, Z_F)$  — фиктивного стержня. Оси  $X$  и  $X_F$  — продольные оси, а пары осей  $(Y, Z)$  и  $(Y_F, Z_F)$  — главные центральные оси инерции сечений основного и фиктивного стержней (рис. 8.40).



**Рис. 8.40.** Основной и фиктивный стержни

Заметим, что в практических расчетах удобно выбирать ось  $X_F$ , идущей параллельно оси  $X$ .

Здесь и далее дополнительным нижним индексом F помечаются величины, относящиеся к фиктивному стержню, тогда как аналогичные величины, относящиеся к основному стержню, никакой дополнительной пометкой не оснащаются.

Между перемещениями поперечных сечений стержней (основного и фиктивного) устанавливаем связь, обеспечивающую равенство углов поворотов сечений этих двух стержней относительно осей  $X$  и  $X_F$ , то есть

$$\theta_x = \theta_{x_F}. \quad (8.109)$$

Кроме того, на перемещения фиктивного стержня накладываем внешние связи, препятствующие смещениям точек его продольной оси в осевом направлении (вдоль оси  $X_F$ ) и в направлении одной из главных осей инерции. Для определенности будем считать, что эта последняя связь препятствует перемещениям по направлению оси  $Y_F$ . Линейные перемещения фиктивного стержня вдоль другой главной оси свяжем с углом закручивания  $\theta_{x_F}$  соотношением

$$w_F = r \theta_{x_F}, \quad (8.110)$$

где через  $w_F$  обозначено перемещение центра тяжести сечения фиктивного стержня в направлении оси  $Z_F$ , а  $r$  — некоторая константа, которой мы можем распорядиться по своему усмотрению.

Легко заметить, что на механическом уровне наложенные на фиктивный стержень внешние связи интерпретируются как подкрепление фиктивного стержня частотолом абсолютно жестких рычагов (рис. 8.41), направленных вдоль оси  $Y_F$  и имеющих длину  $r$ .

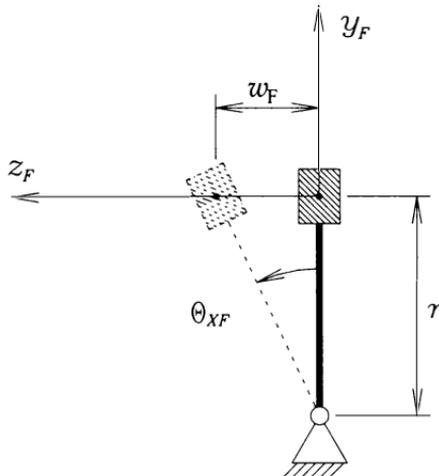


Рис. 8.41. Механизм связи угла поворота и линейного смещения

Нижние концы рычагов закреплены от всех линейных перемещений и поворотов вокруг оси  $Z_F$ . На рис. 8.41 закрепление от поворотов вокруг оси  $Z_F$  не показано, чтобы не затемнять схему. Из геометрических соображений (рис. 8.41), вытекающих из условия абсолютной жесткости рычагов, немедленно следует равенство (8.110).

Таким образом, при закручивании основного стержня фиктивный стержень, благодаря установленным связям (8.109) и (8.110), получает поперечные перемещения  $w_F$  в направлении оси  $Z_F$ , вызывающие изгиб этого стержня относительно оси  $Y_F$ .

Энергия деформации  $E$  в построенной бистержневой модели является суммой энергий, накапливаемых порознь в основном и фиктивном стержнях. Если основной стержень наделить крутильной жесткостью  $GI_x$ , крутильную жесткость фиктивного стержня положить равной нулю, а жесткость фиктивного стержня при изгибе относительно оси  $Y_F$  обозначить  $EI_{yF}$ , то энергия деформации  $E$  запишется в виде

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{yF}(w_F'')^2 + GI_x(\theta_x')^2] dx, \quad (8.111)$$

что полностью совпадает с (8.108), если учесть соотношения (8.109) и (8.110), а изгибную жесткость фиктивного стержня определить соотношением

$$EI_{yF} = EI_\omega / r^2. \quad (8.112)$$

Таким образом, построенная бистержневая модель энергетически эквивалентна исходному тонкостенному стержню.

Покажем теперь, что внутренние силы в фиктивном стержне можно интерпретировать как обобщенные усилия в исходном тонкостенном стержне, возникающие при стесненном кручении.

Действительно, для фиктивного стержня изгибающий момент относительно оси  $Y_F$  может быть записан в виде

$$M_{yF} = -EI_{yF} w_F'', \quad (8.113)$$

откуда с учетом все тех же зависимостей (8.109), (8.110), (8.112), и принимая во внимание (8.107), получаем

$$B = r M_{yF}. \quad (8.114)$$

Далее, поперечная сила  $Q_{zF}$  является производной от момента  $M_{yF}$ , то есть

$$Q_{zF} = M_{yF}', \quad (8.115)$$

а изгибно-крутящий момент  $M_\omega$ , в свою очередь, получается дифференцированием бимоента  $B$ , что следует из (8.106) и (8.107). Отсюда находим, что

$$M_\omega = r Q_{zF}. \quad (8.116)$$

Итак, бимомент  $B$  и момент стесненного кручения  $M_{\omega}$  с точностью до множителя  $r$  совпадают соответственно с изгибающим моментом  $M_{yF}$  и поперечной силой  $Q_{zF}$ , возникающими в фиктивном стержне. В практических расчетах удобно положить  $r = 1$  в принятой системе единиц измерения длин.

Естественно, что при построении дискретной схемы бистержневой модели мы не сможем обеспечить выполнение условий связи (8.109) непрерывно вдоль всей оси  $X$  от нуля до  $l$ . Однако, разбив основной стержень по длине на некоторое количество (скажем,  $n$ ) участков, устанавливаем тем самым на нем  $n + 1$  узел, включая начальный и конечный узлы. Пусть это будут узлы  $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ . Разбивая теперь фиктивный стержень на точно такие же участки, образуем на нем соответствующие узлы  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ . Теперь непрерывные условия связи (8.109) можно приближенно заменить дискретными связями, заданными на конечном множестве точек с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , а именно в  $n+1$  узлах основного и фиктивного стержней бистержневой модели. Соответственно и абсолютно жесткие рычаги в системе с дискретными связями сохраняются только в образованных узловых точках.

Может возникнуть вопрос, а куда же в бистержневой системе подевалась та злополучная седьмая степень свободы узлов тонкостенного стержня, о которой говорилось в начале этого раздела? Ответ прост: седьмая степень свободы, связанная с депланацией  $\theta'_x$  не исчезла бесследно, она лишь внешне изменилась, превратившись в  $\theta_{yF}$ . Действительно, для бистержневой модели имеем

$$\theta'_x = \theta'_{xF} = w'_F / r = -\theta_{yF} / r. \quad (8.117)$$

Однако, если  $\theta'_x$  нельзя напрямую связать с перемещениями узлов как жестких тел, то величина  $\theta_{yF}$  естественным образом интерпретируется как повороты узлов фиктивного стержня относительно оси  $Y_F$ . Именно это обстоятельство и позволяет выполнять расчет тонкостенного стержня, оставаясь в рамках ограничений стандартного программного обеспечения, оперирующего конечными элементами с твердотельными узлами.

Если воспользоваться программой **SCAD**, то для задания связей вида

$$\theta_x(x_i) = \theta_{xF}(x_i), \quad (8.118)$$

гарантирующих равенство углов поворота соответствующих узлов основного и фиктивного стержней, имеется заложенный в эту программу специальный инструмент «*объединение перемещений*», реализованный в графической среде этой системы. В программе

**GTSTRUDL** этот же эффект достигается с помощью команд входного языка **JOINT TIES** и **SLAVE RELEASES**. Первая из этих команд обеспечивает равенство всех перемещений заданной пары узлов (в нашем случае это узлы  $M_i$  и  $F_i$ ), а вторая освобождает часть степеней свободы связанной пары узлов, восстанавливая их независимость.

Кстати говоря, для введения в расчетную схему абсолютно жестких рычагов, присоединенных к узлам фиктивного стержня, удобно воспользоваться такой возможностью расчетной программы, как задание эксцентриситетов в прикреплении стержня к узлам (бесконечно жестких вставок). В этом случае узлы фиктивного стержня  $F_i$  будут располагаться не вдоль центроидной линии (линии центров тяжести поперечных сечений) фиктивного стержня, а вдоль линии, соединяющей нижние концы рычагов.

Если в используемой программе заложена возможность задания смещения оси центров сдвига относительно центроидной оси стержня (в **GTSTRUDL**, в частности, такая возможность предусмотрена), то можно в исходной информации к задаче опустить задание эксцентриситетов, описывающих рычаги, и заменить их заданием величины  $e_{yF} = r$ , где  $e_{yF}$  — смещение оси центров сдвига фиктивного стержня относительно его центроидной оси. Первый из описанных выше приемов использован в приведенном далее примере №1, а второй прием — во втором примере.

### **Пример №1.**

Консольная балка швеллерного профиля и длины  $l = 4$  м нагружена сосредоточенной силой  $P = 13,13$  т, действующей в вертикальной плоскости, проходящей через ось центров тяжести сечений балки (рис. 8.42).

Геометрические характеристики сечения принимаются следующими

$$I_x = 1,34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4, \quad I_y = 5,333 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \quad I_z = 37,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4, \\ A_x = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2, \quad I_\omega = 1,524 \cdot 10^{-6} \text{ м}^6, \quad e_z = 0,1523 \text{ м}.$$

Характеристики материала балки

$$E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2, \quad G = 0,84 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2.$$

Точное решение этой задачи, полученное интегрированием уравнения (8.104), дает следующие результаты

$$\theta_x(l) = -0,41629, \quad B(0) = -3,3142 \text{ тм}^2,$$

причем вертикальное перемещение точки приложения силы  $P$  равняется

$$v(l) = -PI^3/(3EI_z) + \theta_x(l)e_z = -0,03573 - 0,06340 = -0,09913 \text{ м.}$$

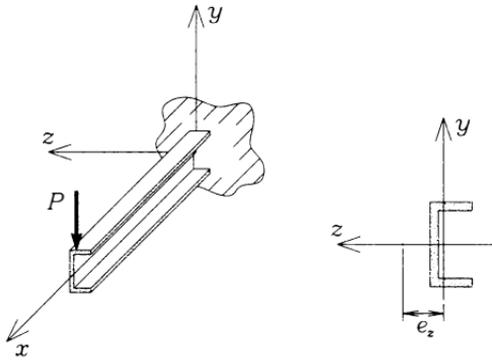


Рис. 8.42. Схема к примеру №1

Полагая для данной задачи  $n = 8$  при равных длинах участков разбиения, приведем описание исходных данных к программе **GTSTRUDL** для дискретной бистержневой модели.

В результате расчета получаем следующие значения

$$\theta_x(l) = -0,41728, \quad M_{yF}(0) = B(0) = -3,3016 \text{ тм}^2, \quad v(l) = -0,09929 \text{ м,}$$

что весьма близко к точным результатам.

Для сравнения приведем также результаты расчета по программе с четырьмя участками разбиения балки

$$\theta_x(l) = -0,42016, \quad M_{yF}(0) = B(0) = -3,2707 \text{ тм}^2, \quad v(l) = -0,09973 \text{ м.}$$

### 8.8.2. Бистержневая модель тонкостенного стержня, усиленного поперечными планками

В конструкциях пролетных строений мостов, конструкциях зданий, в рамах кузовов различного рода подвижных экипажей и иных возможных случаях применения тонкостенных стержней открытого профиля в различных областях техники нередко случаи усиления тонкостенных стержней поперечными планками. Назначение этих планок — увеличение жесткости стержня при работе его на кручение.

Ниже будет показано, как модифицировать бистержневую модель для того, чтобы учесть влияние поперечных планок на работу тонкостенного стержня.

Исходные данные для примера №1 при  $n = 8$ 

```

GTSTRU DL      'example 1'
UNITS M MTON RAD
$. . . . .
$ THIN WALLED CANTILEVER BEAM OF OPEN CROSS SECTION n = 8
$*****
GEN 2 JOINTS LIST
'M1' 0 0 0
'F1' 0 -1 1
REPEAT 8 TIMES ID 1 X 0.5
STATUS SUPPORT 'M1' 'F1' TO 'F9'
JOINT RELEASES
'F2' TO 'F9' MOM X Y
CONSTANTS
E 2.1E7; G 0.84E7; POISSON 0.25
TYPE SPACE FRAME
GEN 2 MEMBER LIST
'BEAM1' 'M1' 'M2'
'FICT1' 'F1' 'F2'
REPEAT 7 TIMES ID 1 F 1 T 1
MEMBER ECCENTR
'FICT1' TO 'FICT8' START 0 1 0 END 0 1 0
MEMBER PROPERTIES
'BEAM1' TO 'BEAM8' AX 120E-4 IX 134E-8 IY 5333E-8 -
IZ 37330E-8 EZ 0.1523
'FICT1' TO 'FICT8' AX 1E-20 IX 1E-20 IY 1.524E-6 -
IZ 1E-20
JOINT TIES
'M2' TO 'M9' EQUAL 'F2' TO 'F9'
SLAVE RELEASES
'M2' TO 'M9' FOR X Y Z MOM Y Z
LOAD 1
JOINT LOADS
'M9' FOR Y -13.132
STIFFNESS ANALYSIS
LIST DISPL; LIST REACT; LIST FOR

```

Пусть, например, тонкостенный стержень открытого профиля усилен поперечной планкой так, как это показано на рис. 8.43,а.

Будем считать, что поперечная планка соединяет точки  $A$  и  $B$  поперечного сечения стержня, причем расстояние между этими точками (длину планки) обозначим буквой  $a$ . Пусть  $h$  — толщина планки,  $b$  — ее ширина (размер сечения планки в направлении оси  $X$ ).

Оказывается, что для учета влияния планки в построенной бистержевой модели достаточно ввести часовую пружину в узел фиктивного стержня, размещенный по координате  $X_F$  точно в том же месте, где расположена поперечная планка (рис. 8.43,б). Эта часовая пружина препятствует повороту соответствующего узла  $F$  стержня вокруг оси  $Y_F$ . Жесткость введенной пружины обозначим через  $k$ , и подберем ее из условий энергетической эквивалентности тонкостенного стержня с планкой и бистержевой модели.

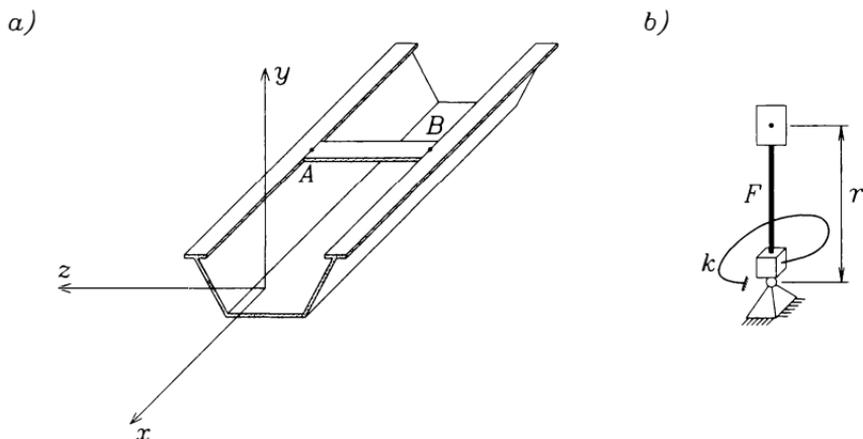


Рис. 8.43. Усиление тонкостенного стержня поперечной планкой

В процессе деформации тонкостенного стержня с планкой концевые сечения планки получают поступательные перемещения  $u_A$  и  $u_B$  вдоль оси  $X$ , а также повороты на некоторые углы  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  (рис. 8.44).

Пусть  $s$  — дуговая координата произвольной точки профиля поперечного сечения стержня, отсчитываемая от некоторой нулевой точки  $s = 0$  в принятом положительном направлении (рис. 8.45).

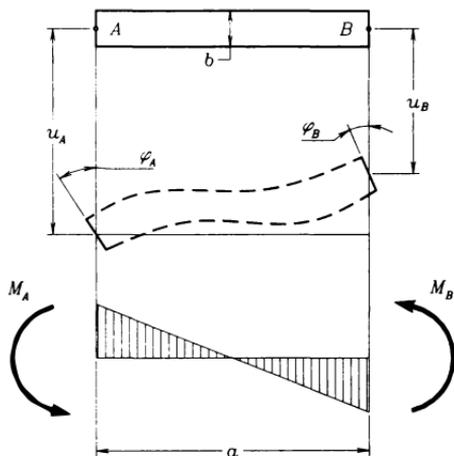


Рис. 8.44. Деформация планки

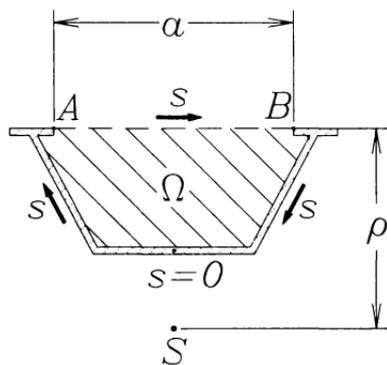


Рис. 8.45. Дуговая координата

Обозначим через  $u = u(x,s)$  и  $v = v(x,s)$  соответственно продольное и тангенциальное перемещения точек срединной поверхности тонкостенного стержня. Перемещение  $u$  считаем положительным, если оно направлено в сторону возрастания координаты  $x$  вдоль оси

Х. Тангенциальное перемещение  $v$  положительно, если оно направлено в сторону возрастания координаты  $s$ .

Из теории тонкостенных стержней открытого профиля известно, что при закручивании стержня продольное перемещение  $u$  пропорционально депланации  $\theta'_x$ , точнее

$$u(x, s) = -\theta'_x \omega(s), \quad (8.119)$$

где  $\omega(s)$  — секториальная координата точки сечения с дуговой координатой  $s$ .

Следуя (8.119), находим, что интересующие нас перемещения  $u_A$  и  $u_B$  (рис. 8.44) определяются, соответственно, как

$$u_A = -\theta'_x \omega_A, \quad u_B = -\theta'_x \omega_B, \quad (8.120)$$

где  $\omega_A$  и  $\omega_B$  — секториальные координаты точек  $A$  и  $B$  прикрепления планки.

На самом деле, нас будет интересовать относительное продольное перемещение точек  $A$  и  $B$ , то есть величина

$$\Delta = u_A - u_B = -\theta'_x (\omega_A - \omega_B). \quad (8.121)$$

Можно показать, что разность секториальных площадей  $\omega_A$  и  $\omega_B$  определяется следующей простой зависимостью

$$\omega_A - \omega_B = \Omega - \rho a, \quad (8.122)$$

где  $\Omega$  — удвоенная площадь, ометаемая замкнутым контуром, образуемым после соединения прямой линией точек  $A$  и  $B$ , а  $\rho$  — расстояние от центра сдвига  $S$  до прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$  (рис. 8.45). Иначе говоря,

$$\Delta = -\theta'_x (\Omega - \rho a). \quad (8.123)$$

Далее, из геометрических соображений следует, что повороты концевых сечений планки  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  в плоскости планки определяются частными производными

$$\varphi_A = \frac{\partial v}{\partial x}(x_s, s_A), \quad \varphi_B = \frac{\partial v}{\partial x}(x_s, s_B), \quad (8.124)$$

где  $x_s$  — продольная координата точек  $A$  и  $B$ ,  $s_A$  и  $s_B$  — дуговые координаты тех же точек.

Поскольку при построении теории тонкостенных стержней открытого профиля используется гипотеза об отсутствии сдвигов в срединной поверхности стержня, то есть

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (8.125)$$

то отсюда и из (8.119) и (8.124) следует, что

$$\varphi_A = \theta'_x(x_s) \omega'(s_A), \quad \varphi_B = \theta'_x(x_s) \omega'(s_B). \quad (8.126)$$

Обратим внимание на то, что в формулах (8.126) производная от  $\omega$  берется в направлении возрастания координаты  $s$  вдоль оси планки. Несложно заметить, что

$$\omega'(s_A) = \omega'(s_B) = \rho, \quad (8.127)$$

поэтому

$$\varphi = \varphi_A = \varphi_B = \theta'_x \rho. \quad (8.128)$$

Формулами (8.123) и (8.128) определяются все концевые перемещения планки, изображенные на рис. 8.44. В результате эпюра моментов  $M$ , возникающих в планке, будет иметь вид, изображенный в нижней части рис. 8.44, при этом

$$M_A = M_B = EI (\Delta - a\varphi) \delta/a^2, \quad \delta = 6a^2 GF/(12EI + a^2 GF), \quad (8.129)$$

где  $I$  — момент инерции сечения планки,  $F$  — площадь поперечного сечения планки при сдвиге (с учетом коэффициента формы сечения).

Для планки прямоугольного сечения с принятыми ранее размерами имеем

$$I = hb^3/12, \quad F = 5hb/6. \quad (8.130)$$

Воспользовавшись теперь (8.123) и (8.128), перепишем выражение для изгибающих моментов на концах планки в виде

$$M_A = M_B = -EI \theta'_x \Omega \delta/a^2. \quad (8.131)$$

Зная распределение в планке изгибающих моментов  $M$  (рис. 8.44), можно подсчитать величину энергии деформации  $E_s$ , накапливаемой в планке

$$E_s = \int_0^l \left( \frac{M^2}{2EI} + \frac{Q^2}{2GF} \right) ds = EI (\theta'_x)^2 \Omega^2 \delta/a^3, \quad (8.132)$$

где  $Q$  — поперечная сила в планке

$$Q = 2M_A / a = -2EI \theta'_x \Omega \delta/a^3. \quad (8.133)$$

Как уже было сказано, в бистержневой модели планка заменяется часовой пружиной с жесткостью  $k$ , так что энергия, аккумулируемая в пружине, определяется выражением

$$E_s = k(\theta_{yF})^2/2. \quad (8.134)$$

Поскольку для бистерженной модели справедливо равенство

$$\theta_{yF} = -w'_{yF} = -r \theta'_x, \quad (8.135)$$

то отсюда и из (8.134) получаем

$$E_s = kr^2 (\theta'_x)^2/2. \quad (8.136)$$

Приравнявая из энергетической эквивалентности выражения для  $E_s$  по (8.136) и (8.132), находим окончательно жесткость часовой пружины

$$k = \frac{2EI\delta}{a^3} \left( \frac{\Omega}{r} \right)^2. \quad (8.137)$$

Интересующая расчетчика поперечная сила  $Q$  в планке определяется через момент  $M_{ys}$ , развиваемый в упругой пружине. В самом деле, имеем

$$M_{ys} = k\theta_{yF} = -\frac{2EI\delta}{a^3} \left( \frac{\Omega}{r} \right)^2 r \theta'_x. \quad (8.138)$$

Из сопоставления (8.133) и (8.138) получим

$$Q = M_{ys}r/\Omega. \quad (8.139)$$

Заметим также, что произведение  $M_{ys}r$  определяет величину скачка в эпюре бимоментов тонкостенного стержня, образующегося в сечении, где размещена планка. На дальнейших деталях не останавливаемся.

### Пример №2.

В качестве примера приведем расчет фахверкового прогона, рассмотренный в книге В.З.Власова [1963], стр. 175–177. Поперечное сечение прогона, составленное из двух швеллеров, показано на рис. 8.44. Там же показано положение центра тяжести сечения  $S$ , главные центральные оси инерции сечения стержня  $Y$  и  $Z$ , а также положение центра сдвига  $S$ . Все размеры на рис. 8.46 даны в сантиметрах.

Геометрические характеристики сечения, вычисленные В.З.Власовым, следующие

$$I_x = 6,17 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad I_y = 976,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad I_z = 383,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \\ F_x = 30,72 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad I_\omega = 4829 \cdot 10^{-12} \text{ м}^6, \quad e_y = 0,0425 \text{ м}, \quad e_z = -0,0248 \text{ м}.$$

Характеристики материала те же, что даны в примере №1. Длина пролета  $l = 3$  м. Прогон шарнирно оперт по концам и нагружен равномерно распределенной вертикальной нагрузкой интенсивностью  $q = 0,9$  т/м, приложенной с эксцентриситетом  $e = 0,0711$  м относительно центра сдвига.

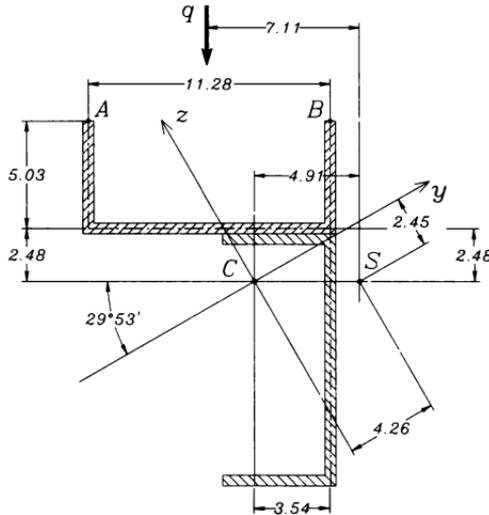


Рис. 8.46. Сечение прогона к примеру №2

На концах прогона приварено по одной планке следующих размеров

$$a = 0,1128 \text{ м}, \quad h = 0,006 \text{ м}, \quad b = 0,10 \text{ м}$$

при этом для планки получаем

$$F = 5 \times 6 \times 1 \times 10^{-4} / 6 = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad I = 50 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Удвоенная площадь, заключенная между контуром сечения и замыкающей планкой (рис. 8.46)

$$\Omega = 2 \times 11,28 \times 5,03 \times 10^{-4} = 113,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Полагая  $r = 1$  м и производя необходимые вычисления, получаем

$$\delta = \frac{6 \cdot 0,1128^2 \cdot 0,4E \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{12E \cdot 50 \cdot 10^{-8} + 0,1128^2 \cdot 0,4 \cdot E \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 4,487,$$

$$k = \frac{2,1 \cdot 10^7 \cdot 50 \cdot 10^{-8}}{0,1128^3} \cdot 2 \cdot 4,487 \cdot \left( \frac{113,5}{1} \cdot 10^{-4} \right)^2 = 8,458 \text{ тм}.$$

Приведем описание исходных данных к этой задаче, положив  $n = 12$ .

Исходные данные для примера №2 при  $n = 12$ 

```

GTSTRU DL      'example 2'
UNITS  M  MTON  RAD
$.....
$ FREE SUPPORTED BEAM OF OPEN CROSS SECTION WITH 2 SLATS
$
$              n = 12
$*****
GEN 2 JOINTS LIST
  'M1' 0      0      0
  'F1' 0      -1     0
REPEAT 1 TIMES ID 12 X 3
GEN 2 JOINTS LIST
  'M2' 0.05   0      0
  'F2' 0.05   -1     0
REPEAT 10 TIMES ID 1 X 0.29
STATUS SUPPORT 'M1' 'M13' 'F1' TO 'F13'
JOINT          RELEASES
  'M1'          MOM Y Z
  'M13' FOR X   MOM Y Z
  'F1' 'F13'    MOM Y
  'F2' 'F12'    'MOM X KMY 3.3682
  'F3' TO 'F11' MOM X Y
CONSTANTS
E 2.1E7;          G 0.84E7;          POISSON 0.25
BETA -1.0492 ALL BUT 0.0 'FICT1' TO 'FICT12'
TYPE SPACE FRAME
GEN 2 MEMBER LIST
  'BEAM1'          'M1'          'M2'
  'FICT1'          'F1'          'F2'
REPEAT 11 TIMES ID 1 F 1 T 1
MEMBER          PROPERTIES
'BEAM1' TO 'BEAM12' AX 30.72E-4 IX 6.17E-8 IY 976.8E-8 -
                      IZ 383.8E-8 EY 0.0425 EZ -0.0248
'FICT1' TO 'FICT12' AX 1E-20 IX 1E-20 IY 4829E-12 -
                      IZ 1E-20 EY 1.0
JOINT          TIES
  'M2' TO 'M12' EQUAL 'F2' TO 'F12'
SLAVE RELEASES
  'M2' TO 'M12'          FOR X Y Z          MOM Y Z
LOAD          1
MEMBER LOADS FOR Y GLOBAL
  'BEAM1' TO 'BEAM12' UNI -0.9
MEMBER LOADS MOM X GLOBAL
  'BEAM1' TO 'BEAM12' UNI 0.0198
STIFFNESS ANALYSIS
LIST DISPL;          LIST REACT;          LIST FOR

```

Длины концевых участков разбиения стержней бистержневой модели принимаем равными 5 см, все промежуточные участки принимаются равной длины по 29 см. При таком разбиении оси планок точно совмещаются с положением узлов дискретной схемы бистержневой модели.

В результате расчета получаем, в частности, моменты в модельных пружинах  $M_{ys} = 0,0304$  тм и, следовательно, поперечная сила в планке

$$Q = 0,0304 \cdot \frac{1}{113,5 \cdot 10^{-4}} = 2,68 \text{ т.}$$

В.З.Власовым для этой же задачи получено  $Q = 2,73 \text{ т.}$

### 8.8.3. Усиление тонкостенного стержня поперечной диафрагмой

Случай усиления тонкостенного стержня поперечной диафрагмой укладывается в рамки бистержневой модели, используемой при усилении стержня поперечными планками. Все изменение относится только к определению коэффициента жесткости  $k$  часовой пружины, сопротивляющейся повороту соответствующего узла  $F$  фиктивного стержня вокруг оси  $Y_F$ .

Действительно, как это известно (см. стр. 191 цитированной выше работы В.З.Власова), поперечная диафрагма толщиной  $h$  вызывает скачок в эпюре бимоментов, величина которого  $B$  определяется формулой

$$B = - \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \Omega \theta_x', \quad (8.140)$$

где  $\Omega$  — удвоенная площадь пластинки-диафрагмы, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона<sup>12</sup>.

С другой стороны, мы уже выяснили, что скачок в эпюре бимоментов в нашей модели совпадает с произведением  $M_{ys}r$ . Отсюда и из (8.117) получаем

$$M_{ys} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\Omega}{r^2} \theta_{yF}. \quad (8.141)$$

Теперь ясно, что при усилении стержня пластиной-диафрагмой жесткость соответствующей диафрагме часовой пружины следует положить равной множителю при угле поворота  $\theta_{yF}$  в правой части формулы (8.141), то есть

$$k = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\Omega}{r^2}. \quad (8.142)$$

На дальнейших деталях не останавливаемся.

<sup>12</sup> В.З.Власовым эта формула под номером (4.13) приводится без знака минус, что объясняется различием в принятых правилах знаков.

### 8.8.4. Математическая трактовка бистержневой модели и ее дискретной схемы

На первый взгляд может показаться, что дискретная схема бистержневой модели является вариантом использования обычной схемы метода конечных элементов. Однако, если вернуться к результатам расчета примера №1 и подсчитать работу внешних сил, которая по теореме Клапейрона равняется потенциальной энергии, запасаемой механической системой в процессе ее деформирования, то получим, что

- $E = 13,13 \times 0,09913 \times 0,5 = 0,6508$  тм — точное значение энергии,
- $E_8 = 13,13 \times 0,09929 \times 0,5 = 0,6518$  тм — энергия дискретной схемы при  $n = 8$ ,
- $E_4 = 13,13 \times 0,09973 \times 0,5 = 0,6547$  тм — энергия дискретной схемы при  $n = 4$ .

Таким образом, примененная дискретная схема с увеличением числа участков разбиения (точнее, с устремлением к нулю максимальной из длин участков) сходится по энергии к точному решению задачи не сверху, как это имеет место для стандартного варианта метода конечных элементов, а снизу, поскольку

$$-E > -E_8 > -E_4. \quad (8.143)$$

Для того, чтобы разобраться с этим обстоятельством, обратимся к вариационной постановке задачи расчета на кручение тонкостенного стержня открытого профиля. С этой целью выпишем выражение для полной потенциальной энергии системы — функционал Лагранжа  $L$ . Имеем

$$L(\theta_x) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_\omega(\theta''_x)^2 + GI_x(\theta'_x)^2] dx - \int_0^l m_x \theta_x dx. \quad (8.144)$$

В положении равновесия функционал  $L$  принимает минимальное значение, причем минимум отыскивается на множестве функций  $\theta_x$ , обладающих второй обобщенной квадратично суммируемой производной и удовлетворяющих главным (кинематическим) краевым условиям. Уравнением Эйлера для функционала  $L$  служит уравнение (8.104).

Легко заметить, что эта вариационная постановка задачи может быть переформулирована как задача на условный экстремум, а именно как задача поиска точки минимума функционала  $L_B$ , зависящего от двух неизвестных функций

$$L_B(\theta_x, \theta_{xF}) = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_\omega(\theta''_{xF})^2 + GI_x(\theta'_x)^2] dx - \int_0^l m_x \theta_x dx \quad (8.145)$$

при дополнительных условиях

$$\theta_x(x) = \theta_{xF}(x) . \quad (8.146)$$

Вводя формально новую переменную  $w_F = r\theta_{xF}$  и полагая  $EI_{yF} = EI_\omega/r^2$ , перепишем теперь функционал  $L_B$  в виде

$$L_B(w_F, \theta_x) = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{yF} (w_F'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GI_x (\theta_x')^2 dx - \int_0^l m_x \theta_x dx , \quad (8.147)$$

минимум которого отыскивается на множестве функций  $w_F$  и  $\theta_x$ , удовлетворяющих дополнительному условию связи

$$w_F(x) = r \theta_x(x) . \quad (8.148)$$

Вариационная постановка (8.147), (8.148) точно соответствует бистержневой модели. Первый интеграл в (8.147) отвечает изгибу фиктивного стержня, тогда как второй — чистому кручению основного стержня.

Предположим, что уравнения связей (8.148) выполняются не непрерывно, а только в некоторых заранее выбранных точках (узлах бистержневой модели)

$$w_F(x_i) = r \theta_x(x_i) , \quad (i = 1, \dots, n+1) . \quad (8.149)$$

Очевидно, что множество функций  $w_F, \theta_x$ , удовлетворяющих дискретным условиям (8.149), является расширением множества функций, удовлетворяющих непрерывным условиям (8.148). Иначе говоря, в дискретной расчетной схеме связи ослаблены. При расширении множества допустимых к сравнению функций минимум функционала может только понизиться.

Поскольку минимум полной потенциальной энергии системы равен значению ее энергии деформации  $E$ , взятой со знаком минус, то отсюда немедленно получаем оценку

$$-E > -E_n , \quad (8.150)$$

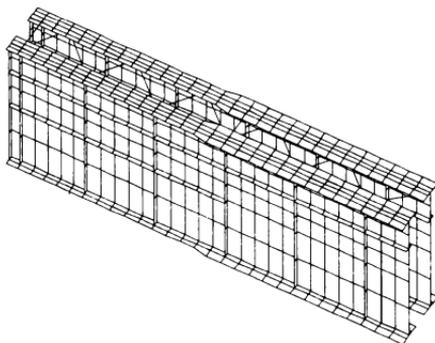
что и было замечено нами по результатам расчета примера №1.

Еще раз подчеркнем, что, в отличие от стандартной схемы метода конечных элементов, дискретизации здесь подвергается не сам функционал, а уравнения связей.

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что на самом деле дискретные связи (8.149) есть не что иное, как один из вариантов рассмотренных нами ранее *полисвязей*, так что бистержневая модель

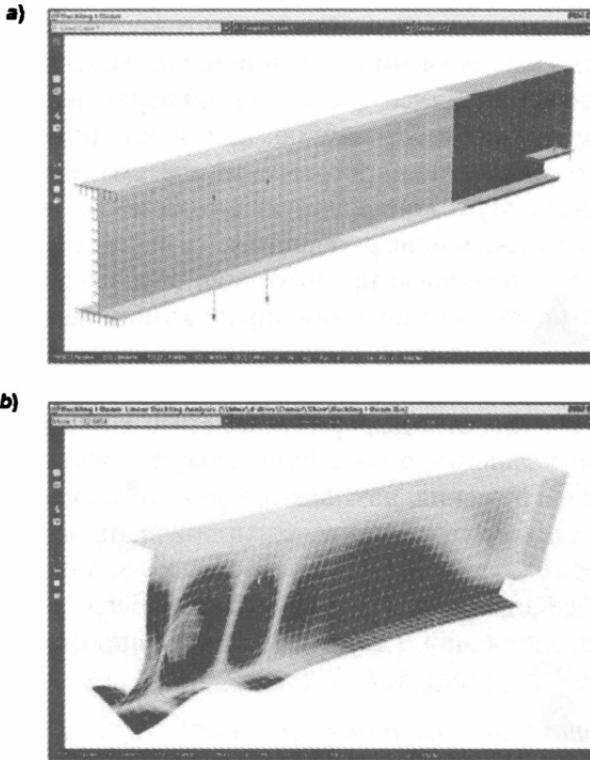
тонкостенного стержня лишний раз напоминает о преимуществах программного обеспечения, оснащенного этим мощным инструментарием формирования расчетных схем конструкций. Хотя, строго говоря, для применения дискретной бистержневой модели необходимости в оперировании общим случаем уравнений полисвязей нет, достаточно лишь (как это и имеет место быть в **SCAD** и **GTSTRUDL**) возможности отождествления части перемещений избранной пары узлов.

Представленный выше подход позволил реализовать расчетную модель В.З.Власова для тонкостенного стержня открытого профиля, уточняющую стандартный «сопроматный» подход. Однако в расчетной практике иногда оказывается недостаточным и этот уровень детализации, в особенности в тех случаях, когда необходимо учесть возможность искажения формы поперечного сечения стержня или другие тонкие эффекты. Тогда применяется моделирование тонкостенного стержня набором оболочечных конечных элементов, с помощью которого можно учесть практически все особенности работы такого стержня. Типичный пример представлен на рис. 8.47, где показан фрагмент расчетной схемы блока главных балок укрытия, возведенного над аварийным реактором Чернобыльской АЭС в 1986 году.



**Рис. 8.47.** Расчетная схема блока балок (фрагмент)

Оценка ее технического состояния, выполненная примерно через десять лет, потребовала учета всех обнаруженных дефектов исполнения и повреждений, полученных при монтаже и эксплуатации. Кроме того, столь детальная расчетная модель позволила корректно учесть возможность потери местной и общей устойчивости.



**Рис.8.48.** Конечнoэлементная модель сварной двутавровой балки: *a* – расчетная схема; *b* – форма потери устойчивости.

Вообще, когда речь идет о расчете отдельных элементов тонкостенных конструкций, переход от теории тонкостенных стержней к обычной конечнoэлементной модели, составленной из пластинчатых элементов, может оказаться вполне приемлемым и эффективным. Один из показательных результатов такого расчета представлен на рис. 8.48.

## 8.9. Расчетные сочетания нагрузок

Практически любая конструкция подвергается воздействию множества нагрузок различного вида, возникающих при возведении и эксплуатации сооружения. Расчет же чаще всего выполняется на отдельные (элементарные) варианты нагружения в предположении, что любой реальный вариант нагружения системы может быть представлен как линейная комбинация элементарных. Это предположение оправдано при линейном подходе к расчету,

поскольку только для линейных систем справедлив принцип суперпозиции. Использование «нелинейных конечных элементов», которыми снабжены многие расчетные программы, лишает смысла указанный подход, но, к сожалению, пользователи об этом не всегда помнят, так что «хорошая» программная система должна бы взять на себя соответствующую контрольную функцию и, по крайней мере, выдавать предупреждающие сообщения.

Мы будем в дальнейшем предполагать справедливость линейного подхода и отыскивать такие линейные комбинации элементарных нагрузений, которые, в некотором смысле, являются наихудшими, и позволяют с их помощью проверить выполнение ограничений по прочности, устойчивости, деформативности и т.п. Такие комбинации называются *расчетными*, а коэффициенты, с которыми в них входят элементарные нагружения, называются *интенсивностями*.

Сами сочетания нагрузок могут быть признаны недопустимыми из условий невозможности или пренебрежимо малой вероятности их совместного действия. Последнее чаще всего регламентируется нормами проектирования, где встречаются, например, записи такого типа [СНиП II-7-81\*], стр. 4:

*«...Горизонтальные нагрузки от масс на гибких подвесках, температурные климатические воздействия, динамические воздействия от оборудования и транспорта, тормозные и боковые усилия от движения кранов при этом не учитываются»*

При определении расчетных сочетаний учитываются логические связи между нагружениями, отражающими их физический смысл, и требования, регламентируемые различными нормативными документами. По отношению рассматриваемого нагружения к другим нагружениям можно выделить четыре типа логических связей:

- независимые (например, собственный вес и полезная нагрузка);
- взаимоисключающие (например, ветер слева и ветер справа или же сейсмическое воздействие вдоль разных осей координат);
- сопутствующие (например, тормозные, требующие обязательного присутствия вертикальных крановых нагрузок);
- одновременно действующие (например, ветровой напор и отсос, заданные в различных нагружениях).

Кроме того, нагружение может характеризоваться как знакопеременное, т.е. по физическому смыслу все его компоненты могут быть заменены на противоположно направленные. Типичным примером являются меняющиеся во времени сейсмические нагрузки,

для которых, по сути, указывается амплитудное значение, а направление их действия может меняться на противоположное.

Отношения взаимоисключения, сопутствия или одновременности являются бинарными, т.е. могут быть установлены между парами загружений. Их удобно представлять в виде таблиц, напоминающих таблицы розыгрыша футбольного чемпионата, если входящие в пару загрузки являются в логическом смысле равноправными (табл. 8.6). Это равноправие отношений относится к взаимоисключению и одновременности (действительно, нельзя указать, какое из них в этом случае превалирует). Здесь достаточно попросту указать, что некоторая пара загружений входит в такое соотношение, отметив это нажатием на кнопку в соответствующей клетке таблицы.

Таблица 8.6

	загрузка 1	загрузка 2	загрузка 3	загрузка 4	загрузка 5	загрузка 6	загрузка 7	загрузка 8
загрузка 1	-		+		+			
загрузка 2		-						
загрузка 3	+		-		+			
загрузка 4				-				
загрузка 5	+		+		-			
загрузка 6						-		
загрузка 7							-	
загрузка 8								-

Вообще говоря, ничто не запрещает какому-нибудь загружению входить в несколько парных взаимоотношений одновременности, образуя некоторую «семью» (например, в таких соотношениях находятся все одновременно действующие части нагрузки, отнесенные из каких-либо соображений к разным загружениям). Аналогичная полигамия возможна и во взаимоотношениях взаимоисключения, типичным примером которых может быть группа загружений, соответствующих ветру, направленному по различным румбам.

Отношение сопутствия не является равноправным для пары участвующих в нем загружений. Одно из них не может существовать без другого (трение без нормального давления), но обратное неверно (нормальное давление может иметь место и в отсутствие трения).

Поэтому строки и столбцы соответствующей таблицы (табл. 8.7) имеют разный статус. Чтобы подчеркнуть это, они помечены

заливкой разной интенсивности и указывается, что загрузки, помеченные менее интенсивной заливкой, не могут входить в сочетания без загрузок, помеченных более темной заливкой.

Таблица 8.7

	загрузка 1	загрузка 2	загрузка 3	загрузка 4	загрузка 5	загрузка 6	загрузка 7	загрузка 8
загрузка 1	-		+		+			
загрузка 2		-						
загрузка 3	+		-		+			
загрузка 4				-				
загрузка 5	+		+		-			
загрузка 6						-		
загрузка 7							-	
загрузка 8								-

Таким образом, соотношение сопутствия напоминает соотношение «потомок - предок», когда у каждого ребенка (светлая заливка) обязательно есть родитель, но не каждый потенциальный родитель (темная заливка) имеет ребенка.

Здесь нужно отметить, что на практике могут встретиться случаи, когда один потомок должен иметь нескольких предков. Типичным примером может служить сейсмическое нагружение, инерционные свойства которого сформированы из нескольких статических загрузок (собственного веса конструкций, постоянных нагрузок от ограждающих конструкций, некоторой доли полезной нагрузки) и поэтому без них не может реализоваться рассматриваемая сейсмическая нагрузка. И, конечно, вполне допустимо наличие у одного предка нескольких потомков. Способы выделения допустимых сочетаний могут быть различными, один из наиболее общих был предложен в работе [Артеменко, Гордеев, 1967], где использовался специально построенный ориентированный граф без циклов, имеющий одну начальную и одну конечную вершину. Граф строился таким образом, что каждому пути из начальной вершины в конечную взаимно однозначно соответствовало одно допустимое сочетание элементарных нагрузок, и ни одно недопустимое сочетание не могло реализоваться в виде такого пути.

Рассмотрим построение такого графа на примере нагружения одноэтажного производственного здания с кранами, на которое могут действовать следующие виды элементарных нагрузок:

- 1 — собственный вес;
- 2 — снег;
- 3 — ветер слева;
- 4 — ветер справа;
- 5 — максимальное давление крана на левой колонне;
- 6 — максимальное давление крана на правой колонне;
- 7 — торможение кранов влево, передаваемое на левую колонну;
- 8 — торможение кранов вправо, передаваемое на левую колонну;
- 9 — торможение кранов влево, передаваемое на правую колонну;
- 10 — торможение кранов вправо, передаваемое на правую колонну.

При выборе допустимого сочетания следует учитывать, что:

- нагрузка от собственного веса не может отсутствовать;
- ветровая, снеговая и крановые нагрузки действуют независимо друг от друга;
- ветер одного направления исключает ветер другого направления, одно торможение исключает все другие, одно вертикальное давление исключает другое;
- торможение не может возникнуть без вертикального давления.

На рис. 8.49 представлен граф, выражающий эту взаимосвязь. На нем, кроме дуг 1–10, одноименных рассматриваемым элементарным нагружениям, имеется еще четыре дуги (на рисунке они показаны пунктиром), соответствующие нулевым значениям интенсивности нагрузки. Эти дополнительные дуги позволяют обходить на графе те нагрузки, которые не обязательно должны входить в расчетную комбинацию нагрузок (оказывают разгружающее действие).

Можно отметить некоторые закономерности, облегчающие построение графа допустимых сочетаний нагрузок. К ним относятся следующие правила:

- если какая-либо нагрузка непременно должна участвовать в сочетании, то на графе соответствующая дуга должна образовать перешеек, после «разрезания» которого граф распадется на две части, одна из которых содержит начальную вершину, а другая — конечную (дуга 1 на рис. 8.49);
- если две нагрузки взаимно исключают друг друга, то соответствующие дуги на графе параллельно соединяют одинаковые вершины (на рис. 8.49 дуги 3 и 4; дуги 5 и 6; дуги 7, 8, 9 и 10);

- если нагрузка может отсутствовать, то на графе должна быть дополнительная дуга, которая обеспечивает обход рассматриваемой нагрузки (на рис. 8.49 дуги 2 и 12; дуги 3, 4 и 13 и др.);
- если нагрузки могут действовать одновременно, то соответствующие дуги должны быть соединены последовательно (на рис. 8.49 дуги 1, 2, 3 или 4 и др.);
- условие, что нагрузку А нельзя взять без нагрузки В, обеспечивается отсутствием нулевой дуги, проходящей через те же вершины, что и дуга нагрузки В (см. на рис. 8.49 дуги 7–10, выполняющие роль А, и дуги 5–6, выполняющие роль В).

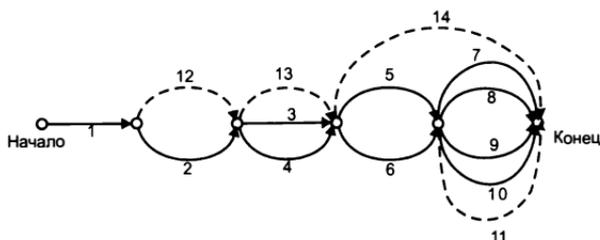


Рис. 8.49. Граф логической структуры нагружений

Каждой дуге построенного таким образом графа можно сопоставить два числа: возможные максимальное и минимальное значения интенсивности соответствующей нагрузки. Тогда множеству всех мыслимых путей на графе соответствует множество реальных нагрузок на рассчитываемое сооружение. А расчетная комбинация связана с некоторым «экстремальным» путем, который выбирается на основании некоторой критериальной функции. В качестве таких критериев могут, например, выбираться:

- напряжение в некоторой точке поперечного сечения стержня;
- перемещение узла по задаваемому направлению;
- реакция упругого основания;
- экстремальное значение любого усилия с выдачей соответствующих ему значений других усилий.

Все эти критерии для линейно упругих систем выражаются в виде линейной комбинации интенсивностей нагрузок, причем экстремумы указанных критериев, вообще говоря, достигаются на различных допустимых сочетаниях.

Коэффициенты, с которыми интенсивности элементарных нагружений входят в критериальную функцию, часто зависят от геометрических характеристик сечений. Так, например, если

критерием служит максимум напряжения в некоторой точке поперечного сечения стержневого элемента, то требуется заранее знать размеры этого поперечного сечения или, по крайней мере, значения ядровых расстояний. Вместе с тем, само отыскание экстремального сочетания зачастую направлено на подбор сечения, т.е. наблюдается заведомо противоречивая ситуация, выход из которой возможен лишь путем последовательных приближений в цикле такого вида:

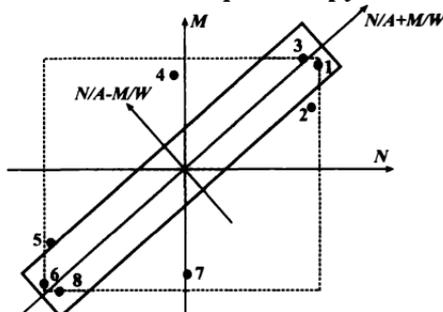
задание характеристик сечений — расчет — отыскание расчетной комбинации нагрузок — подбор сечения — расчет — отыскание расчетной комбинации нагрузок и т.д.

Желание избавиться от предварительного задания характеристик поперечного сечения при поиске РСУ стимулирует использование, например, такого правила выбора:

- определить сочетание, при котором реализуется максимум момента, и найти соответствующие ему продольную и поперечную силы;
- определить сочетание, при котором реализуется минимум момента и найти соответствующие ему продольную и поперечную силы;
- определить сочетание, при котором реализуется максимум продольной силы, и найти соответствующие ему момент и поперечную силу, и т.д.

Такое правило является традиционным и представлено во многих учебниках. Однако здесь имеется определенная опасность пропустить опасные ситуации.

Идея контрпримера ясна из рис. 8.50, где точками в координатах  $M, N$  показаны значения для некоторых нагружений и их комбинаций.



**Рис. 8.50.** Пример использования правила «экстремальное усилие и соответствующие ему другие усилия»

Экстремальные значения определяют прямоугольник, проходящий через точки 1, 3, 6, 8, и именно эти комбинации ложатся в основу подбора сечений. Несущая способность подобранного сечения, связанная с экстремальными напряжениями  $N/A \pm M/W$ , такова, что ею

определяется затемненный прямоугольник, который безусловно накрыл расчетные точки 1, 3, 6, 8. Однако другие точки, например 4 и 7, остались вне области несущей способности.

Поиск расчетной комбинации, как один из этапов этого итерационного цикла (чаще всего он является единственным, поскольку после подбора сечений достаточно редко уточняются исходные данные для отыскания расчетной комбинации нагрузок) реализован в большинстве промышленных программ расчета строительных конструкций. Следует, однако, помнить, что сама логика определения допустимых или недопустимых сочетаний, то ли в форме задания их графа, то ли в другой эквивалентной форме, опирается на указания нормативных документов, и пользователь должен быть уверен, что реализованы указания именно тех норм, которые его интересуют.

Заметим также, что набор результатов, которые программа выдает пользователю, представляет собой ответы на вопросы такого свойства: «Какие усилия вызывает в конструкции такая то нагрузка?» или «Какие максимальные напряжения могут возникнуть в этом элементе при самом невыгодном сочетании нагрузок?». Важно, что эти вопросы заранее сформулированы авторами программы, и пользователь может только задать их (потребовать представить результат определенного вида) или же не делать этого.

По-видимому, более предпочтительным было бы предоставление пользователю возможности самому формулировать некоторые вопросы. Например, интересным вопросом является такой: «В расчетные сочетания каких элементов вошла определенная нагрузка?». Такой вопрос имеет смысл задавать, когда проектировщик может влиять на эту нагрузку и принимает решение о том, следует ли этой возможностью воспользоваться. К сожалению, в известных авторам программных комплексах эта функция не реализована.

Что касается упомянутого выше противоречия между составом исходных данных для отыскания расчетного сочетания нагрузок и способом использования результатов такого поиска, то, в некотором смысле, его можно преодолеть, если воспользоваться подходом работы [Гордеев и др., 1989], где было предложено из всего множества допустимых сочетаний предварительно выделить подмножество, содержащее расчетные сочетания не для одного, а для целого класса критериев. Таким классом являются все критериальные функции, обладающие свойством выпуклости. При этом, в силу линейности рассматриваемых конструкций, отыскивается не

расчетное сочетание нагрузок, действующих на сооружение, а расчетное сочетание внутренних сил, вызываемых этими нагрузками.

Обозначим через  $n$  количество силовых факторов, одновременно действующих в сечении элемента. Каждое  $i$ -ое сочетание нагрузок вызывает  $n$ -мерный вектор усилий, определяющий точку  $X_i$  в пространстве силовых факторов  $R^n$ . Например, если отыскивается невыгодное значение напряжения от действия продольной силы и момента, то  $n = 2$ , а точки  $X_i$  определяются парами  $\{N_i, M_i\}$ . Таких точек в пространстве  $R^n$  может оказаться чрезвычайно много. Так, если все элементарные нагружения независимы, то их число будет  $2^k$ , где  $k$  есть количество нагружений.

Известно, что любая выпуклая вниз критериальная функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определенная на выпуклом многограннике  $M \in R^n$ , достигает своего максимума в одной из вершин этого многогранника [Берже, 1984], стр. 448.

Если в качестве многогранника  $M$  взять выпуклую оболочку конечного множества точек  $X_i$  (на рис. 8.51 она указана пунктиром), то, независимо от вида выпуклого критерия, точка, где этот критерий достигает максимума, находится среди вершин  $M$ . Количество таких вершин намного меньше, чем общее число точек  $X_i$ , и для отыскания решения можно устроить перебор указанных вершин.

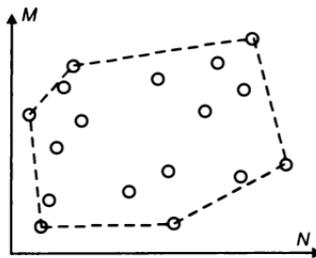


Рис. 8.51. Множество точек  $X$  и его выпуклая оболочка

Алгоритм для отыскания вершин, входящих в состав выпуклой оболочки конечного множества точек основан на том, что координаты точки, не являющейся вершиной многогранника  $M$ , представимы в виде выпуклой линейной комбинации координат других точек множества. Этот алгоритм детально описан в работе [Гордеев и др., 1989]. Что же касается выпуклости критериальной функции, то здесь редко возникают сомнения, поскольку большинство из используемых критериев являются линейными. Однако свойство выпуклости выполняется не во всех случаях. Если в качестве критериальной функции принимается несущая способность элемента с учетом всех нормативных требований (прочность,

устойчивость, жесткость), то исследование ее выпуклости необходимо провести весьма тщательно. В частности, стоит убедиться, что область несущей способности рассматриваемого элемента является выпуклой. Дело в том, что при поиске невыгодного сочетания нагрузок эта область с точностью до общего масштабного параметра типа прочности материала может играть роль линии уровня целевой функции и очевидно, что если не гарантирована выпуклость области несущей способности, то невыпуклой является и целевая функция задачи поиска невыгодного нагружения.

В том, что такая опасность существует, можно убедиться, рассматривая сжато-изогнутый элемент стальной конструкции. область несущей способности которого, ограниченная кривой взаимодействия усилий, может оказаться невыпуклой. Типичный пример такой кривой представлен на рис. 8.52.

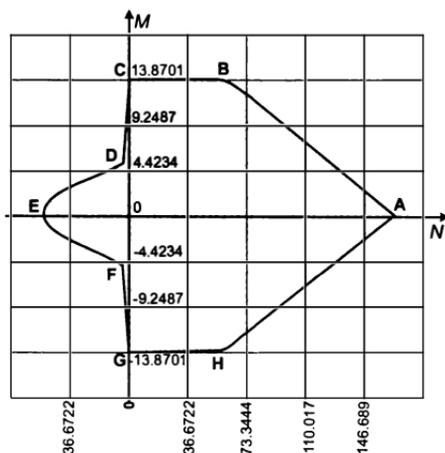


Рис. 8.52. Область несущей способности

Здесь рассмотрено поперечное сечение в виде симметричного сварного двутавра со стенкой  $400 \times 10$  мм и полками  $200 \times 10$  мм из стали с расчетным сопротивлением  $R_y = 2050$  кг/см<sup>2</sup>. Расчетная длина стержня в обоих главных плоскостях составляет 600 см, коэффициент условий работы и коэффициент надежности по назначению приняты равными  $\gamma_c = 1,0$  и  $\gamma_n = 1,0$ .

Граница области несущей способности на участках АВ и АН определяется условием прочности при совместном действии растяжения и изгиба, на участках ВС и GH — устойчивостью плоской формы изгиба, на участках CD и GF, как и на участке DEF, — устойчивостью из плоскости действия момента.

Невыпуклость кривой CDEFG связана со сменой типа зависимости коэффициента  $C$ , входящего в условие проверки устойчивости из

плоскости изгиба, и вычисляемого по формулам (57) — (59) СНиП II-23-81\*, от величины относительного эксцентриситета  $m$ . Эта зависимость для трех значений длины рассматриваемого стержня приведена на рис. 8.53. Характерный излом при значении  $m = 10$ , где функция  $C = C(m)$  меняется с линейной на гиперболическую, соответствует точкам D и F на кривой взаимодействия.

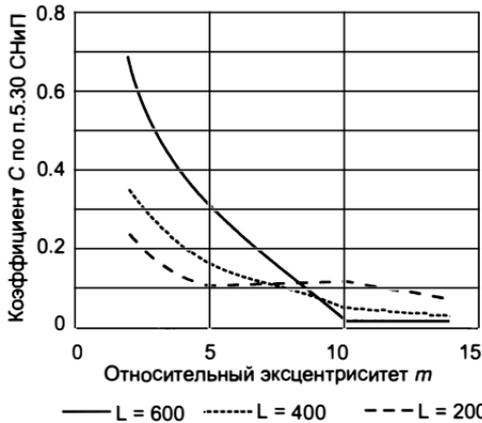


Рис. 8.53. Зависимость коэффициента  $C$  от эксцентриситета

Невыпуклость области несущей способности не проявляется при малых гибкостях элемента из плоскости изгиба, несмотря на то, что излом кривой  $C = C(m)$  не исчезает, это попросту связано с тем, что для таких случаев устойчивость из плоскости изгиба не является определяющей. Сама по себе невыпуклость рассматриваемой области может привести ко многим неприятным последствиям; наиболее очевидным является следующее: по традиции оценивая невыгодные сочетания усилий, инженеры либо вообще не рассматривают некоторые воздействия, либо учитывают их полностью. Для невыпуклой области, однако, возможно и такое, что невыгодным является некоторое промежуточное значение. Так, если одно нагружение соответствует точке С, а другое — точке Е (в обоих случаях несущая способность обеспечена), то, приняв момент и силу равными половине предельных значений, мы окажемся в точке К за пределами допустимой области.

С учетом сказанного выше, при обнаружении невыпуклости рекомендуется не выходить за границу выпуклой подобласти ABCDFGHA, т.е. отсечь участок DEF. Можно поступить и по другому, а именно отбросить участки BCD и FGH, что также даст выпуклую допустимую область. Какой именно вариант использовать, зависит от существа задачи и от реально возможных вариантов

действия нагрузки, но во всех случаях следует добиваться выпуклости критериальной функции.

К сказанному выше необходимо добавить следующее. Во многих зарубежных нормах приводятся типовые варианты для комбинирования различных нагрузок, в соответствии с которыми следует проверить несущую способность конструкции. Так, например в нормах США [AISC, 1994] эти варианты выглядят следующим образом

$$1,4DL; 1,2DL+1,6LL; 0,9DL\pm 1,3WL; 1,2DL\pm 1,3WL; 1,2DL+0,5LL\pm 1,3WL; \\ 0,9DL\pm 1,0EL; 1,2DL\pm 1,0EL; 1,2DL+0,5LL\pm 1,0EL ,$$

где через DL обозначена нагрузка от собственного веса (*Dead Load*), через LL — полезная нагрузка (*Live Load*), через WL — нагрузка от ветра (*Wind Load*), а через EL — (*Earthquake Load*) сейсмическое воздействие. Аналогичная рекомендация Еврокода [ENV 1991-2-4, 1995] выглядит как

$$1,35DL; 1,35DL+1,50LL; 1,35DL\pm 1,50WL; 1,00DL\pm 1,50WL; \\ 1,35DL+1,35LL\pm 1,35WL; 1,00DL\pm 1,00EL; 1,00DL+0,30LL\pm 1,00EL$$

По сравнению с записями СНиП 2.01.07-85\*, где требования к выбору расчетных сочетаний нагрузок представлены в более общей (и более сложной) форме, сказанное выше представляется, на первый взгляд, очень простым и как будто однозначно определяющим «правила выбора». Но нетрудно заметить, что эта простота является кажущейся, если только задать себе такой вопрос: при каком направлении ветра необходимо определять значение WL, или же о каком из возможных вариантов приложения временной нагрузки LL должна идти речь. И тогда становится очевидным, что простые «правила выбора» еще не все определяют и не снимают с повестки дня проблему выбора расчетных сочетаний нагрузок.

Заметим, что у многих конечноэлементных программных комплексов, таких, например, как ANSYS или NASTRAN, режим определения расчетных сочетаний нагрузок практически отсутствует. Это объясняется тем, что упомянутые комплексы ориентированы на решение задач машиностроения, где эксплуатационный цикл короче, и разнообразие возможных режимов нагружения не столь многочисленно, как у несущих строительных конструкций.

## 9. ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

*Мы убеждаемся, что использование проектировщиком симметрии и оптимизации зачастую приводит к построению системы, являющейся весьма патологической и структурно неустойчивой. В природе нельзя найти, например, идеально симметричные объекты, однако они возникают на чертежных досках проектировщиков. Человек, сам являющийся продуктом природы, требует от вещей того, чего не может достичь природа: но поскольку он пытается построить такие вещи, природа этому противится, и это проявляется в нарушающих симметрию несовершенствах.*

**Дж.М.Т.Томсон.** Теория катастроф и ее роль в прикладной механике // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Международного конгресса IUTAM.— М.: Мир, 1979,— С. 697

### 9.1. Проверка устойчивости равновесия

Как неоднократно отмечалось, инженерные расчеты выполняются с помощью идеализированных расчетных схем, представляющих собой, в той или иной мере, упрощенную модель реальной конструкции. Некоторые детали, второстепенные, по мнению создателя расчетной схемы, остаются при этом за рамками рассмотрения, но такое допущение нуждается в проверке, поскольку известны многочисленные примеры того, как малые отклонения (возмущения) могут оказывать существенное влияние на работу конструкции, причем не только количественно, но и на качественном уровне. Реальная конструкция отличается от расчетной модели и [Болотин, 1965]:

*«... это отличие обусловлено многочисленными более или менее мелкими отклонениями от проекта, дефектами и несовершенствами. Инженеру необходима уверенность в том,*

что, несмотря на наличие этих отклонений, реальная конструкция будет работать примерно так же, как и соответствующая ей идеализированная конструкция. При отсутствии такой уверенности проектирование утратило бы смысл».

Проверка устойчивости равновесия, т.е. проверка того, что при малом возмущении исходное состояние равновесия сохраняется, и система не приобретает качественно новых свойств в картине напряженно-деформированного состояния, является неотъемлемой процедурой реального проектирования. В неоднократно цитируемой книге В.И.Феодосьева [1975] справедливо сказано, что:

*«... при решении задач устойчивости нагрузку следует задавать со степенью детализации более высокой, чем при решении обычных задач сопротивления материалов. Недостаточно показать величину и направление действующих сил. Необходимо указать также характер их поведения в процессе отклонения системы от исходного положения равновесия».*

В качестве примера указываются различные варианты передачи нагрузки на простой консольный стержень, при которых критическая сила может отличаться от классической величины в несколько раз.

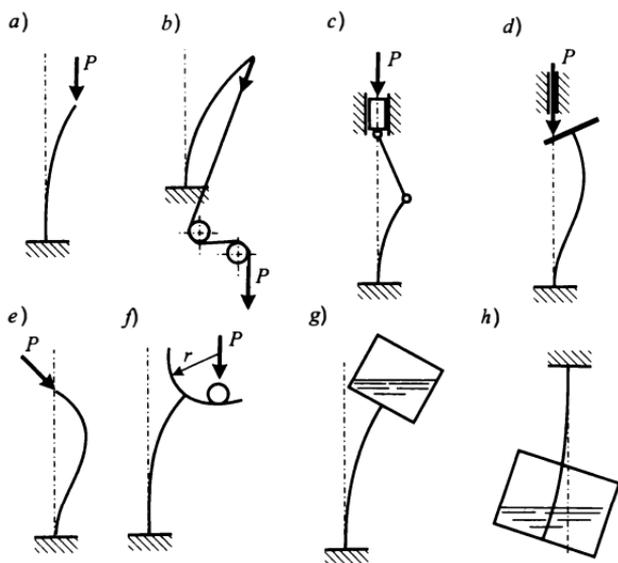


Рис. 9.1. Различные случаи загрузки консоли

Консольный упругий стержень (рис. 9.1,а) на который действует сжимающая сила  $N$ , является стандартным объектом изучения

раздела «Устойчивость» в курсе сопротивления материалов, для которого приводится классическое решение по Эйлеру с критическим значением силы  $N_{cr} = \pi^2 EI / (4l^2)$ . Здесь предполагается, что при возможных отклонениях от первоначальной прямолинейной формы сила  $N$  остается вертикально направленной и пассивно перемещается вместе с концом стойки.

Автор книги [Овсянко, 1999] в разделе с характерным названием «За чем следит следящая сила?» приводит разнообразные примеры более сложного поведения приложенной силы в процессе деформирования той же консольной стойки. Некоторые характерные примеры представлены на рис. 9.1.

Для схемы по рис. 9.1,*b* сила  $P$  передает свое влияние на конец стойки с помощью перекинутого через идеальные блоки троса. Тогда при изгибе стержня приложенная к концу стержня сила  $N$  направлена в неподвижную точку  $A$ , находящуюся на расстоянии  $a$  по вертикали от верхнего конца стойки, на котором закреплен трос. Критическое значение силы определится как  $P_{cr} = \alpha^2 EI$ . Параметр  $\alpha$  определяется как минимальный корень уравнения ([Феодосьев, 1967], стр.233)

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l (1 - a / l).$$

В частности, при  $a = l$  неподвижный блок (точка  $A$ ) расположен на уровне заделки стойки, вследствие чего изгибающий момент в заземлении окажется всегда равным нулю. В этом случае значение критической силы будет равно  $P_{cr} = \pi^2 EJ / l^2$ , т.е. таким же, как для шарнирно опертого по концам стержня, у которого, как и в рассматриваемом примере, моменты на концах обращаются в нуль.

В схеме по рис. 9.1,*c* продольная сила  $N$ , возникающая в абсолютно жестком штоке  $AB$ , следит за положением точки  $A$ , имеющей возможность перемещаться вертикально. Здесь к верхнему концу стойки приложена сжимающая сила  $P$  и горизонтальная составляющая силы  $N$ . Критическое значение  $P_{cr} = \alpha^2 EI$  определяется из трансцендентного уравнения ([Феодосьев, 1975], стр. 218])

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha L,$$

решение которого зависит от соотношения длины стойки  $l$  и суммарной длины стойки и штока  $L$ .

Схема, показанная на рис. 9.1,*d* (задача Реута), предусматривает, что сила передается на стойку через жесткий диск и всегда направлена вдоль первоначальной вертикальной оси. Она имеет фиксированную линию действия, ее критическое значение  $N_{cr} = 20,05 EI / l^2$ , как и в схеме по рис. 9.1,*e*, где сила  $N$  следит за деформацией конца стойки (задача Бека).

В схеме по рис. 9.1,*f* сила прикладывается в нижней точке чашки радиуса  $r$ , которая (чашка) жестко прикреплена к концу стойки длиной  $l$ . Критическая сила  $N_{cr} = \alpha^2 EJ$  определяется решением трансцендентного уравнения

$$\alpha l \operatorname{tg} \alpha l = l / r .$$

Наконец, в схемах по рис. 9.1,*g* и 9.1,*h* показаны схемы нагружения того же консольного стержня весом жидкости, для которых поведение стержня заметно отличается от задачи Эйлера. Решения этих задач приведены в [Феодосьев, 1967], стр.240-241.

В гибких стержнях при перемещениях, соизмеримых с длиной, нагрузки также могут вести себя непривычным образом. Простейший пример представлен на рис. 9.2,*a*, где показан изгибаемый стержень нагруженный силой  $P$ , которая всегда остается перпендикулярной к деформированной оси стержня.

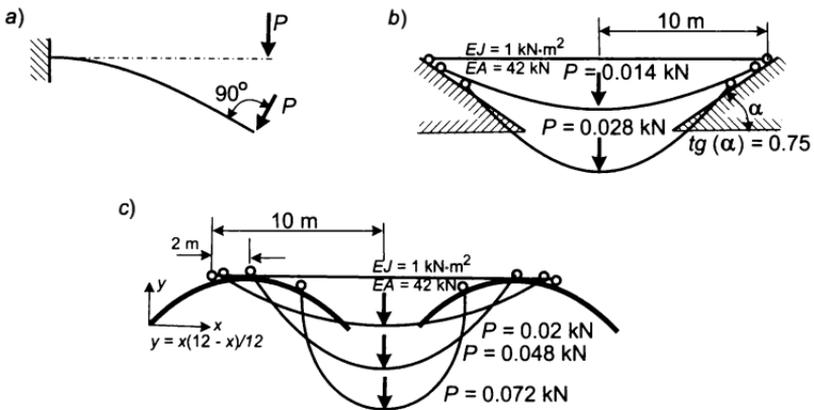


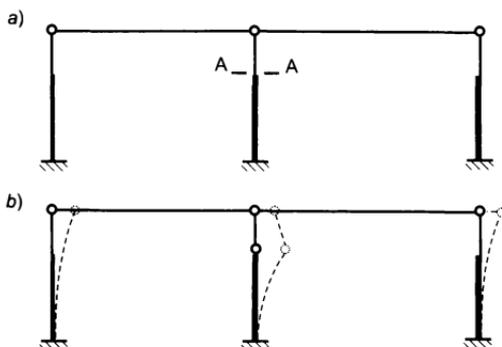
Рис. 9.2. Нагрузки на гибких стержнях

На рис. 9.2,*b* и 9.2,*c* показаны гибкие системы с опорными катками, у которых меняют свое направление опорные реакции. Решение этих задач получено В.М. Овсянко с помощью электронного моделирования [1999].

Следует заметить, что всякая сила, представляет собой меру взаимодействия системы с окружающей средой, и именно при выделении объекта из окружающей среды могут быть допущены погрешности, связанные с неправильной трактовкой поведения нагрузки при деформациях конструкции. Если жесткий шатун по рис. 9.1,*c* или тросовая тяга по рис. 9.1,*b* включены в состав расчетной схемы, то поведение силы  $P$  (она будет реализована в форме внутренней силы сжатия стойки) окажется описанным правильно.

Может показаться, что примеры, подобные представленным на рис. 9.1, являются упражнениями теоретиков и не представляют практического интереса. Это далеко не так, по крайней мере по отношению к случаям *b* и *c*, с которыми пришлось столкнуться в проектной практике. Схема 9.1,*b* является типичной при расчете крановых стрел и мачт на оттяжках. Схема 9.1,*c* возникла при проектировании усиления двухпролетного поперечника одного из существующих производственных зданий (рис. 9.3,*a*). Расчеты показали, что сечение А—А средней колонны сильно перенапряжено, а габариты приближения мостовых кранов не позволяют выполнить усиление колонны в этом сечении.

Было задумано решить возникшую проблему кардинально, отказавшись от восприятия момента в сечении А—А, врезав в него шарнир (рис. 9.3,*b*). Поскольку все остальные элементы имели достаточный запас прочности, то казалось, что предложение решает проблему. Но изменившаяся схема работы нижней части колонны среднего ряда, совпадающая с примером по рис. 9.1,*c*, привела к необходимости отказаться от этого варианта реконструкции поперечника, поскольку критическая сила упала в 2,3 раза.



**Рис. 9.3.** Поперечник здания:

*a* — существующая схема; *b* — один из вариантов реконструкции

Классическая теория устойчивости, излагаемая в большинстве курсов строительной механики и обычно используемая при расчете строительных конструкций, предполагает (к сожалению, чаще всего молчаливо), что все внутренние силы возрастают пропорционально одному параметру, а соотношение между ними при этом остается неизменным. Такая схема поведения характерна далеко не для всех систем, для многих из них (в особенности нелинейных) необходимо считаться с тем, что соотношения между внутренними силами в системе меняются с ростом интенсивности нагружения. Поэтому, если отыскивается критическая, в смысле устойчивости,

интенсивность нагружения и именно с ней связывается понятие о коэффициенте запаса по устойчивости, то расчет необходимо выполнить, имитируя рост нагрузки, а не рост внутренних усилий.

Даже для линейных систем полученный классическим способом коэффициент запаса устойчивости может не иметь четкого физического смысла. Действительно, представим себе конструкцию с элементами, сильно сжатыми за счет постоянной нагрузки  $G_0$  от собственного веса, и в дополнение нагруженными, например, на 20% временной нагрузкой  $P_0$  (рис. 9.4). Коэффициент запаса  $k' = 1,25$  для суммарной нагрузки соответствует абсолютно нереальному росту собственного веса на 25%. Если же выделить возможный рост собственного веса, например, на 10% (то есть положить  $k_g = 1,1$ ), то для достижения критического состояния временная нагрузка должна вырасти намного больше. Естественно, что при таком рассуждении, графическая иллюстрация которого представлена на рис. 9.4, довольно скромный коэффициент запаса 1,25 предстает совсем в другом виде ( $k_p > 1,25$ ). Результат, разумеется, будет сильно зависеть от вида границы области устойчивости и при другой ее конфигурации все коэффициенты запаса могут оказаться такими, что значение  $k_p P_0$  будет существенно меньшим. Но важно отметить сам факт недостаточной точности анализа системы с привычной трактовкой коэффициента запаса по устойчивости.

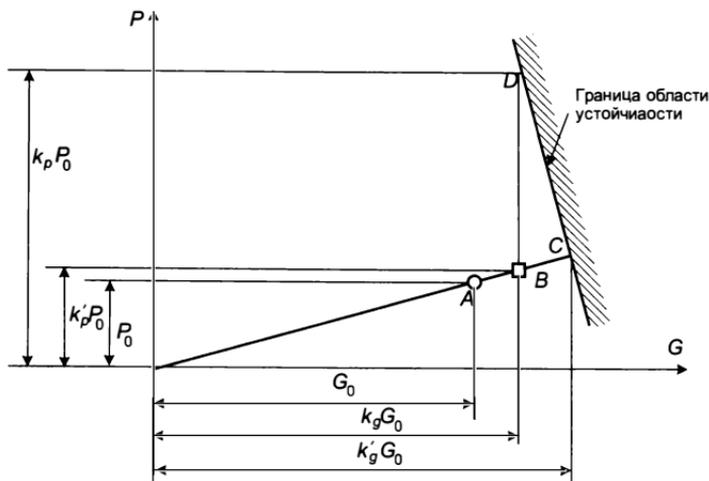


Рис. 9.4. Непропорциональный рост нагрузок

Для ответственных случаев следовало бы вычислять значения критической нагрузки по каждому варианту нагружения (возможно, по их группе) отдельно. Если такие результаты получены, и определены критические нагрузки  $P_{i,cr}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) по каждому из  $n$

нагружений, то для линейной системы далее можно воспользоваться теоремой Папковича [1963] о выпуклости области устойчивости. Из этой теоремы, в частности, следует, что плоскость

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{i,cr}} = 1 \quad (9.1)$$

расположена не дальше от начала координат, чем истинная граница области устойчивости, что для двумерного случая проиллюстрировано на рис. 9.5. Прямая (9.1) на рисунке обозначена как АВ, и она заменяет истинную границу области устойчивости с большим запасом. Решение можно уточнить, отыскав критическое значение системы для некоторой комбинации нагрузок (точка С на луче ОС) и приблизив кривую АВ ломаной АСВ.

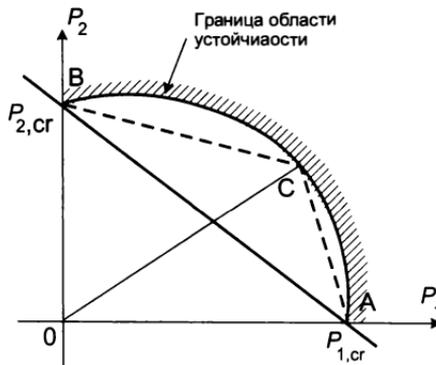


Рис. 9.5. Аппроксимация границы области устойчивости

Если говорить о существующем программном обеспечении, то, как правило, независимое поведение различных нагрузок при расчетах на устойчивость не предусматривается. К сожалению, стандартный вариант расчетных программ ориентирован только на однопараметрическое нагружение, причем такое, при котором все нагрузки возрастают пропорционально одному параметру. Идеальной была бы возможность задания многопараметрического нагружения с автоматическим построением границы области устойчивости. В качестве промежуточной альтернативы можно предложить, чтобы в исходной информации к задаче расчета на устойчивость нагрузки разделялись на *стабильные* и *возрастающие*. Стабильные нагрузки сохраняют фиксированные значения, то есть не зависят от параметра нагружения, по отношению к которому исследуется устойчивость системы. Возрастающие нагрузки, напротив, связаны соотношением пропорциональности с параметром нагружения. Варьируя варианты разделения нагрузок на стабильные и возрастающие, пользователь

фактически будет иметь возможность определения точек границы области устойчивости на произвольных лучах (см. рис. 9.5).

Надо сказать, что в силу традиций инженерного образования, подкрепляемых к тому же требованиями существующих нормативных документов, в психологию инженера-расчетчика прочно впечатано ощущение достаточности проверки расчетов конструкции на устойчивость по отношению к изменениям именно нагрузок, и ничего более. А между тем, в реальных условиях жизни конструкции вариациям подвержены далеко не только нагрузки. В самом деле, кроме нагрузок, в достаточно широких пределах могут изменяться характеристики материалов, размеры поперечных сечений отдельных стержней, условия опирания и т.д. Насколько чувствительна конструкция по отношению к различного рода возмущениям по сравнению с идеализированной моделью? Не могут ли привести малые изменения иных параметров системы (кроме нагрузок) в состояние ее неустойчивого равновесия? Стандартный программный инструмент инженер-расчетчика напрямую не дает ответов на все эти вопросы, а жаль. Нам представляется, что существующее состояние расчетных программных комплексов существенно отстает в решениях задач устойчивости конструкций по сравнению с задачами определения их напряженно-деформированного состояния. Преодоление этого разрыва — необходимое и перспективное направление развития расчетных программ.

## 9.2. Классическая задача устойчивости равновесия

В классической постановке решения задач устойчивости, реализованной практически всеми программными системами, обычно предполагают, что все внутренние усилия растут пропорционально одному параметру, что связано с таким же пропорциональным ростом всех приложенных к системе нагрузок. В общем случае это утверждение неточно, поскольку при учете продольно-поперечного изгиба стержней их полные матрицы жесткости не являются постоянными, а зависят от величины продольной силы. Поэтому с ростом интенсивности внешней нагрузки может происходить перераспределение продольных сил в системе. Однако для очень многих конструкций соотношения между внутренними усилиями почти не меняются в процессе нагружения (см. в разделе 4.3 о понятии квазимоноциклических систем по Н.В. Корноухову [1949]).

Типичным примером могут служить обычные рамные системы, у которых при вертикальной нагрузке соотношения между усилиями в стойках остаются практически постоянными. Именно для квазимоноциклических систем наиболее обоснован переход от уравнений типа (3.132), к уравнениям эйлерового типа (3.134), о котором говорилось ранее в главе 3.

Если задача устойчивости решается в эйлеровой постановке и в предположении, что все приложенные к системе внешние нагрузки и внутренние силы растут пропорционально одному и тому же параметру  $k$ , то минимальное (из положительных) значение параметра  $k$ , при котором матрица жесткости системы  $\mathbf{K}(k)$  перестает быть положительно определенной, является критическим, а соответствующее значение  $k = k_{cr}$  — коэффициентом запаса устойчивости. Впрочем, инженеру-расчетчику нужно помнить, что некоторые системы способны терять устойчивость и при изменении знака нагрузки. Это соответствует случаю отрицательных значений параметра  $k$ , причем отрицательное критическое значение  $k$  может и не совпадать по абсолютной величине с его положительным критическим значением (как правило, такая ситуация характерна для несимметричных систем). Простейший пример подобного рода: закрепленный от продольных перемещений на обоих концах стержень под действием продольной силы, приложенной в середине пролета (рис. 9.6).

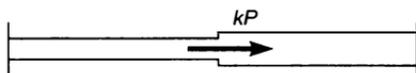


Рис. 9.6. Пример системы, способной потерять устойчивость при  $k > 0$  и при  $k < 0$

Матрица жесткости  $\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G(k)$  состоит из «обычной» матрицы жесткости  $\mathbf{K}_0$  и матрицы «толкающих» реакций  $\mathbf{K}_G(k)$ <sup>1</sup>, которые определяются сжимающими силами в стержнях, напряжениями сжатия в конечных элементах оболочечного типа и т. п. Напомним, что положительная определенность матрицы жесткости означает, что при любых значениях узловых перемещений и поворотов  $\mathbf{u}$  изменение потенциальной энергии системы будет положительным (энергия наращивается, а это значит, что для деформирования системы необходимо затратить работу и,

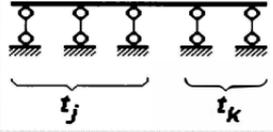
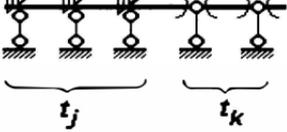
<sup>1</sup> В терминологии, обычно употребляемой в методе конечных элементов, матрицу  $\mathbf{K}_G(k)$  называют *матрицей геометрической жесткости*, чем и оправдано использование нижнего индекса  $G$  в обозначении этой матрицы.

следовательно, система оказывает сопротивление деформированию, т.е. она является *отпорной*).

Если система теряет устойчивость, ее отпорность исчезает, а ее матрица жесткости становится вырожденной (с нулевым детерминантом). В закритическом состоянии система получает отрицательную отпорность (при ее принудительном деформировании выделяется ранее накопленная потенциальная энергия «толкающих» реакций) и ее матрица жесткости становится знаконеопределенной.

Необходимо отметить, что с помощью вычислений, основанных на использовании матрицы жесткости, можно отыскать только те критические состояния, при которых потеря устойчивости происходит по форме, когда узловые перемещения и повороты не все вместе равны нулю (это так называемая *явная форма* потери устойчивости). Нужно еще проверить, что при пробном значении  $k$  (или ранее) не может реализоваться так называемая *скрытая форма* потери устойчивости, которая локализована, например, в пределах одного конечного элемента и не вызывает узловых перемещений и поворотов (форма потери устойчивости характеризуется только нулевыми значениями узловых перемещений).

Таблица 9.1.

Тип формы	Заданная система	Основная система
Явная		
Скрытая	Не возникают перемещения по направлению всех связей $t_j$ , отсутствуют усилия во всех связях $t_k$ .	Не возникают усилия во всех связях $t_j$ , отсутствуют перемещения по направлению всех связей $t_k$ .

В общем случае различать явные и скрытые формы потери устойчивости можно, сопоставляя заданную и основную системы, и если при построении основной системы накладывается  $t_j$  и снимается  $t_k$  связей (для общности рассматривается смешанный метод расчета), то соответствующие определения [Динкевич, 1977] следуют из табл. 9.1.

Оставаясь в рамках метода перемещений, что характерно для большинства современных программных систем, можно сказать, что появление скрытых форм потери устойчивости связано с тем, что дополнительные связи метода перемещений не влияют на критическое значение нагрузки, так как они попадают в узел формы потери устойчивости.

Проверка на наличие скрытых форм весьма проста и сводится к тому, что для всех конечных элементов должно соблюдаться неравенство

$$k_{e\ cr} > k, \quad (9.2)$$

где  $k_{e\ cr}$  — критическое значение параметра нагружения для отдельного  $e$ -го конечного элемента в основной системе метода перемещений, а  $k$  — испытываемое значение параметра нагрузки на систему<sup>2</sup>.

Если неравенство (9.2) выполняется, то это свидетельствует об отсутствии скрытых форм потери устойчивости системы при уровнях нагрузки, не превышающих испытываемого значения параметра  $k$ . В противном случае существуют скрытые формы, которые следует разыскивать уже при меньших уровнях нагрузки. Поскольку для всех типов конечных элементов соответствующие критические величины  $k_{e\ cr}$  известны и вычисляются по простым формулам, то реализация проверки условия (9.2) в программном продукте не вызывает затруднений.

Однако, разработчики некоторых программных систем скрытые формы потери устойчивости не выявляют. К сожалению, соответствующие предупреждения часто отсутствуют и в программной документации. С точки зрения пользователя программной продукции, мотивация такого решения разработчиков не имеет принципиального значения, хотя авторам доводилось сталкиваться с оправдательными рассуждениями следующего характера:

*«Поскольку основная система метода перемещений образуется из заданной системы с помощью наложения на исходную систему некоторого количества связей, то отсюда следует вывод о том, что скрытые для метода перемещений формы потери устойчивости соответствуют более высокому уровню нагружения, чем первое (наименьшее) критическое значение параметра нагрузки для заданной системы — это следует из известной теоремы Релея о влиянии*

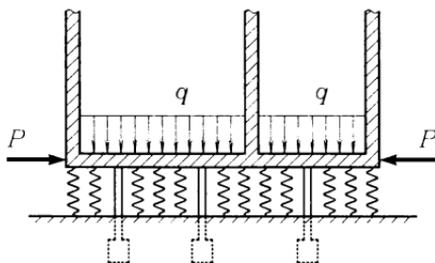
<sup>2</sup> В неравенстве (9.2) имеется в виду, что отыскиваются положительные критические значения параметра  $k$ .

*дополнительных связей на устойчивость механической системы. А поскольку в инженерной практике пользователя может интересовать только первая (нижняя) форма потери устойчивости, то выявление скрытых (то есть высших) форм не имеет никакого прикладного значения».*

С этим рассуждением мы не можем согласиться по следующим соображениям. Прежде всего, программные реализации далеко не всегда следуют в чистом виде методу перемещений. Вспомним, хотя бы, рассмотренную в главе 3 проблему учета полисвязей в варианте решения задачи с расширением исходного пространства (в вариационной постановке это соответствует применению вспомогательного функционала с методом множителей Лагранжа). Лагранжевы множители, как дополнительные неизвестные, кроме неизвестных узловых перемещений, имеют смысл обобщенных усилий, и значит, фактически мы имеем дело со смешанной основной системой. Аналогичным образом обстоит дело в случае использования нуль-податливых связей. Но дело даже не в этом. Так ли уж справедливо утверждение, что высшие формы потери устойчивости не представляют практического интереса?

Покажем на простом примере, что положительный ответ на поставленный вопрос излишне категоричен, а значит — неверен.

В одной из конкретных задач проектирования требовалось определить толщину железобетонного днища подземного сооружения глубокого заложения, примерная схема которого показана на рис. 9.7.



**Рис. 9.7.** Раскрепление днища подвала анкерами от потери устойчивости

Боковое давление на стены подвала вызывало сильное сжатие днища, так что его толщина лимитировалась условиями устойчивости. Внутренние габариты между стенами подвала по технологическим требованиям эксплуатации не позволяли установить каких либо дополнительных перегородок или иных связей, раскрепляющих днище и увеличивающих критическую силу. В целях повышения несущей способности днища было принято решение об

установке специальных анкеров, закрепляющих днище от выпучивания.

Поскольку технически анкеры выполнить было не просто, и такая операция была весьма затратной, потребовалось решить задачу о минимизации необходимого количества анкеров и о рациональном их размещении вдоль днища из условия максимального повышения критической силы сжатия. Несложно догадаться, что определив вторую, третью и более высокие формы потери устойчивости для безанкерной системы, мы тем самым найдем наивыгоднейшие места расположения анкеров в случае одного анкера, двух анкеров и т.д. В самом деле, установив один анкер (то есть внешнюю связь) в узле второй формы выпучивания, получим первую критическую силу для системы с одним анкером, равную второй критической силе для исходной системы. На более высокий уровень с помощью одного анкера критическую силу повысить просто нельзя! Это следует из известных оценок влияния дополнительных связей [Нудельман, 1949] на критическую силу системы. Аналогичным образом приходим к заключению, что в случае  $k$  анкеров их следует установить в узловых точках  $(k+1)$ -й формы потери устойчивости исходной системы.

Итак, обобщая, приходим к общему выводу о том, что изучение высших форм потери устойчивости механической системы может оказать неопределимую практическую помощь инженеру в задачах оптимизации конструкций с ограничениями по устойчивости. Если конструкцию усиливают с помощью дополнительных связей, то грамотно расположить эти связи удастся лишь при условии, что инженеру известна не только первая форма потери устойчивости системы. А если это так, то потребитель вправе потребовать от разработчиков программных комплексов выявления не только явных, но и скрытых форм потери устойчивости.

Критическое значение коэффициента запаса устойчивости  $k$  может разыскиваться методом половинного деления интервала его возможных значений. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден интервал  $(k_1, k_2)$  такой, что  $k_2 - k_1 \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — малое число, задающее точность определения критической нагрузки), и матрица  $\mathbf{K}(k_1)$  положительно определена, а матрица  $\mathbf{K}(k_2)$  этим свойством не обладает. При этом величина  $k_1$  объявляется критической. Алгоритмически проверка положительной определенности матрицы жесткости  $\mathbf{K}(k)$  осуществляется чрезвычайно просто. Для этого достаточно провести прямой ход гауссовой процедуры, то есть разложение матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  на треугольные матричные множители в соответствии с формулой (5.82). Если такое разложение осуществимо, и при этом все диагональные элементы

матрицы  $\mathbf{U}$  строго положительны ( $U_{ii} > 0, i = 1, \dots, n$ ), то матрица  $\mathbf{K}$  положительно определена [Стренг, 1980], стр. 287. В противном случае матрица  $\mathbf{K}$  не является положительно определенной.

В предположении, что определенный коэффициент запаса устойчивости  $k \in (k_1, k_2)$  является точным, производят решение задачи о нахождении собственного вектора  $\mathbf{u}^*$  при известном собственном значении задачи

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G(k)] \mathbf{u}^* = \mathbf{0}. \quad (9.3)$$

Заметим, что правые части системы равны нулю, т.е. отыскиваются такие значения узловых перемещений и поворотов  $\mathbf{u}^*$ , которые вызываются только внутренними сжимающими напряжениями и усилиями. Поперечные нагрузки<sup>3</sup>, как известно, не влияют на значения критических сил и вид формы потери устойчивости. Поскольку уравнение (9.3) решено при нулевой правой части, то форма потери устойчивости определена лишь с точностью до множителя. Ее уменьшение или увеличение в любое число раз не нарушает условия (9.3).

### 9.3. Свободные длины сжатых стержней

В современной нормативной литературе, например, в нормах проектирования стальных конструкций [СНиП II-23-81\*], широко используется понятие *свободной* (*эффективной, расчетной, приведенной* — применяются различные варианты названия) длины стержня, под которым подразумевается длина воображаемого центрально-сжатого шарнирно опертого стержня той же жесткости  $EI$ , критическая сила сжатия у которого совпадает с критической силой для реального стержня. Это понятие введено Ф.С.Ясинским [1952] с целью обобщения формулы Эйлера на случай центрально-сжатого линейно-упругого стержня с произвольным закреплением концов, и оно прекрасно справляется со своей ролью при рассмотрении простейших конструкций типа изолированных стоек.

<sup>3</sup> По А.Р.Ржаницыну [1955], такие нагрузки называются *активными*, в отличие от *параметрических* нагрузок, непосредственно связанных с продольными силами. Конечно же, эти понятия хотя и полезны, но весьма условны и применимы к нагрузкам, как таковым, только в простейших системах. Легко представить себе нагрузку, которая вызывает продольные усилия в одних стержнях и одновременно является поперечной нагрузкой, вызывающей только изгиб, для других стержней той же системы. Ну и как же теперь классифицировать эту нагрузку — как активную или как параметрическую?

Однако его использование при рассмотрении стержней, входящих в состав более сложной системы, нуждается в определенных пояснениях.

Обычно используется такое рассуждение [Справочник..., 1973]: если известно критическое значение  $k^*$  параметра интенсивности нагрузки, то продольная сила в  $j$ -ом стержне в критическом состоянии системы, определяется как  $N_j^* = k^* N_j$ , где величина  $N_j$  является усилием в этом же стержне при единичном значении параметра интенсивности нагрузки  $k$ . Приравнявая  $N_j^*$  значению эйлеровой критической силы шарнирно опертого стержня с неизвестной пока что длиной  $\mu_j l_j$

$$N_j^* = \frac{\pi^2 EI_j}{(\mu_j l_j)^2}, \quad (9.4)$$

мы получаем коэффициент свободной длины  $\mu_j$ . Далее, выполняется проверка устойчивости всех стержней системы на действующие усилия  $N_j$  в предположении, что их свободные длины  $L_j = \mu_j l_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $n$  — количество сжатых стержней в системе.

Нетрудно показать, что эта проверка недостаточна.

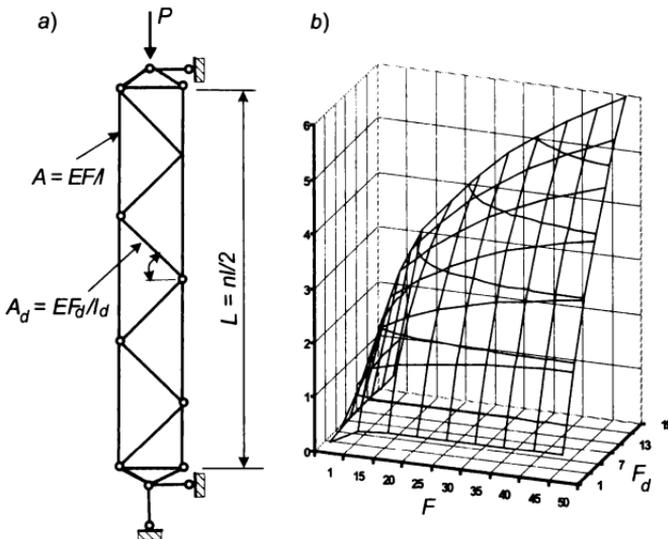


Рис. 9.8. Ферменная система:  $a$  — расчетная схема;  $b$  — график зависимости критической силы от площадей элементов

В качестве примера рассмотрим ферменную систему по типу, изображенному на рис. 9.8, для которой известно точное значение критической силы [Бовин, 1963]

$$P_{cr} = \frac{2(L/n)A_d \cos^2 \alpha / [1 + \cos(\pi/n)]}{1 + \frac{A_d \sin^2 \alpha}{2A[1 - \cos(\pi/n)]}}. \quad (9.5)$$

Для пояса мы получим  $N_j^* = P_{cr}/2$ , при этом по (9.4) значение коэффициента свободной длины

$$\mu = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{2EI}{P_{cr}}}, \quad (9.6)$$

где  $EI$  — жесткость на изгиб элементов пояса.

Понятно, что для нулевой решетки ( $A_d = 0$ ) этот коэффициент обращается в бесконечность. То, что критическая сила обращается в нуль при нулевой решетке, не вызывает сомнений. В самом деле, при нулевой решетке система становится геометрически изменяемой.  $\lambda$  значит — неустойчивой при сколь угодно малой продольной силе. Этот пример мы привели только для того, чтобы показать, что коэффициент  $\mu$  для элементов фермы может оказаться сколь угодно большим.

Заметим, что если для ферменных стержней мы получаем величину коэффициента  $\mu > 1$ , то это означает, что происходит общая потеря устойчивости системы, для предотвращения которой увеличение сечений элементов может оказаться неэффективным. В рассматриваемой схеме, например, при недостаточной устойчивости пояса, которая может обнаружиться в случае больших свободных длин, увеличение размеров его сечения может сказаться на результате в гораздо меньшей степени, чем увеличение жесткости решетки, в особенности при небольших площадях пояса (рис. 9.8, *b*). При этом обычно используемый прием увеличения радиуса инерции при неизменной площади сечения, который прекрасно себя зарекомендовал в случае простых стержней, вообще не срабатывает.

Следовательно, правильным подходом является такой, при котором проверку устойчивости системы в целом, которая абсолютно необходима, дополняют проверкой местной устойчивости ее элементов, в отличие от подхода норм проектирования, декларирующих только вторую проверку и не упоминающих о первой. Заметим, что проверка устойчивости элементов обычно предусматривает возможность появления начальных несовершенств, что в нормах проектирования стальных конструкций, например, учитывается при построении значений коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ . Поэтому при определении критической нагрузки для

идеализированной системы по методу Эйлера в пособии [Пособие по ..., 1989], стр.17 рекомендуется использовать специальный коэффициент надежности  $\gamma_e = 1,3$ .

Все сказанное выше по сути относилось к рассмотрению плоских расчетных моделей, или точнее — плоских схем деформирования. Только для них имеет смысл рассмотрение расстояния между точками перегиба изогнутой оси, обычно принимаемое в качестве расчетной длины. В пространственных схемах форма потери устойчивости может оказаться такой, что изогнутая ось стержня даже оставаясь плоской кривой, не принадлежит одной из главных плоскостей инерции. Тогда сразу же возникают вопросы: расчетная длина в какой плоскости равна расстоянию между точками перегиба. Простой пример такой системы представлен на рис.9.9.

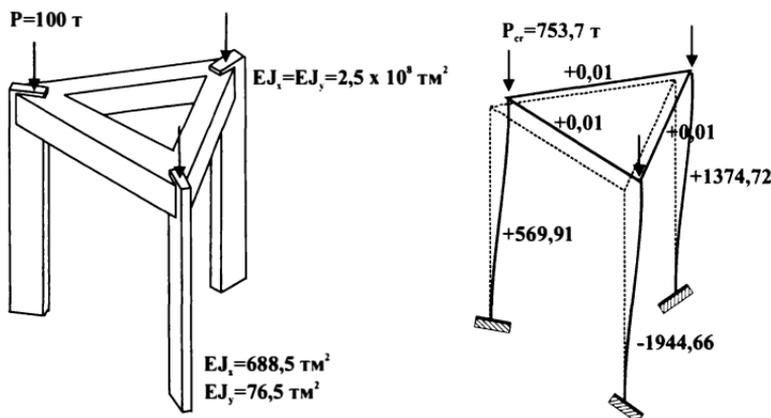


Рис. 9.9. Потеря устойчивости пространственной рамы

Поскольку даже для плоских стержневых систем расчетную длину сжатых стержней следует определять как в плоскости, так и из плоскости системы, то и здесь возникает нестыковка с определением Ф.С. Ясинского. Действительно, представим себе пространственный консольный стержень у которого поперечное сечение имеет моменты инерции  $J_x$  и  $J_y = 4J_x$ . При центральном сжатии такой стержень теряет устойчивость при нагрузке

$$P_{cr,x} = \frac{\pi^2 EJ_x}{4L^2} \quad (l_{0,x} = 2l).$$

По-видимому авторы норм и практикующие инженеры представляют себе ситуацию несколько другим способом, а именно, выполняется два расчета на устойчивость в которых попеременно запрещается деформирование то в одной, то в другой главной плоскости инерции (например, полагая то  $J_x = \infty$ , то  $J_y = \infty$ ) и из них

определяются коэффициенты расчетной длины  $\mu_x$  и  $\mu_y$ . Но и этот прием отказывает, если, например, ориентация центральных осей инерции сечения меняется по длине элемента, как это бывает у стержня с естественной круткой. Пример такой конструкции приведен на рис. 9.10.

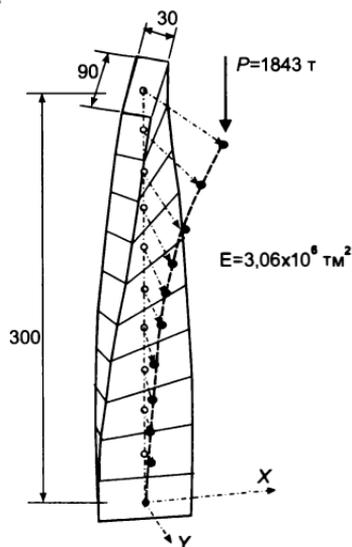


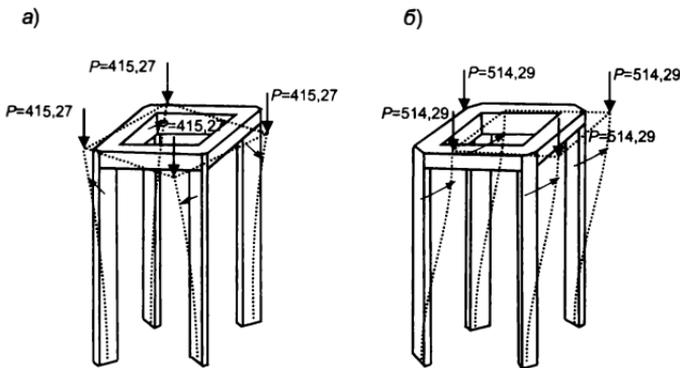
Рис. 9.10. Потеря устойчивости стержня с естественной круткой

В таблице 9.2 приведены координаты точек при потере устойчивости, а также угол  $\alpha$  вектора перемещения с осью  $X$ , определенные при численном решении этой задачи по программе SCAD.

Таблица 9.2

Z, см	X	Y	$\alpha$ , град
0	0	0	
30	0,53	13,35	2,3
60	4,03	53,43	4,3
90	14,10	119,30	6,8
120	33,70	208,50	9,3
150	64,62	317,10	11,8
180	107,20	440,60	14,2
210	160,50	574,10	16,5
240	222,30	713,60	18,5
270	289,70	862,20	20,2
300	359,70	1000,00	21,6

Нетрудно заметить, что изогнутая ось такого стержня не является плоской кривой. Кстати, этот случай не является единственным, когда потеря устойчивости происходит по пространственной кривой. Другой пример дает сжатый ствол мачты на оттяжках, у которой из-за действия ветра на оттяжки главные направления податливости оттяжечных узлов в различных ярусах не совпадают. Другие проблемы возникают в тех случаях, когда в пространственной системе главные оси инерции элементов не параллельны друг другу и форма потери устойчивости, как впрочем и расчетные длины, оказывается зависящей от ориентации этих осей в системе. Достаточно типичный пример приведен на рис. 9.11, где показаны формы потери устойчивости и интенсивность критического нагружения для двух конструкций, отличающихся ориентацией главных осей инерции.



**Рис. 9.11.** Системы с различной ориентацией осей инерции

Для системы по рис. 9.11,а коэффициент расчетной длины в плоскости минимальной жесткости  $\mu_x = 0,597$ , а для схемы по рис. 9.11,б —  $\mu_x = 0,523$ . В первом случае форма потери устойчивости такова, что все стойки деформируются в плоскости наименьшей жесткости, во втором такое деформирование наблюдается только у двух стоек, а две другие деформируются в плоскости наибольшей жесткости.

Из приведенных примеров видно, что мостик, построенный с помощью расчетных длин, между общим расчетом системы на устойчивость и нормативными проверками в некоторых отношениях оказывается слишком узким. К сожалению, нормы проектирования не пытаются сократить указанный разрыв.

С понятием свободной длины (точнее, с тем, как оно используется в нормах проектирования) связан целый букет неточных рассуждений, дискуссий и недоразумений. Многих смущало, что свободные длины стержней с малой сжимающей силой получаются

по расчету очень большими, а это входит в конфликт с требованиями норм проектирования по ограничению гибкостей элементов конструкций (см., например, [Геммерлинг, 1974], [Бельский, 1974]). Попытка пойти по пути увеличения жесткости таких стержней для уменьшения их гибкости, во-первых, противоречит логике проектирования, а во-вторых, не приводит к желаемому результату, поскольку с ростом жесткости недогруженных стержней возрастает их свободная длина.

В основе отмеченных противоречий лежит давно проанализированная [Ржаницын, 1975] путаница понятий, к сожалению, ставшая традиционной, и до сих пор не исправленная в тексте норм. Дело в том, что ограничение предельных гибкостей, которое вводится нормами проектирования, вообще говоря, не связано с понятием устойчивости системы. Для того, чтобы это осознать, достаточно задать себе простой вопрос: свободная длина по (9.4) меняется от одного варианта нагружения к другому, при каком же нагружении ее следует проверять?

Вот, например, типичное описание рассматриваемой проблемы ([Горев и др., 1977], стр. 330):

*«Вследствие высокой прочности стали элементы металлических конструкций при небольших усилиях имеют чрезвычайно малые размеры поперечных сечений, что может привести к вибрациям конструкций, погнутиям при перевозке и монтаже. Для того, чтобы этого не происходило, гибкость стержневых элементов ограничивается предельными значениями  $\lambda \leq \lambda_{lim}$ ».*

Отсюда, кстати, становится очевидной и эклектичность традиционного подхода к ограничению гибкости, поскольку, например, для шарнирно опертого стержня значение относительного прогиба под действием случайной поперечной нагрузки  $P$ , которое следовало бы уменьшать, равно

$$f/L = \frac{PL^2}{48EI} = \frac{P\lambda^2}{48EA}, \quad (9.7-a)$$

а период собственных колебаний  $T$ , который также следовало бы уменьшать, равен

$$T = \frac{2L^2}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EI}} = \frac{2L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{E}}. \quad (9.7-b)$$

В формулах (9.7), помимо уже введенных обозначений, принято:  $A$  — площадь поперечного сечения стержня;  $\lambda = L/r$  — гибкость

стержня;  $r^2 = I/A$  — квадрат радиуса инерции сечения стержня;  $m$  — погонная масса стержня;  $\gamma = m/A$  — плотность материала стержня.

Поскольку ограничения (9.7) связаны с погнутями и вибрациями стержневых элементов при перевозке и монтаже (см. приведенную выше цитату из [Горев и др., 1977]), то в формулах (9.7) под  $L$  логично понимать геометрическую длину стержня  $l$ , а не его свободную длину в составе объединенной конструкции, да еще в условиях действия внешней нагрузки на эту конструкцию. При этом подразумевается, что при монтаже и перевозках стержень поддерживается с двух концов так, что реализуется схема шарнирного опирания. Разумеется, что при иных условиях закрепления стержня при его перевозке и/или монтаже вместо формул (9.7) следует воспользоваться иными соотношениями. Так, например, при консольном варианте монтажного закрепления стержня соответствующие формулы примут вид

$$f/L = \frac{PL^2}{3EI} = \frac{P\lambda^2}{3EA}, \quad (9.8,a)$$

$$T = \frac{8L^2}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EI}} = \frac{8L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{E}}. \quad (9.8,b)$$

Гибкость  $\lambda$  в первом случае входит квадратично, а во втором — линейно, так что ее снижение различными способами сказывается на выполнении требований, предъявляемых к конструкции.

В любом случае монтажное ограничение на гибкость стержня никак не связано с проблемами устойчивости конструкции в процессе ее эксплуатации. Поэтому правильнее всего было бы нормировать эти требования по значениям  $f/L$  и  $T$  напрямую, а не косвенно, но нормы этого не делают. Мы можем лишь посоветовать расчетчику, не знаящему как поступить в конкретной ситуации, рассмотреть некую аналогичную конструкцию, и для случая шарнирного опирания по формулам (9.7) вычислить «норму» величин  $f/L$  и  $T$ . По сути, таким образом выполнено рассуждение в работе [Ржаницын, 1975], где предлагается норму расчетной гибкости  $\lambda_p$  устанавливать из сопоставления стрелки прогиба  $f$ , найденной расчетом исследуемой конструкции на специальную местную самоуравновешенную нагрузку (рис. 9.12,a) со стрелкой прогиба  $f_0$  того же стержня, но шарнирно закрепленного по концам (рис. 9.12,b).

При этом получается, что

$$\lambda_p = \lambda \sqrt{\frac{f_0}{f} \left(1 - \frac{1}{k^*}\right)}, \quad (9.9)$$

где  $\lambda = l/r$  и  $k^*$  — вычисленный коэффициент запаса устойчивости.

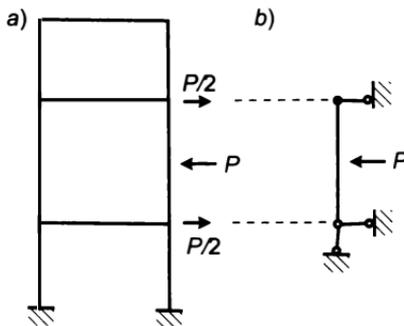


Рис. 9.12. К расчету допустимой гибкости:  
 а — проверяемая система; б — выделенный элемент

#### 9.4. Анализ роли отдельных подсистем

При анализе особенностей проявления возможной неустойчивости используются понятия *стесненного и принужденного состояний* отдельных частей системы при потере системой устойчивости [Смирнов, 1958]. Считается, что при потере системой устойчивости отдельная ее часть находится в стесненном состоянии, если будучи отделенной от других частей системы она потеряет устойчивость при меньшей интенсивности нагрузки, передаваемой на эту выделенную часть. Если же при таком «изолированном рассмотрении» для потери устойчивости выделенной части системы необходимо приложить нагрузку большей интенсивности, или же она вообще не теряет устойчивости, то говорят о принужденной потере устойчивости этой части системы. Естественно, что эти понятия сказываются на стратегии усиления системы, если признано, что общий коэффициент запаса устойчивости недостаточен. Обычно в этом случае начинают с усиления той части системы, которая находится в стесненном состоянии, но при этом следует помнить, что такая мера эффективна лишь до определенного предела, который характеризуется тем, что усиливаемая подсистема приобретает такую же «мощность», как и остальные части конструкции. Для эффективности дальнейшего усиления надо усиливать все сжатые элементы одновременно, сохраняя достигнутое состояние равноустойчивости элементов системы [Смирнов, 1958].

Понятия стесненного и принужденного состояний по отношению к выделенным фрагментам конструкции, введенные в инженерный

обиход уже более полувека назад, позволяют формировать целенаправленную стратегию усиления конструкции, несущая способность которой определяется условиями ее устойчивости. А между тем формальный вычислительный инструмент, особенно необходимый в компьютеризованных условиях проектирования, насколько известно авторам, до сих пор не был выработан. Это, по-видимому, объясняется тем, что введенные понятия являются условными<sup>4</sup>, поскольку, как отмечает и сам А.Ф.Смирнов [1958]:

*«...понятия стесненной и принужденной потери устойчивости, а также явление равноустойчивости не могут быть безотносительными к устраняемой связи».*

В этом отношении представляется полезным относить отдельные части системы (вплоть до отдельных ее элементов) к одному из следующих двух классов: к классу *удерживающих* и к классу *толкающих* элементов (или частей) системы. Удерживающие элементы способствуют сохранению устойчивости равновесия системы, тогда как роль толкающих элементов отрицательна, поскольку именно они понуждают (подталкивают) механическую систему к потере ею устойчивости. Алгоритмический аспект определения формального признака класса элемента, на удивление прост и очевиден.

В самом деле, проверка роли отдельных подсистем может быть произведена при подсчете значения энергии, накапливаемой в различных частях системы, при ее деформировании по форме потери устойчивости. Для системы в целом эта энергия равна нулю ([Ржаницын, 1955], стр. 36)

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G(k)] \mathbf{u}^* = 0. \quad (9.10)$$

Если система мысленно разбита на какие-то две части, то для любой из этих частей может быть составлена матрица жесткости  $\mathbf{K}_{0,i} + \mathbf{K}_{G,i}(k)$  ( $i = 1, 2$ ), которую мы будем представлять дополненной нулями до размера полной матрицы жесткости системы. Вычисляя значения энергий, накапливаемых каждой из двух выделенных частей системы

$$E_1 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{K}_{0,1} + \mathbf{K}_{G,1}(k)] \mathbf{u}^*, \quad (9.11)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{K}_{0,2} + \mathbf{K}_{G,2}(k)] \mathbf{u}^*, \quad (9.12)$$

<sup>4</sup> А.Ф.Смирнов в книге [1958], стр. 388 ссылается на Н.В. Корноухова, впервые употребившего эти термины — стесненного и принужденного состояний элементов конструкции при потере ею устойчивости.

мы всегда получим величины различных знаков, поскольку их сумма должна равняться нулю. Этим определяется та подсистема (ей соответствует  $E_i < 0$ ), которую целесообразнее ужесточить или дополнительно раскрепить. Соотнося эти величины с введенными выше понятиями, несложно догадаться, что, если  $E_i < 0$ , то соответствующая  $i$ -ая подсистема является толкающей, в противном случае при  $E_i > 0$  — удерживающей. Случай  $E_i = 0$  является особым, и мы поговорим о нем чуть позже.

Существенно также, что толкающие элементы системы могут быть ранжированы по степени их «виновности» в наступлении критического состояния системы. Если система мысленно разбита на несколько, скажем,  $m$  отдельных частей, и для каждой из этих частей подсчитано значение энергии  $E_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то чем меньше (в алгебраическом смысле) величина  $E_i$ , тем выше ответственность соответствующей  $i$ -ой части системы в потере системой устойчивости. Иначе говоря, вклад каждого из элементов системы в общий ее энергетический баланс может служить удобной количественной мерой этой ответственности.

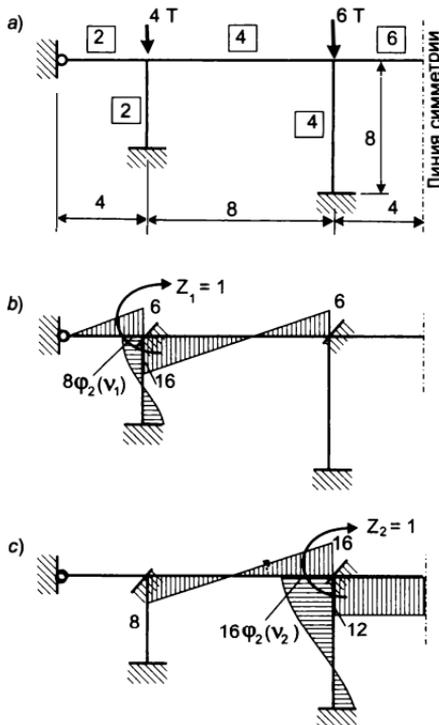


Рис. 9.13. Схема к примеру расчета:

$a$  — расчетная схема;  $b, c$  — эпюры моментов в единичных состояниях

Проиллюстрируем сказанное численным примером из [Смирнов, 1958], стр 250. Схема рассматриваемой конструкции показана на рис. 9.13 (до оси симметрии), где в рамках указаны значения погонных жесткостей  $i = EI/l$ . Функция  $\varphi_2(v)$  зависит от аргумента  $v$ , определяемого силой сжатия  $N$  в стержне,

$$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg}v - v)}{8\operatorname{tg}v\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)}, \quad (9.13)$$

и в нашем случае

$$v_1 = \sqrt{\frac{N_1 l_1}{i_1}} = \sqrt{\frac{4k \times 6}{2}} = \sqrt{12k}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{6k \times 8}{4}} = \sqrt{12k}. \quad (9.14)$$

Критическое значение интенсивности нагружения определяется значением  $k = 2,51$ , а форма потери устойчивости  $\mathbf{u}^* = [Z_1, Z_2]^T$  определяется значениями поворотов  $Z_1 = 1$  и  $Z_2 = -1,366$ . Соответствующие критическому состоянию системы значения безразмерных параметров  $v_1$  и  $v_2$  оказываются равными и определяются как

$$v_1 = v_2 = \sqrt{12k} = 5,488.$$

Разобьем мысленно систему на три части, относя к первой из них левую колонну, ко второй части — правую колонну, к третьей части — ригель рамы. Полная матрица жесткости системы  $\mathbf{K}$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} 22 + 8\varphi_2(v_1) & 8 \\ 8 & 28 + 16\varphi_2(v_2) \end{bmatrix},$$

и может быть представлена суммой трех матриц

$$\begin{bmatrix} 8\varphi_2(v_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16\varphi_2(v_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 8 & 28 \end{bmatrix},$$

отвечающих соответственно каждой из трех выделенных частей системы. Теперь несложно подсчитать, что  $\varphi_2(v_1) = \varphi_2(v_2) = -1,384$ , и следовательно

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} Z_1^2 \times 8\varphi_2(v_1) = -5,536; \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} Z_2^2 \times 16\varphi_2(v_2) = -20,660;$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{2} (22Z_1^2 + 28Z_2^2 + 2 \times 8Z_1Z_2) = 26,196.$$

Баланс вычисленных с помощью этих матриц значений энергий  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = 0$ , как и положено, выполняется, а сопоставление энергетического вклада каждой из выделенных частей системы в общий ее энергетический накопитель свидетельствуют о том, что

«слабым звеном» системы является правая колонна ( $E_2 < E_1 < E_3$ ), что полностью совпадает с результатами анализа из [Смирнов, 1958], хотя алгоритмически такой анализ здесь проведен значительно проще.

Поскольку вычисление выражений типа (9.11) после нахождения критического значения параметра  $k$  и соответствующей ему формы потери устойчивости является достаточно простой операцией, то дополнение программной системы функцией, позволяющей определить  $E_i$  для любого задаваемого пользователем подмножества элементов системы представляется весьма полезным и перспективным.

Программная система должна обладать возможностью расчленения конструкции на произвольное число частей, вплоть до отдельных элементов с последующим сопоставлением вклада каждого элемента в отрицательную и положительную части общей энергии и получением рекомендаций по усилению/ослаблению отдельных элементов. При этом можно более подробно установить роль отдельных элементов в общей картине потери устойчивости.

Дополнительной полезной информацией может оказаться значение *энергетического коэффициента понижения жесткости*, который может быть вычислен для каждого элемента системы, как

$$\eta_i = \frac{E_i(N)}{E_i(0)}, \quad (9.15)$$

где через  $E_i(N)$  обозначена энергия, накапливаемая  $i$ -м элементом, вычисленная с использованием матрицы жесткости  $\mathbf{K}(k)$ , а через  $E_i(0)$  — энергия этого же элемента при нулевой продольной силе, когда его полная матрица жесткости равна  $\mathbf{K}_0$ .

Нетрудно видеть, что

$$\eta_i = 1 + \frac{\mathbf{u}_i^{*\top} \mathbf{K}_{G,i} \mathbf{u}_i^*}{\mathbf{u}_i^{*\top} \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_i^*}, \quad (9.16)$$

где  $\mathbf{u}_i^*$  — выборка компонент вектора  $\mathbf{u}^*$ , относящихся к узлам рассматриваемого  $i$ -ого элемента, а  $\mathbf{K}_{0,i}^*$  и  $\mathbf{K}_{G,i}$  — соответственно матрицы обычной и геометрической жесткостей этого же элемента. Понятно, что коэффициент  $\eta_i$  интегрально характеризует падение жесткости рассматриваемого элемента, вызванное наличием в этом элементе сжимающих сил. Чем меньше (в алгебраическом смысле) коэффициент  $\eta_i$ , тем более существенно влияние продольных усилий на понижение жесткости  $i$ -го элемента. Кроме того, знак коэффициента  $\eta_i$  позволяет отнести соответствующий элемент

системы к одному из двух классов: к классу толкающих элементов (при  $\eta_i \leq 0$ ) или к классу удерживающих элементов (при  $\eta_i > 0$ ), поскольку знаменатель в формуле (9.15) всегда положителен.

Есть и еще одно важное обстоятельство<sup>5</sup>, благодаря которому информативность энергетического коэффициента понижения жесткости выше, чем простое сопоставление энергетического вклада каждой из выделенных частей системы в общий ее энергетический баланс при потере устойчивости. Проиллюстрируем это положение простым примером.

На рис. 9.14 показана простая П – образная рама с одинаковыми стойками и шарнирным присоединением ригеля к стойкам. Там же показана первая форма потери устойчивости этой системы.

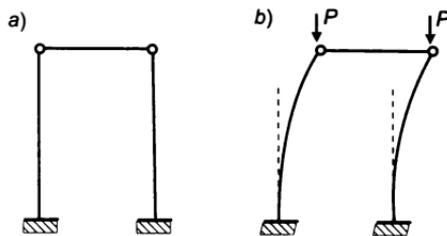


Рис. 9.14. Потеря устойчивости П-образной рамы

Ясно, что ригель рамы не деформируется при потере устойчивости системы по ее первой форме, и значит  $E_p = 0$  (энергия деформации, накапливаемая в ригеле). Но, как это несложно заметить, и для каждой из двух стоек соответствующая энергия деформации оказывается равной нулю,  $E_c = 0$ . Это следует хотя бы из того соображения, что суммарная энергия системы при ее деформировании по форме потери устойчивости должна равняться нулю, то есть  $E = E_p + 2E_c = 0$ . Становится ясно, что простое сопоставление энергий не позволяет в этом случае провести формальное разделение элементов на толкающие и удерживающие. Вполне понятно, что стойки являются толкающими элементами, тогда как ригель рамы требует отнесения себя к самостоятельному классу, элементы которого уместно назвать *нейтральными*. Нейтральные элементы системы не подталкивают ее (систему) к потере устойчивости, но и не препятствуют ей (потере устойчивости). Они всего лишь пассивные свидетели поведения системы в процессе

<sup>5</sup> На это обстоятельство (вместе с приводимым примером) обратил наше внимание профессор З.Гашпар (Zsolt Gáspár) из Будапештского технического университета во время дискуссии по докладу авторов на второй Европейской конференции по вычислительной механике (Польша, Краков, 26-29 июня, 2001г.).

потери ею устойчивости. Очевидно, что аналитический критерий  $E_i = 0$  говорит лишь о том, что  $i$ -ый ее элемент (или выделенная часть системы) может быть либо толкающим, либо нейтральным, но никак не удерживающим.

Для того, чтобы понять является ли  $i$ -ый ее элемент системы нейтральным или толкающим, следует выяснить причину возникновения равенства  $E_i = 0$ . И вот здесь роль упомянутых выше коэффициентов  $\eta$  для таких элементов возрастает. В самом деле равенство

$$E_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^{*\top} [\mathbf{K}_{0,i} + \mathbf{K}_{G,i}(k)] \mathbf{u}_i^* = 0,$$

возможно в двух ситуациях: либо  $\mathbf{u}_i^* \neq \mathbf{0}$ , либо  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{0}$ . Понятно, что в первом случае рассматриваемый элемент является толкающим, а его коэффициент  $\eta_i$  получается равным нулю. Во втором случае (при  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{0}$ ) этот элемент нейтрален по отношению к рассматриваемой форме потери устойчивости системы – он просто никак не участвует в деформировании системы по форме потери устойчивости, а значение коэффициента  $\eta_i$  для него является неопределенным, поскольку и числитель и знаменатель в формуле (9.15) равны нулю.

Этот уточненный критерий восстанавливает алгоритмическую возможность полного ранжирования элементов системы. Так, в рассматриваемом примере П-образной рамы коэффициенты  $\eta$  для ригеля и стоек будут соответственно равны

$$\eta_p = \frac{0}{0}, \quad \eta_c = 0,$$

и значит ригель является нейтральным, а стойки толкающими элементами.

Конечно, более аккуратный анализ рационального усиления конструкции в отношении ее устойчивости должен быть основан на подсчете и сопоставлении коэффициентов чувствительности критического значения параметра нагрузки к изменениям отдельных проектных параметров системы. Такой анализ может быть проведен так же, как это сделано в разделе 7.3 в отношении коэффициентов чувствительности для частот свободных колебаний системы. Однако, высокая трудоемкость вычислительного процесса при определении коэффициентов чувствительности в задачах устойчивости склоняет в пользу описанного выше более простого алгоритма, основанного на энергетическом ранжировании элементов системы.

Следует заметить, что при использовании результатов описанного анализа для принятия решений о модификации элементов или

подсистем полезно проявить определенную сдержанность. Дело в том, что подсчет энергии реализуется с помощью формы потери устойчивости  $u^*$ , которая была определена для системы с первоначальным распределением жесткостей и усилий, а при их изменениях эта форма также меняется. Поэтому результат модификации подлежит обязательной проверке. Кроме того, и это более существенно, при усилении отдельных элементов имеется определенная граница, выше которой эта операция уже не сказывается на результатах. Справедливость этого утверждения легко понять, если заметить, что, например, в показанной на рис. 9.10 задаче даже бесконечное увеличение жесткости одной из колонн не приведет к такому же росту коэффициента запаса, поскольку система начнет терять устойчивость по «локальной» форме, без деформирования переужесточенной колонны.

По-видимому, впервые на это свойство задачи устойчивости упругих систем обратил внимание И.Г. Бубнов, который указал, что в задаче устойчивости балки на упругих опорах существует некоторая предельная жесткость этих опор, за которой дальнейшее увеличение жесткости опор не приводит к увеличению критической силы, а сами опоры с предельной жесткостью ведут себя как абсолютно недеформируемые ([Тимошенко, 1955], стр. 117).

И, наконец, следут сказать несколько слов об использовании энергетического анализа роли отдельных элементов при определении расчетных длин.

Более нагруженные стержни теряют устойчивость стесненно, увлекая за собой менее нагруженные стержни, которые теряют устойчивость принужденно. В первом случае свободные длины, найденные исходя из общей критической нагрузки, соответствуют форме потери устойчивости и их можно в рамках существующей методики расчета использовать для проверки элементов несущих конструкций. Во втором случае формально получаемые величины свободных длин имеют малое отношение к форме потери устойчивости элементов, деформирующихся принужденно и они нуждаются в уточнении.

Проиллюстрируем сказанное примером (рис. 9.15), заимствованным из работы [Александров и др., 2002]. Все стержни рамы представляют собой двутавры № 40 (изгиб в плоскости рамы происходит относительно оси с минимальным моментом  $I = 667 \text{ см}^4$ ,  $A = 72,6 \text{ см}^2$ ,  $i_y = 3,03 \text{ см}$ ,  $W_y = 86,1 \text{ см}^3$ ,  $l = 544 \text{ см}$ ). При этих данных расчет дал значения  $P_{кр}^A = 35,72 \text{ т}$  и  $P_{кр}^B = 121,9 \text{ т}$ , а по результатам анализа энергии деформирования определены элементы с

принужденным либо стесненным характером деформирования. На рис. 9.15 первые показаны сплошными линиями, а вторые — пунктиром.

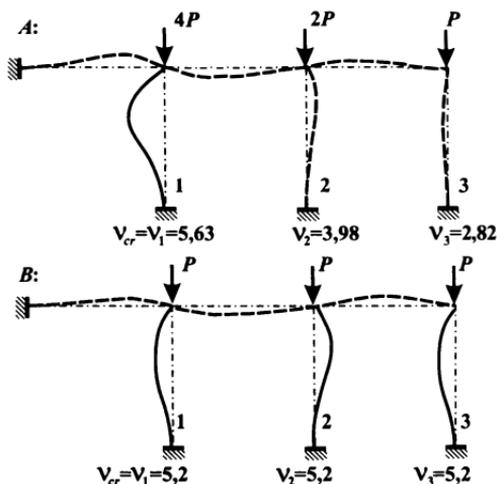


Рис. 9.15. Два варианта загрузки рамы

Сравним теперь работу стоек 1 и 3 в загрузках *A* и *B*. Стойка 3 в отличие от стойки 1 при замене нагрузки *A* на схему нагрузки *B* переходит из пассивного в активное состояние (то же происходит и со стойкой 2). При этом ее свободная длина при пассивной бифуркации  $l_{03} = \pi l / v_1 = 1,12l$  существенно превосходит свободную длину при активной потере устойчивости  $l_{03} = \pi l / v_3 = 0,604l$ . Это приводит к тому, что при проверке устойчивости стойки 3 с использованием коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ , эта стойка в загрузке *A* (где она наименее загружена и теряет устойчивость пассивно) будет иметь самое малое значение  $\varphi$ , что якобы указывает на ее относительную опасность.

Но механизм возникновения пассивной бифуркации совершенно иной, нежели активной, и поэтому пассивную бифуркацию отдельных стержней нельзя оценивать по коэффициенту  $\varphi$ . Еще более наглядно отмеченное обстоятельство проявляется в случае сжато-изогнутых стержней, которые, как известно по СНиП-II-23-81, проверяются с использованием соответствующего коэффициента  $\varphi_e(\bar{\lambda}, m_{ef})$ , где  $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{E/\sigma_T}$  — приведенная гибкость, а  $m_{ef} = e/\rho$  — относительный эксцентриситет ( $e$  — действительный эксцентриситет,  $\rho$  — ядровое расстояние поперечного сечения).

На рис. 9.16 показаны кривые изменения напряжений  $\sigma_{\text{тах}} = N + M_{\text{max}}/W$  рассмотренных стоек 1 и 3 в случаях загрузки *A* и

В при наличии, кроме вертикальных сил  $P_i$ , еще и горизонтальной силы  $Q = 0,01373P$  действующей на стойку 3 посередине ее высоты. Эта сила выбиралась такой, чтобы для стойки 3 оказалось  $m_{ef} = 1$ .

График рис. 9.16 позволяет приблизительно оценить  $\varphi_e$  для стоек рам и сравнить их с табличными значениями из СНиП, если приблизительно принять, что  $P_{пред} = P_T$  и  $\varphi_e = \sigma_0 / \sigma_T$ , где  $\sigma_0 = P_{пред} / A = P_T / A$  — осевое напряжение от продольной силы  $P_{пред} = P_T$ , т.е. нагрузке, при которой появляется фибровая текучесть в данной стойке. Тогда  $\sigma_{max} = N/A + M_{max}/W = \sigma_T$ . Например, для стойки 3 загрузки  $B$ , теряющей устойчивость активно, имеем  $P_T = 64,6$  т и  $\sigma_0 = 89$  МПа, что при  $\sigma_T = 240$  МПа по (14) дает  $\varphi_e = 89/240 = 0,371$ . По таблицам СНиП-II-23-81 в данном случае получим

$$\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\sigma_T / E} = \frac{0,604 \cdot 544}{3,03} \sqrt{240 / 2 \cdot 10^5} = 3,75.$$

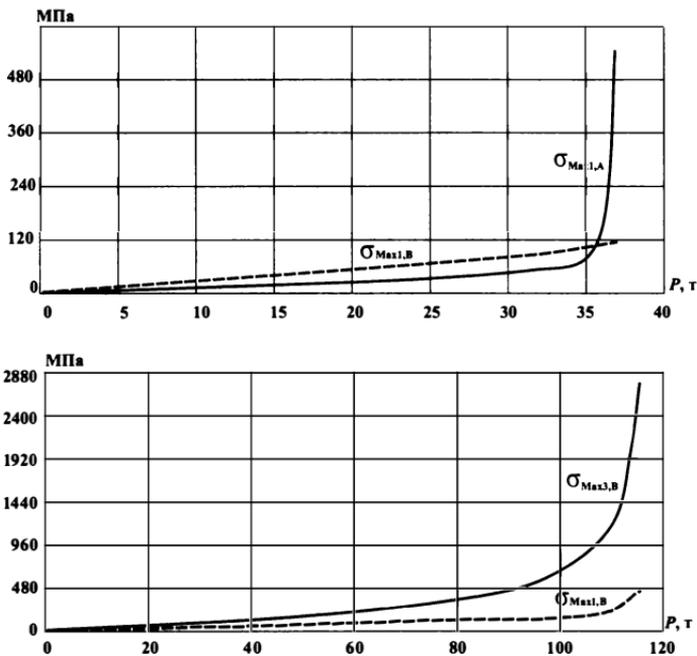


Рис. 9.16. Кривые изменения максимальных фибровых напряжений

При  $m_{ef} = 1$  и  $\bar{\lambda} = 3,75$  найдем  $\varphi_e = 0,352$ , что достаточно хорошо согласуется с найденным значением  $\varphi_e = 0,371$ . Полученное соответствие говорит о том, что стойка с активной бифуркацией, по крайней мере, качественно может оцениваться с помощью коэффициентов СНиП.

Совсем по-другому ведет себя та же стойка 3 при загрузке  $A$ , когда она имеет пассивную бифуркацию. Из рис. 9.16 видно, что в этом случае напряжения  $\sigma_{\max}$  в этой стойке растут практически по линейному закону при изменении  $P$  от нуля почти до значения  $P_{cr,A} = 35,72$  т, причем  $\sigma_{\max}$  остается значительно менее  $\sigma_T = 240$  МПа. В то же время приближением  $P$  к критическому значению в стойке 1 резко увеличиваются напряжения, превышая предел текучести.

В действительности можно ожидать, что именно в стойке 1 ранее всего возникнут пластические шарниры, образуется пластический механизм, и она будет определять предельное состояние рамы, а пассивная стойка 3 практически не окажет влияния на это предельное состояние конструкции. Ее собственный пластический механизм возникает на более поздних стадиях роста нагрузки и при других граничных условиях на ее концах при иных значениях  $P$  в сравнении с теми, что имели место при  $P < P_{лр}$ .

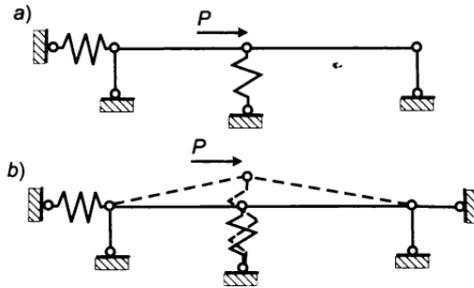
*Поэтому применять методика СНуПа к пассивной стойке не имеет смысла.*

Заметим, что для равноустойчивой системы мы подошли бы ближе к требуемому результату. К равноустойчивости можно приблизиться увеличением продольных сил только в элементе, теряющем устойчивость принужденно, переведя его таким образом в состояние стесненной потери устойчивости.

## 9.5. О влиянии дополнительных связей на устойчивость системы

Точка зрения о безусловно стабилизирующей роли наложения дополнительных связей широко распространена и редко обсуждается. Эта уверенность берет свое начало из теоремы Релея, которая излагается почти во всех стандартных курсах теории устойчивости или теории колебаний, но при этом внимание не фиксируется на одном важном условии, при нарушении которого теорема Релея может быть неверна: дополнительные связи не должны менять состояние равновесия системы, устойчивость которого проверяется, при этом также должны сохраняться не только перемещения системы, но и распределение внутренних усилий. А.Р. Ржаницын назвал такие связи *иммобильными* и распространил теорему Релея на нелинейные системы со связями иммобильного типа [Ржаницын, 1964].

Легко построить примеры, иллюстрирующие дестабилизирующее влияние дополнительной связи, когда такая связь меняет распределение продольных сил и превращает, например, абсолютно устойчивую конструкцию (рис. 9.17,*a*) в систему, критическая сила которой конечна (рис. 9.17,*b*).



**Рис. 9.17.** Дестабилизирующая дополнительная связь:  
*a* — исходное состояние; *b* — состояние с дополнительной связью

Математически образованные инженеры, сталкиваясь с подобного рода примерами, склонны иногда усматривать в этом некий парадокс. В самом деле, если задачу устойчивости механической системы ставить вариационно (как задачу на минимум), то проблема поиска первого критического значения параметра нагрузки сводится к отысканию минимума некоторого функционала, минимальное значение которого и определяет критическое значение параметра нагрузки. Но тогда наложение любой связи на механическую систему математически эквивалентно сужению множества допустимых к сравнению функций — кинематически допустимых перемещений. Понятно, что на суженном множестве минимум функционала не может быть ниже минимума того же функционала на исходном множестве!

На самом деле никакого парадокса здесь нет. Все дело в том, что связи, не являющиеся по А.Р.Ржаницыну иммобильными, не только сужают пространство возможных перемещений системы, но они также изменяют и сам функционал. И в этом принципиальное отличие иммобильных связей от связей, не являющихся таковыми.

### 9.5.1. Об одной ошибке загадочного характера в программных продуктах при расчете механических систем на устойчивость

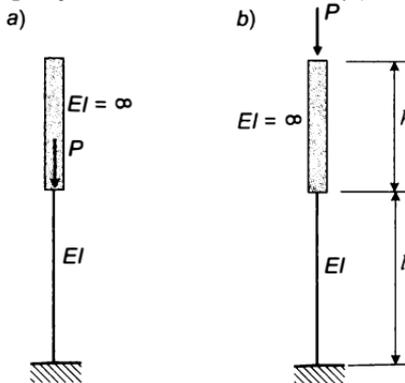
Начнем с простейшей задачи расчета механической системы на устойчивость, схема которой изображена на рис. 9.18. Система

представляет собой консольный стержень длины  $l$  с изгибной жесткостью  $EI$ , снабженный на конце консоли абсолютно жесткой вставкой длины  $h$ .

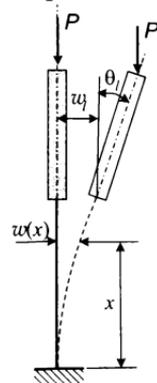
В задаче по рис. 9.18,а критическая сила равняется известной величине

$$P_{crA} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (9.17)$$

поскольку абсолютно жесткий участок стержня не напряжен и не оказывает никакого влияния на величину критической нагрузки. Что касается задачи по рис. 9.18,б, то критическую нагрузку для нее также несложно определить. Приведем элементарный вывод соответствующих формул, воспользовавшись статическим методом поиска критической нагрузки – методом Эйлера. С этой целью рассмотрим равновесие системы в отклоненном ее состоянии, характеризуемом смещением  $w(x)$ , как это показано на рис. 9.19.



**Рис. 9.18.** Схема расчета консольного стержня на устойчивость: а — сила приложена непосредственно к деформируемой части стержня; б — сила приложена в вершине стержня (на конце абсолютно жесткой вставки)



**Рис. 9.19.** К определению критической нагрузки для задачи по рис. 9.18,б

В состоянии выпучивания развивающийся в произвольном сечении стержня изгибающий момент  $M = EIw''$  уравнивается соответствующим моментом  $M$ , порождаемым действующей нагрузкой  $P$ . Если ввести обозначения

$$w_l = w(l), \quad \theta_l = w'(l), \quad (9.18)$$

то, как это видно из рис. 9.19,  $M = P(w_l + h\theta_l - w)$ . Итак

$$EI w'' + Pw = P(w_l + h\theta_l).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения можно записать в виде

$$w(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + w_l + h \theta_l, \quad (9.19)$$

где обозначено

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (9.20)$$

Из краевых условий  $w(0) = 0$  и  $w'(0) = 0$  немедленно находим, что  $A = 0$  и  $B = -(w_l + h \theta_l)$ , следовательно (9.19) упрощается до

$$w(x) = (w_l + h \theta_l)(1 - \cos \alpha x). \quad (9.21)$$

В этом уравнении параметры  $w_l$  и  $\theta_l$  остаются пока неизвестными. Воспользовавшись определением этих параметров по (9.18) и вводя обозначение  $v$  для безразмерного параметра продольной силы

$$v = \alpha l, \quad (9.22)$$

из (9.21) находим, что

$$w_l = (w_l + h \theta_l)(1 - \cos v), \quad \theta_l = (w_l + h \theta_l) \frac{v}{l} \sin v.$$

После элементарных преобразований приходим отсюда к системе двух однородных линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров  $w_l$  и  $\theta_l$

$$-w_l \cos v + h \theta_l (1 - \cos v) = 0,$$

$$w_l v \sin v + \theta_l (h v \sin v - l) = 0.$$

Условие существования нетривиального решения этой системы требует, чтобы ее определитель равнялся нулю, что приводит окончательно к уравнению (9.23), минимальный корень которого и определяет критическое значение параметра продольной силы  $v_{cr}$

$$\frac{l}{h} = v \operatorname{tg} v. \quad (9.23)$$

Ниже на рис. 9.20 приведен график зависимости  $v_{cr}$  от относительной длины жесткой вставки  $h/l$ . В частности, из этого графика видно, что при  $h = 0$  значение  $v_{cr}$  равно  $\pi/2$ , что соответствует решению задачи по рис. 9.18,а.

Попробуем решить теперь эти же две задачи с помощью программного инструментария. Зададимся конкретными числовыми данными, положив для определенности  $EI = 1$ ,  $l = 1$ ,  $h = 1$ . Как это не странно, но все проверенные нами на этом примере расчетные

программы дружно выдают один и тот же результат – правильный для задачи по рис. 9.18,*a* и ошибочный для задачи по рис. 9.18,*b*:  $P_{crA} = P_{crB} = 2,467$ . Правильное решение, как это видно из графика на рис. 9.20, должно давать  $P_{crB} = 0,741$  ( $v_{cr} = 0,861$ ). Итак, в данном случае критическая нагрузка для задачи по рис. 9.18,*b*, определенная программным путем, завышается более чем в три раза!

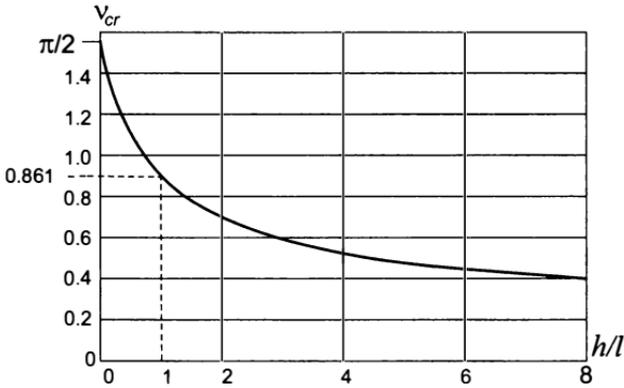


Рис. 9.20. График функции  $v_{cr} = v_{cr}(h/l)$ , построенный на основании решения уравнения (9.23)

Еще более катастрофически ошибочный результат выдают большинство коммерческих программ в задаче, показанной на рис. 9.21. Увы, здесь все, отмеченные в сноске программы, кроме программы **SCAD**, авторитетно сообщают, что система вообще не теряет устойчивости<sup>6</sup>.

Не останавливаясь на решении этой простой задачи, укажем правильный результат для критической нагрузки

<sup>6</sup> Точнее говоря, мы проверили результат работы следующих программ: **GTSTRUDL**, **Robot**, **Lira**, **Nastran**, **ANSYS**, **COSMOS**, **SCAD**. Единственной программой, правильно решающей обе эти задачи, оказалась программа **SCAD** версии 31. Иногда испытываемые программы отказываются от проведения соответствующих расчетов, в иных случаях (что более опасно) выдается ошибочный результат без всякого предупреждения. Справедливости ради следует сказать, что если в программе **GTSTRUDL** для задачи (9.18,*b*) жесткие вставки задавать с помощью внутренней команды **END JOINT SIZE**, то результат оказывается правильным. Но все же, если использовать аппарат абсолютно жестких тел (команда **RIGID BODY**) или аппарат эксцентриситетов (команда **ECCENTRICITIES**), то на этой задаче спотыкается и **GTSTRUDL**.

Мы будем признательны тем нашим читателям, которые имеют доступ к иным коммерческим программным разработкам, и сообщают нам результаты своих проверок различных программ на этих примерах.

$$P_{cr} = \frac{3EI}{lh}$$

Немного поразмыслив, нетрудно сообразить, что разработчики большинства коммерческих программ попались на одну и ту же удочку, одновременно призывая и пользователей заглотнуть этот опасный крючок.

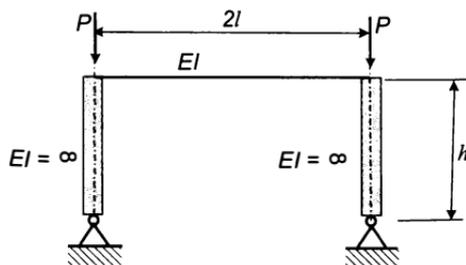


Рис. 9.21. Тестовая задача для расчета на устойчивость

Все дело в том, что в задачах устойчивости абсолютно жесткое тело не может рассматриваться как линейная связь. В самом деле, все уравнения, относящиеся к абсолютно жестким телам и приведенные в разделе 2.6, являются линейными уравнениями и, следовательно, они относятся исключительно к задачам расчета механических систем в геометрически линейной постановке. В то же время при анализе устойчивости системы уравнения равновесия должны рассматриваться в линеаризованной (а не в линейной!) постановке. Иначе говоря, уравнения равновесия составляются для деформированного состояния системы, и значит отвечают первому этажу геометрической нелинейности.

Итак, пусть механическая система содержит в своем составе абсолютно жесткое тело. Будем считать, что переход от заданной механической системы к ее дискретной расчетной схеме уже совершен. Если выделить теперь из этой расчетной схемы абсолютно жесткое тело, то воздействие на это тело отброшенной части расчетной схемы можно заменить соответствующими реактивными силами и моментами. Будем для общности считать, что кроме реактивных сил на это жесткое тело действуют и некоторые заданные (активные) сосредоточенные силы и моменты. Обозначим через  $m$  общее количество точек абсолютно жесткого тела (если угодно, можно называть эти точки узлами), в которых и приложены соответствующие вектор-силы  $P_i$  и вектор-моменты  $M_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Выберем теперь на абсолютно жестком теле произвольную точку  $O$ , которую назовем *полюсом*. В частности, хотя это и не обязательно,

полос может совпадать с одним из уже выбранных узлов из числа  $m$ . Пусть  $r_i$  радиус-вектор, проведенный из полюса в  $i$ -ый узел. Вспоминая, что рассматривается устойчивость некоторого **равновесного** состояния системы, заключаем отсюда, что и выделенное абсолютно жесткое тело под действием всех приложенных к нему (активных и реактивных) сил  $P_i$  и моментов  $M_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) должно находиться в состоянии равновесия. Последнее означает, что приведенные к полюсу вектор сил и вектор-момент должны равняться нулю

$$\sum_{i=1}^m P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m (M_i + r_i \times P_i) = 0. \quad (9.24)$$

В процессе выпучивания перемещения абсолютно жесткого тела однозначно определяются вектором перемещения полюса  $u_0$  и вектором поворота тела  $\theta$ , исходящего из полюса  $O$ .

Нашей ближайшей задачей здесь является установление выражения для той части перемещения жесткого тела, которая связана с его поворотом. С этой целью рассмотрим отдельную точку  $A$  абсолютно жесткого тела, которая после получения телом поворота перейдет в положение  $A'$  (рис. 9.22).

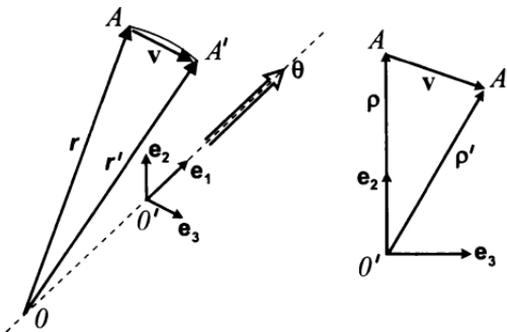


Рис. 9.22. К определению нелинейного уравнения связи, доставляемого абсолютно жестким телом

Пусть  $r$  – радиус-вектор точки  $A$ , а  $r'$  – радиус-вектор точки  $A'$ . Это означает, что вызванное поворотом  $\theta$  перемещение  $v$  рассматриваемой точки определится как

$$v = r' - r. \quad (9.25)$$

Помимо исходной (глобальной для системы в целом) декартовой системы координат  $(X, Y, Z)$  с ортами соответствующих осей  $i_x, i_y, i_z$  введем в рассмотрение еще одну декартову систему координат с ортами  $e_1, e_2, e_3$ . Орт  $e_1$  направлен вдоль оси вращения тела, а орт  $e_2$

ортогонален плоскости, образуемой векторами  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\theta}$ . Направление орта  $\mathbf{e}_3$  выбирается так, чтобы тройка векторов  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}, \mathbf{e}_3)$  образовывала правоориентированную систему осей. Итак

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{r|\sin \alpha|} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}, \quad (9.26)$$

где  $\theta$  и  $r$  представляют собой длины соответствующих векторов, выражаемые через компоненты этих векторов относительно осей  $(X, Y, Z)$  по формулам

$$\theta = \|\boldsymbol{\theta}\| = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}, \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2},$$

а  $\alpha$  представляет собой угол между векторами  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\mathbf{r}$ .

Что касается орта  $\mathbf{e}_2$ , то он определится из условия правой ориентации декратовой системы осей  $(1, 2, 3)$ , а именно

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \frac{1}{r|\sin \alpha|} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{e}_1. \quad (9.27)$$

Из векторного исчисления известно следующее представление двойного векторного произведения [Кочин, 1965]

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}). \quad (9.28)$$

Здесь и далее центральной точкой обозначается скалярное произведение векторов. Применяя равенство (9.28) к определению орта  $\mathbf{e}_2$  по (9.27), перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{r|\sin \alpha|} [\mathbf{r} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})]. \quad (9.29)$$

Проведем плоскость, проходящую через точки  $A$  и  $A'$  и перпендикулярную оси вращения  $\boldsymbol{\theta}$ . Пусть  $O_1$  есть точка пересечения указанной плоскости с осью вектора  $\boldsymbol{\theta}$ . Обозначим через  $\boldsymbol{\rho}$  вектор  $O_1A$ , а через  $\boldsymbol{\rho}'$  вектор  $O_1A'$ . Ясно, что оба эти вектора имеют одну и ту же длину  $\rho$ , равную величине

$$\rho = r |\sin \alpha|. \quad (9.30)$$

Очевидно также, что для определения вектора  $\mathbf{v}$  вместо (9.25) можно воспользоваться равенством

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}. \quad (9.31)$$

Но вектор  $\boldsymbol{\rho}'$  образуется из вектора  $\boldsymbol{\rho}$  поворотом последнего на угол  $\theta$  вокруг оси  $\boldsymbol{\theta}$  и, как это видно из рис. 9.17,

$$\boldsymbol{\rho}' = \rho \cos \theta \mathbf{e}_2 + \rho \sin \theta \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_2,$$

поэтому

$$\mathbf{v} = \rho [(\cos\theta - 1) \mathbf{e}_2 + \sin\theta \mathbf{e}_3]. \quad (9.32)$$

После подстановки в (9.32) выражений для векторов  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  по (9.26) и (9.29) получим с учетом (9.30)

$$\mathbf{v} = (\cos\theta - 1) [\mathbf{r} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})] + \sin\theta \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}. \quad (9.33)$$

Формула (9.33) по-существу представляет собой удобный для наших целей вариант записи формулы Родрига (Rodrigues), известной в теории конечных поворотов твердого тела [Лурье, 1961].

Но в нашем случае (в задачах устойчивости) уравнение (9.33) можно упростить. В самом деле, в линейризованной постановке задачи считается, что углы поворота являются величинами, квадратами которых можно пренебречь по сравнению с единицей. Поэтому, если разложить тригонометрические функции в ряд Тейлора и удерживать в этом разложении члены не выше второго порядка, то в результате придем к упрощенному уравнению связи, которое будет иметь вид

$$\mathbf{v} = \theta \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r} - \frac{1}{2}\theta^2 [\mathbf{r} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r})]. \quad (9.34)$$

Если отождествить теперь точку  $A$  абсолютно жесткого тела с  $i$ -ым его узлом, то полное перемещение этого узла  $\mathbf{u}_i$  с учетом перемещения полюса  $\mathbf{u}_0$  запишется в виде

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 + \theta \mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}_i - \frac{1}{2}\theta^2 [\mathbf{r}_i - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r}_i)]. \quad (9.35)$$

Подсчитаем теперь работу  $A$  всех сил, действующих на абсолютно жесткое тело. Имеем

$$A = \sum_{i=1}^m (P_i \cdot \mathbf{u}_i + M_i \cdot \theta). \quad (9.36)$$

Если подставить в (9.36) выражение для  $\mathbf{u}_i$  по (9.35), то обнаружим, что работа  $A$  складывается из двух величин

$$A = A_1 + A_2,$$

где  $A_1$  линейно зависит от компонент векторов  $\mathbf{u}_0$  и  $\theta$ , а  $A_2$  представляет собой однородную квадратичную форму от компонент вектора вращения  $\theta$ . Воспользовавшись известной формулой векторного исчисления для смешанного произведения [Кочин, 1965]

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}),$$

представим линейную часть работы, то есть  $A_1$ , в виде

$$A_1 = \sum_{i=1}^m [P_i \cdot \mathbf{u}_0 + (M_i + \mathbf{r}_i \times P_i) \cdot \theta], \quad (9.37)$$

тогда как квадратичная ее часть, то есть  $A_2$ , запишется как

$$A_2 = \sum_{i=1}^m \left[ -\frac{1}{2} \theta^2 (P_i \cdot r_i) + \frac{1}{2} (P_i \cdot \theta) (r_i \cdot \theta) \right]. \quad (9.38)$$

Прежде всего заметим, что условия стационарности  $A_1$  приводят, как это и следовало ожидать, к уравнениям равновесия (9.24) для абсолютно жесткого тела.

Далее, компоненты геометрической матрицы жесткости  $K_G$ , порождаемой абсолютно жестким телом, определяются двойным дифференцированием выражения для работы  $A$ . Иначе говоря,

$$K_G = \begin{bmatrix} g_{\theta_x \theta_x} & g_{\theta_x \theta_y} & g_{\theta_x \theta_z} \\ g_{\theta_y \theta_x} & g_{\theta_y \theta_y} & g_{\theta_y \theta_z} \\ g_{\theta_z \theta_x} & g_{\theta_z \theta_y} & g_{\theta_z \theta_z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_x \partial \theta_x} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_x \partial \theta_y} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_x \partial \theta_z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_y \partial \theta_x} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_y \partial \theta_y} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_y \partial \theta_z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_z \partial \theta_x} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_z \partial \theta_y} & \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_z \partial \theta_z} \end{bmatrix}. \quad (9.39)$$

Именно эта геометрическая матрица жесткости и не учитывается в программах, выдающих ошибочный результат в приведенных выше примерах.

Если расписать выражение для  $A_2$  по (9.38) в координатной форме, то получим

$$A_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [ -(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2) (P_{ix} r_{ix} + P_{iy} r_{iy} + P_{iz} r_{iz}) + (P_{ix} \theta_x + P_{iy} \theta_y + P_{iz} \theta_z) (r_{ix} \theta_x + r_{iy} \theta_y + r_{iz} \theta_z) ]. \quad (9.40)$$

Теперь имеем возможность выписать выражения для компонент интересующей нас матрицы  $K_G$  в явной форме. Итак

$$\begin{aligned} g_{\theta_x \theta_x} &= \sum_{i=1}^m (P_{iy} r_{iy} + P_{iz} r_{iz}), \\ g_{\theta_y \theta_x} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (P_{ix} r_{iy} + P_{iy} r_{ix}), \\ g_{\theta_z \theta_x} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (P_{ix} r_{iz} + P_{iz} r_{ix}). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Компоненты второго и третьего столбцов матрицы  $K_G$  не выписываем, так как они получаются из (9.41) круговой перестановкой индексов.

В частном случае плоской механической системы вектор вращения  $\theta$  ортогонален плоскости рассматриваемой системы (скажем, плоскости  $X, Y$ ) и значит имеет всего одну компоненту  $\theta_z$ . Порядок матрицы геометрической жесткости плоского абсолютно жесткого тела становится равным единице, а ее единственная компонента принимает особенно простой вид

$$g_{\theta_z \theta_z} = \sum_{i=1}^m (P_{ix} r_{ix} + P_{iy} r_{iy}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (9.42)$$

Этот же результат получается непосредственно и из формулы (9.38). Действительно, в случае плоской задачи любой вектор  $\mathbf{r}_i$  ортогонален вектору вращения  $\theta$ , то есть  $(\mathbf{r}_i \cdot \theta) = 0$ . Следовательно формула (9.38) упрощается до

$$A_2 = -\frac{1}{2} \theta^2 \sum_{i=1}^m (\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{r}_i),$$

откуда и следует (9.42).

Продемонстрируем технику использования геометрической матрицы жесткости абсолютно жесткого тела на примере элементарной задачи, изображенной на рис. 9.23

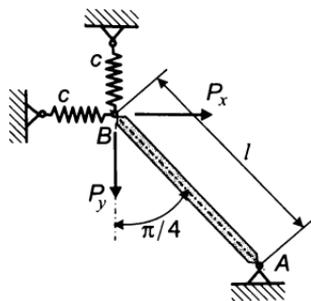


Рис. 9.23. Пример определения критической нагрузки в системе с абсолютно жестким телом

В этой задаче считается, что обе пружины подчиняются линейному закону, связывающему усилие в пружине с соответствующим перемещением точки  $B$ .

Прежде всего найдем распределение внутренних сил в системе, считая ее линейно деформируемой. Нетрудно заметить, что благодаря абсолютно жесткому стержню эта система обладает всего одной степенью свободы, в качестве таковой примем угол поворота  $\theta$  абсолютно жесткого стержня вокруг точки  $A$  – точки опирания этого стержня. Далее, в случае малых поворотов (в геометрически

линейной постановке задачи) горизонтальное  $u$  и вертикальное  $v$  перемещения точки  $B$  будут равны соответственно

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} l\theta, \quad v = -\frac{\sqrt{2}}{2} l\theta, \quad (9.43)$$

где  $l$  – длина стержня  $AB$ .

Считая, что жесткость каждой из пружин равна  $c$ , выпишем выражение для полной потенциальной энергии системы

$$L = \frac{cu^2}{2} + \frac{cv^2}{2} - P_x u - P_y v \quad (9.44)$$

или после подстановки выражений для  $u$  и  $v$  через  $\theta$  по (9.43)

$$L = L(\theta) = \frac{cl^2\theta^2}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{2}(P_x - P_y)\theta. \quad (9.45)$$

Условие стационарности  $L$  как функции от  $\theta$  приводит к уравнению равновесия

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \quad \text{или} \quad cl^2\theta - \frac{l\sqrt{2}}{2}(P_x - P_y) = 0, \quad (9.46)$$

откуда

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{2cl}(P_x - P_y). \quad (9.47)$$

Усилие в горизонтальной пружине  $N_x$  и вертикальной  $N_y$  получаются равными соответственно

$$N_x = cu = \frac{P_x - P_y}{2}, \quad N_y = cv = -\frac{P_x - P_y}{2}. \quad (9.48)$$

Если теперь выделить абсолютно жесткий стержень, то в точке  $B$  на него будут действовать четыре силы, как это показано на рис. 9.24.

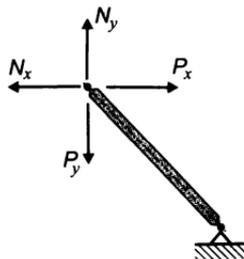


Рис. 9.24. Силы, действующие на абсолютно жесткий стержень

Несложно понять, что в совокупности эти четыре силы сводятся к одной силе  $N$ , действующей на выделенный стержень в направлении оси стержня

$$N = \frac{P_x + P_y}{\sqrt{2}}, \quad (9.49)$$

причем при положительном значении суммы внешних сил  $(P_x + P_y)$  продольная сила  $N$ , определяемая формулой (9.49), является сжимающей.

Следуя теперь формуле (9.42), найдем компоненту геометрической матрицы жесткости, порождаемой абсолютно жестким стержнем. Имеем

$$g_{\theta\theta} = -\frac{P_x + P_y}{\sqrt{2}} l. \quad (9.50)$$

Обычная матрица жесткости системы  $\mathbf{K}_0$  в данном случае состоит из одного элемента  $\mathbf{K}_0 = [[k]]$ , при этом

$$k = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta} = cl^2. \quad (9.51)$$

Критическое состояние системы определяется условием

$$\det \mathbf{K} = \det (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G) = 0, \quad (9.52)$$

что в нашем случае дает

$$(P_x + P_y)_{cr} = cl\sqrt{2}. \quad (9.53)$$

На этом анализ устойчивости рассматриваемой системы в линеаризованной постановке завершен. Однако, для убедительности имеет смысл рассмотрение особенностей поведения этой же системы в общей геометрически нелинейной постановке.

Если с самого начала исходить из геометрически нелинейной постановки задачи, не ограничиваясь условием малости поворотов стержня в равновесном состоянии системы, то вместо линейных соотношений (9.43) следует воспользоваться условиями

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} l(1 - \cos\theta + \sin\theta), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2} l(1 - \cos\theta - \sin\theta). \quad (9.54)$$

Эти соотношения легко получаются из рассмотрения полных геометрических условий связи, доставляемых абсолютно жестким стержнем  $AB$ . Ясно, что в случае малости  $\theta$  соотношения (9.54) упрощаются до (9.43).

Для дальнейшего удобно перейти от внешних сил  $P_x$  и  $P_y$  к иным силовым параметрам  $N$  и  $T$ , где  $N$  определяется формулой (9.49), а для  $T$  принимается выражение

$$T = \frac{P_x - P_y}{\sqrt{2}}. \quad (9.55)$$

После подстановок (9.54) в (9.44) с использованием обозначений для  $N$  и  $T$  получаем следующее выражение для полной потенциальной энергии системы

$$L(\theta) = cl^2(1 - \cos\theta) - lN(1 - \cos\theta) - lT \sin\theta. \quad (9.56)$$

В положении равновесия  $L$  принимает стационарное значение, следовательно

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \quad \text{или} \quad cl^2 \sin\theta - lN \sin\theta - lT \cos\theta = 0. \quad (9.57)$$

Отсюда получаем, что в положении равновесия

$$\operatorname{tg}\theta = s, \quad (9.58)$$

где  $s$  еще один (безразмерный) силовой параметр

$$s = \frac{T}{cl - N}. \quad (9.59)$$

На рис. 9.25 показаны кривые равновесных состояний системы в пространстве конфигураций системы

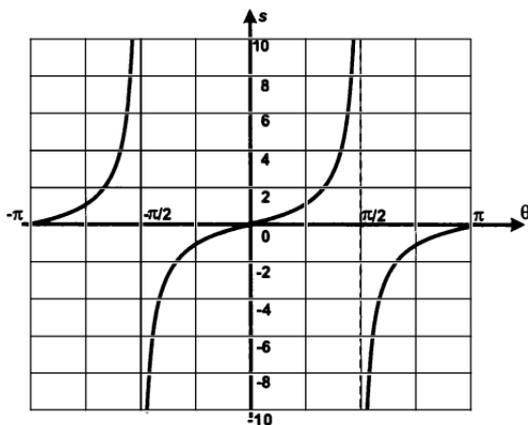


Рис. 9.25. Кривые равновесных состояний на плоскости  $(\theta, s)$

Обратим внимание на то, что все ветви кривой равновесных состояний, показанной на рис. 9.25, имеют строго возрастающий характер. Казалось бы, что это свидетельствует об устойчивости всех равновесных состояний системы. Но такой вывод ошибочен, поскольку силовой параметр  $s$  и кинематический параметр  $\theta$  не являются энергетически сопряженными величинами, и значит кривая

по рис. 9.25 не является характеристической кривой системы (см. по этому поводу раздел 6.4).

Как известно, качество равновесия (отнесение его к устойчивому или неустойчивому состоянию) определяется знаком второй производной от  $L$  по  $\theta$ , подсчитываемой в исследуемой точке кривой равновесных состояний системы. Имеем

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} = cl^2 \cos\theta - lN \cos\theta + lT \sin\theta = \frac{l \cos\theta}{cl - N} [(cl - N)^2 + T^2]. \quad (9.60)$$

Понятно, что знак  $d^2L/d\theta^2$  совпадает со знаком параметра  $\chi$

$$\chi = \frac{\cos\theta}{cl - N}, \quad (9.61)$$

откуда видно, что в случае малых  $\theta$  знак  $\chi$  определяется знаменателем формулы (9.61). Смена знака  $\chi$ , а значит и переход с устойчивых форм равновесия при  $\chi > 0$  на неустойчивые при  $\chi < 0$ , происходит при  $N = N_{cr}$ , где  $N_{cr} = cl$ , что, как и следовало ожидать, совпадает с выводами, вытекающими из формулы (9.53).

Для полноты картины построим действительно характеристическую кривую системы, что, помимо прочего, позволит нам легко отделить области устойчивости системы от областей неустойчивости, не ограничиваясь поиском критических значений параметров нагрузки.

Примем в качестве характерного перемещения  $q = \theta$ . Тогда соответствующая обобщенная сила  $\lambda$  определится как коэффициент при  $d\theta$  в выражении для приращения работы внешних сил  $d\Pi$ . Приведем цепочку преобразований в выражении для работы  $d\Pi$ . Имеем

$$\begin{aligned} d\Pi &= P_x du + P_y dv = l \frac{\sqrt{2}}{2} [P_x(\sin\theta + \cos\theta) + P_y(\sin\theta - \cos\theta)] d\theta = \\ &= l (N \sin\theta + T \cos\theta) d\theta = l \cos\theta (Ns + T) d\theta = l \cos\theta \frac{clT}{cl - N} d\theta = \\ &= cl^2 s \cos\theta d\theta = cl^2 \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в качестве обобщенной силы  $\lambda$  следует положить

$$\lambda = cl^2 \sin\theta. \quad (9.62)$$

Далее,  $d\lambda/dq = d\lambda/d\theta = cl^2 \cos\theta$ . Поскольку условие  $d\lambda/dq > 0$  выполняется на участках устойчивого положения равновесия, а условие  $d\lambda/dq < 0$  на неустойчивых ветвях, приходим к выводу, что перемещение  $\theta$  в границах

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (9.63)$$

выделяет область устойчивости системы. При  $\theta > |\pi/2|$  состояние равновесия неустойчиво. Граничные значения  $\theta_{cr} = \pm\pi/2$  являются критическими значениями для перемещения.

В приведенном только что анализе качества равновесия по характеристической кривой есть одна неучтенная тонкость. Дело в том, что в ходе этого анализа в неявной форме использовалось условие  $T \neq 0$ , или что то же самое  $P_x \neq P_y$ . Если же в процессе нагружения системы выдерживается равенство  $P_x = P_y$ , то это означает, что фактически внешняя нагрузка направлена вдоль оси абсолютно жесткого стержня и имеются всего два равновесных состояния:  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , так что анализ устойчивости на основании кривой (9.62) не срабатывает. Характеристическая кривая вырождается, превращаясь в две изолированные точки. Однако, как это несложно заметить, критическое значение нагрузки по (9.53) остается справедливым и в этом случае. При значении нагрузки меньше критической состояние  $\theta = 0$  является устойчивым, а состояние  $\theta = \pi$  неустойчивым. При переходе же через критическое значение нагрузки эти состояния обмениваются качеством равновесия: состояние  $\theta = 0$  теперь становится неустойчивым, а состояние системы  $\theta = \pi$  устойчивым.

Между прочим, если при поиске равновесных состояний системы исходить не из общей геометрически нелинейной постановки задачи, а из линейризованной (это соответствует первому этажу здания геометрической нелинейности), то в выражении для  $L$  по (9.56) следует разложить тригонометрические функции в ряд Тейлора и удерживать в этом разложении члены по  $\theta$  до второго порядка включительно. В результате такой операции получим

$$L = \frac{cl^2\theta^2}{2} - IN\frac{\theta^2}{2} - I\theta. \quad (9.64)$$

Использование выражения (9.64) для полной потенциальной энергии системы соответствует так называемому расчету по деформированной схеме и на равновесных состояниях системы приводит к линейной зависимости

$$\theta = s. \quad (9.65)$$

Ясно, что прямая (9.65) есть касательная к траектории равновесных состояний системы по (9.58) в точке  $\theta = 0$ . Само собой разумеется, что и в случае использования (9.64) мы вновь приходим к той же

самой критической нагрузке по (9.53). Действительно, подставив в (9.65) вместо параметра  $s$  его выражение по (9.59), получим

$$\theta = \frac{T}{cl - N},$$

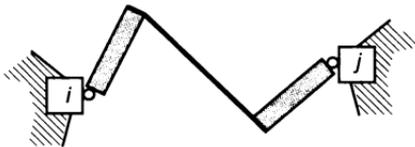
откуда и следует, что  $N_{cr} = cl$ .

Остановимся на некоторых алгоритмических аспектах учета геометрической матрицы жесткости для абсолютно жесткого тела. Опираясь на терминологию, введенную в разделе 2.6, уместно в качестве полюса выбрать тот узел, который назначен хозяином тела. Действительно, согласно требованию 4 из приведенного в разделе 2.6 законодательного списка взаимоотношений между хозяином и рабами, вспоминаем, что хозяин не может быть откреплен от жесткого тела даже частично. Но это означает, что хозяин **всегда** наделяется поворотными степенями свободы. Следовательно, в общей матрице жесткости системы обязательно будут наличествовать все те компоненты, в которые и необходимо суммировать элементы геометрической матрицы жесткости абсолютно жесткого тела.

Некоторая особенность может возникнуть, в том случае, когда в состав исходной механической системы входят конечные элементы (скажем, стержни), содержащие в своем составе *жесткие вставки*, каждая из которых размещается между узлом системы и деформируемой частью конечного элемента (стержня)<sup>7</sup>. С позиций механики жесткая вставка представляет собой по существу частный (хотя и специфический) случай абсолютно жесткого тела, в составе которого имеется всего два узла. Один из узлов жесткой вставки является образующим узлом рассматриваемой механической системы, а второй узел присоединен только к одному из конечных элементов (наиболее часто, к стержню). Сама жесткая вставка вместе с узлом присоединения к данному конечному элементу мыслится как неотъемлемая компонента этого конечного элемента.

Специфика заключена в том, что для жесткой вставки роль узла-хозяина заранее отведена узлу системы, то есть тому узлу, к которому деформируемая часть данного конечного элемента непосредственно не примыкает. В такой ситуации может случиться, что хозяйский узел в общей расчетной схеме все же лишен вращательной степени свободы. Соответствующий пример приведен на рис. 9.26.

<sup>7</sup> Общеизвестной терминологии в отношении жестких вставок нет. В литературе можно встретить и такой термин как *жесткие консоли*. В некоторых программных системах они именуются как *эксцентриситеты* (например, GTSTRUDL), в иных программах (скажем, ANSYS) используется понятие *смещения (offsets)*.



**Рис. 9.26.** Стержень с жесткими вставками, шарнирно присоединенный к узлам системы

Но жесткая вставка имеет и вторую специфическую особенность по отношению к общему случаю абсолютно жесткого тела. Дело в том, что в общей расчетной схеме жесткая вставка и деформируемая часть конечного элемента рассматриваются не порознь, а совместно, как сложный конечный элемент (если угодно, как суперэлемент), следовательно алгоритмически обработка жесткой вставки осуществляется на уровне формирования матрицы жесткости отдельного суперэлемента, а не на уровне формирования общей матрицы жесткости системы. Но при формировании матрицы жесткости этого суперэлемента можно считать, что зоряйский узел сначала наделен всеми необходимыми степенями свободы (в том числе и вращательными), что позволяет алгоритмически учесть геометрическую матрицу жесткости жесткой вставки как для абсолютно жесткого тела. Если же этот суперэлемент присоединен к системе шарнирно, как это показано на рис. 9.21, то перед суммировкой в общую матрицу жесткости системы в полной матрице жесткости данного суперэлемента  $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{0e} + \mathbf{K}_{Ge}$  достаточно провести соответствующее жорданово исключение, освободившись тем самым от вращательной степени свободы узла (см. Приложение А).

Говоря об абсолютно жестких телах, обратим внимание на следующий аспект. Еще из курса теоретической механики инженер помнит, что [Лойцянский, Лурье, 1954]:

*«не нарушая равновесия твердого тела, можно точку приложения силы переносить вдоль линии, по которой расположена сила».*

Это безусловно так и не подвергается сомнению. Понимание этого простого принципа приводит расчетчика к соблазну заменить действующую на абсолютно жесткое тело систему сил некоторой другой системой сил, статически эквивалентной заданной системе сил, но, возможно, более простой с позиций ее описания в исходной информации к расчетной программе. Конечно, равновесие от этого не нарушится, но вот качество равновесного состояния существенно зависит от способа приложения нагрузки. Под качеством равновесного состояния здесь имеется в виду количественная

характеристика запаса устойчивости системы. К сожалению, внимание студентов не фиксируется на этом важном аспекте равновесия абсолютно жестких тел в стандартных курсах теоретической механики, а зря.

В заключение этого пункта отметим, что конечно же в самой постановке задачи расчета на устойчивость систем, содержащих в своем составе абсолютно жесткие тела, ничего загадочного нет. Употребление нами этого слова в заголовке настоящего раздела носит не технический, а, если угодно, психологический оттенок. Загадочность для нас заключается в причине, по которой разработчики многих программных систем, которых никак не заподозришь в некомпетентности, подверглись массовому заблуждению, упустив из виду рассматриваемую здесь особенность абсолютно жестких тел применительно к задачам устойчивости. Печально, но результатом этого заблуждения стала дезориентация потребителей программной продукции. Отсюда вытекает и наш призыв к сообществу разработчиков устранить в кратчайшие сроки этот недостаток коммерческих программ дабы не подвергать опасности армию пользователей в получении ими некорректных результатов.

## 9.6. Об одном парадоксе в задаче об устойчивости стержня<sup>8</sup>

Известно, что при анализе устойчивости конструкций инженерам, занимающимся расчетом, следует быть особенно внимательными. Эти задачи, в отличие от обычных задач статического расчета по определению напряженно деформированного состояния конструкций, отличаются особым «коварством», поскольку они могут порождать неожиданные и на первый взгляд противоречащие здравому смыслу результаты. Нет нужды далеко ходить за примерами, известная книга Я.Г. Пановко и И.И. Губановой [1987] служит отличным подтверждением этого факта.

Целью настоящего раздела является обсуждение результатов одной простой задачи расчета механической системы на устойчивость, которые способны вызвать замешательство или породить недоверие к используемой расчетной программе.

---

<sup>8</sup> Раздел 9.6 написан совместно с Книгой А.И. и Пашковским М.В.

Итак, рассмотрим следующую простую по своей постановке задачу. Пусть на стержень длины  $l$  в сечении с координатой  $l_1$  действует продольная сила  $P$ , как это показано на рис. 9.27.

Рассматривается идеально упругий стержень постоянного сечения с полным защемлением концевых сечений. Поскольку правый участок стержня длины  $l_2 = l - l_1$  сжат, то при возрастании нагрузки возможна потеря устойчивости системы. Критическое значение действующей нагрузки, при котором возможно выпучивание этой системы, обозначим  $P_{Acr}$ . Вместе с этой задачей (которую назовем задачей "А") рассмотрим и задачу "В", отличающуюся от исходной задачи всего лишь изменением направления действия внешней силы  $P$  (рис. 9.27). Зададимся конкретными числовыми значениями всех параметров в этих задачах.

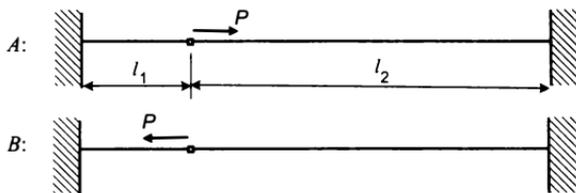


Рис. 9.27. Сжато-растянутый стержень

Положим, например,

$$l_1 = 2, \quad l_2 = 8, \quad EI = 2,9 \times 10^5$$

в некоторой согласованной системе единиц.

Воспользовавшись любой из доступных программных систем, получим следующие результаты<sup>9</sup>

$$P_{Acr} = 767000, \quad P_{Bcr} = 580000.$$

Такое соотношение критических сил для этих двух задач на интуитивном уровне представляется, по крайней мере, подозрительным. Действительно, распределение (по абсолютному значению) продольных сил  $N$  между левым и правым участками стержня отвечает условиям

$$N_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} P, \quad N_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} P, \quad (9.65)$$

при этом в задаче "А" продольная сила  $N_1$  растягивает левый участок стержня, а продольная сила  $N_2$  сжимает правый участок стержня.

<sup>9</sup> В нашем случае использовались две известные программы: SCAD и GTSTRUDL. Обе программы приводят к одинаковым (указанным в тексте) результатам.

В задаче “В” напротив,  $N_1$  является сжимающим усилием, а  $N_2$  растягивающим. Но поскольку критическое значение продольной силы, развиваемой в сжатом стержне, обратно пропорционально квадрату его длины, то отношение критических сил

$$\theta_P = \frac{P_{Acr}}{P_{Bcr}} = 1,32 > 1$$

кажется странным и вызывающим реакцию отторжения полученных программным путем результатов, так как в задаче “В” сжатию подвержен более короткий участок стержня.

Прежде всего проверим наличие (или отсутствие) обнаруженного эффекта при иных соотношениях параметров задач “А” и “В”. С этой целью введем в рассмотрение безразмерную координату  $\xi$ , характеризующую относительное расположение на стержне сечения, в котором приложена внешняя сила  $P$ , положив

$$\xi = \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Для поиска критического значения нагрузки  $P_{Acr}$  воспользуемся стандартной процедурой метода перемещений. Можно считать, что расчетная схема представляет собой двухстержневую систему с центральным узлом, в котором и приложена внешняя сила  $P$ . Образует основную систему метода перемещений, закрепив центральный узел от линейных смещений  $Z_1$  нормальных к оси стержня и от поворота  $Z_2$  (рис. 9.28).

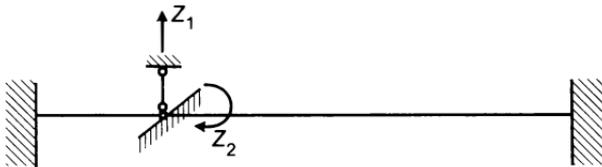


Рис. 9.28. Основная система метода перемещений

Воспользовавшись готовыми формулами [Корноухов, 1949] для реакций отдельного стержня от единичных перемещений его узлов с учетом действия продольной силы, получим следующие выражения для компонент матрицы жесткости системы

$$r_{11} = \frac{EI}{l_1^3} \gamma_\mu + \frac{EI}{l_2^3} \gamma_\nu, \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{EI}{l_1^2} \delta_\mu + \frac{EI}{l_2^2} \delta_\nu, \quad r_{22} = \frac{EI}{l_1} \alpha_\mu + \frac{EI}{l_2} \alpha_\nu,$$

где  $\alpha_\mu$ ,  $\alpha_\nu$ ,  $\delta_\mu$ ,  $\delta_\nu$ ,  $\gamma_\mu$ ,  $\gamma_\nu$  — известные функции Н.В. Корноухова [Александров и др., 1976]

$$\alpha_v = \frac{v}{\operatorname{tg} v} \frac{\operatorname{tg} v - v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}, \quad \delta_v = \frac{v^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}, \quad \gamma_v = \frac{v^3}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v},$$

$$\alpha_\mu = \frac{\mu}{\operatorname{th} \mu} \frac{\operatorname{th} \mu - \mu}{2 \operatorname{th} \frac{\mu}{2} - \mu}, \quad \delta_\mu = -\frac{\mu^2 \operatorname{th} \frac{\mu}{2}}{2 \operatorname{th} \frac{\mu}{2} - \mu}, \quad \gamma_\mu = -\frac{\mu^3}{2 \operatorname{th} \frac{\mu}{2} - \mu},$$

причем функции с индексом  $v$  относятся к сжатому стержню, а с индексом  $\mu$  к растянутому. Параметры продольной силы  $v$  и  $\mu$  равны соответственно

$$v = (1-\xi)l \sqrt{\frac{N_2}{EJ}} = (1-\xi)l \sqrt{\frac{\xi P}{EJ}}, \quad \mu = \xi l \sqrt{\frac{-N_1}{EJ}} = \xi l \sqrt{\frac{(1-\xi)P}{EJ}}, \quad (9.66)$$

где продольная сила  $N$  считается положительной при сжатии стержня.

Наступление критического состояния системы определяется из условия равенства нулю определителя устойчивости или

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \left( \frac{EJ}{l_1^3} \gamma_\mu + \frac{EJ}{l_2^3} \gamma_v \right) \left( \frac{EJ}{l_1} \alpha_\mu + \frac{EJ}{l_2} \alpha_v \right) - \left( -\frac{EJ}{l_1^2} \delta_\mu + \frac{EJ}{l_2^2} \delta_v \right)^2 = 0,$$

что после перехода к безразмерным величинам приводит к следующему уравнению

$$(\gamma_\mu + \eta^3 \gamma_v)(\alpha_\mu + \eta \alpha_v) - (-\delta_\mu + \eta^2 \delta_v)^2 = 0, \quad (9.67)$$

где

$$\eta = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\xi}{1-\xi}.$$

Задавая значение параметра  $\xi$  и учитывая, что  $\mu = v \sqrt{\eta}$ , из уравнения устойчивости (9.67) находим критическое значение параметра сжимающей продольной силы (минимальный корень)  $v = v_{Acr}$ . Соответствующая  $v_{Acr}$  критическая нагрузка  $P_{Acr}$  в силу (9.66) равняется

$$P_{Acr} = \frac{1}{\xi(1-\xi)^2} v_{Acr}^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (9.68)$$

Для задачи "B" можно воспользоваться решением того же уравнения (9.67), заменив там предварительно параметр  $\xi$  на  $(1-\xi)$ . Это становится очевидным, если заметить, что при переносе точки приложения силы  $P$  в симметричную относительно центрального сечения стержня точку задача "B" переходит в задачу "A", и наоборот. Поскольку при этом

$$P_{Bcr} = \frac{1}{\xi^2(1-\xi)} v_{Bcr}^2 \frac{EI}{l^2}, \quad (9.69)$$

то из (9.68) и (9.69) находим отношение критических нагрузок для задач “А” и “В”

$$\theta_P = \frac{P_{Acr}}{P_{Bcr}} = \frac{\xi}{(1-\xi)} \left( \frac{v_{Acr}}{v_{Bcr}} \right)^2.$$

Воспользовавшись для поиска корней уравнения (9.67) любым из известных программных пакетов для решения математических задач (например, программой *Mathcad*), построим графически зависимость  $\theta_P = \theta_P(\xi)$  – см. рис. 9.29.

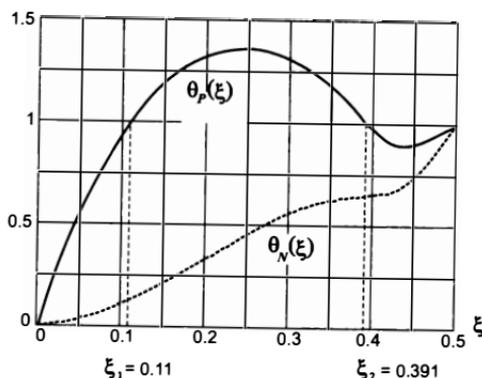


Рис. 9.29. Отношение критических нагрузок

Из этого графика видно, что, как это ни парадоксально, существуют такие два сечения стержня, отвечающие  $\xi = \xi_1$  и  $\xi = \xi_2$ , что при  $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$  потеря устойчивости системы по схеме нагружения “А” происходит при более высоком уровне нагрузки, чем для схемы “В”.

На самом же деле никакого парадокса здесь нет. Объяснение этому неожиданному эффекту заключается в том, что на значения критических сил влияет не только распределение продольных сил между сжатым и растянутым стержнями и не только отношение их длин, но и краевые условия для сжатого стержня в месте присоединения его к растянутому стержню. Понятно, что «виновником» потери устойчивости системы является сжатый стержень, тогда как растянутый служит, грубо говоря, некоторой упругой заделкой на одном из концов сжатого стержня. При этом, чем больше длина растянутого стержня и чем меньше значение продольной силы в нем, тем слабее обобщенная жесткость этой заделки.

Другое дело, что отношение критических значений продольных сил в сжатых элементах для каждой из рассматриваемых задач, которое мы обозначим  $\theta_N$ , равняется

$$\theta_N = \frac{N_{Acr}}{N_{Bcr}} = \frac{\xi}{1-\xi} \theta_P.$$

График зависимости  $\theta_N(\xi)$  также приведен на рис. 9.29, и ясно, что  $\theta_N$  меньше единицы при  $\xi < 0,5$ . Этот вывод соответствует интуитивным инженерным ожиданиям.

Вполне уместен также вопрос о том, при каком положении внешней силы  $P$  система наименее устойчива. Ответ на этот вопрос будет получен, если одновременно проследить за изменением критических сил в задачах “А” и “В” при перемещении точки приложения внешней силы, а затем выбрать наименьшую критическую силу. С этой целью введем в рассмотрение условную (эйлерову) критическую силу  $P_0$

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

что дает возможность характеризовать критическую нагрузку в безразмерных параметрах  $k_A$  и  $k_B$ , положив

$$k_A = P_{Acr}/P_0 = \frac{1}{\xi(1-\xi)^2} (\nu_{Acr}/\pi)^2, \quad k_B = P_{Bcr}/P_0 = \frac{1}{\xi^2(1-\xi)} (\nu_{Bcr}/\pi)^2.$$

Построенные по результатам вычислений графики функций  $k_A(\xi)$  и  $k_B(\xi)$  показаны на рис. 9.30, откуда видно, что система наименее устойчива при размещении силы примерно в четверти длины стержня (точнее, при  $\xi = 0,282$ ), при этом внешняя сила сжимает короткий участок стержня и растягивает длинный.

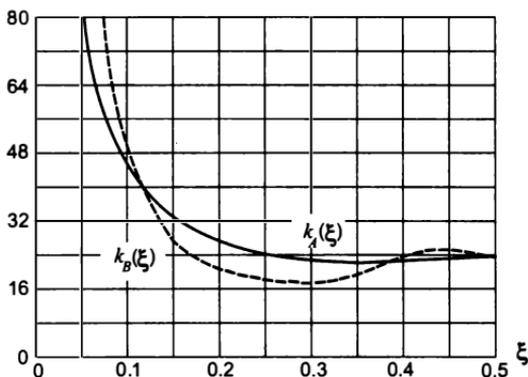


Рис. 9.30. Безразмерные параметры критической нагрузки

Интересно также проверить проявление отмеченного эффекта при иных условиях закрепления стержня, отличных от заделки. Так например, в случае замены заделки, показанной на рис. 9.27, на условия шарнирного опирания, графики функций  $\theta_P$  и  $\theta_N$  выглядят так, как это показано на рис. 9.31.

Оказывается, что в случае шарнирного опирания концов стержня система всегда более устойчива (по отношению к изменению внешней силы  $P$ ) при сжатии длинного, а не короткого участка стержня<sup>10</sup>. Более того, кажется неожиданным, что для шарнирно опертого стержня существует интервал значений  $\xi$  (от  $\xi_1 = 0,272$  до  $\xi = 0,5$ ), на котором и функция  $\theta_N$  больше единицы.

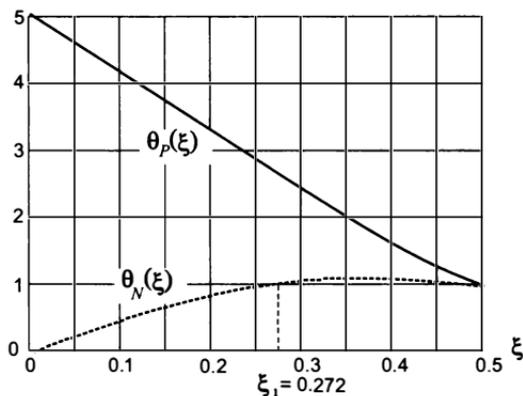


Рис. 9.31. Отношение критических нагрузок для шарнирно опертого стержня

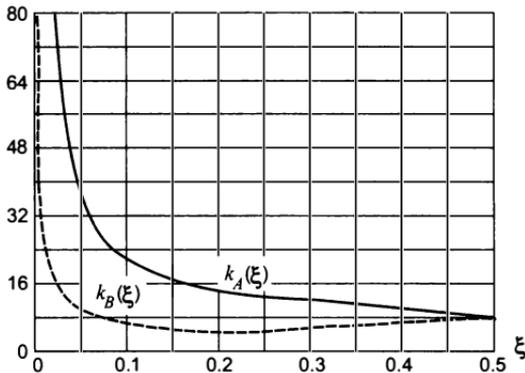
Конечно, как это видно из рис. 9.31, превышение  $\theta_N$  над единицей незначительно, однако важен сам факт, отражающий качественную картину соотношений критических продольных сил в задачах “А” и “В”.

Обратим также внимание на то, что при положении нагрузки весьма близком к одному из концов шарнирно закрепленного стержня (соответствует малому значению параметра  $\xi$ ) для варианта направления силы, сжимающей длинный участок стержня, система приблизительно в 5 раз более устойчива по сравнению с противоположным направлением силы  $P$ .

Если построить графики функций  $k_A(\xi)$  и  $k_B(\xi)$  для шарнирно опертого стержня, то они будут выглядеть так, как это показано на рис. 9.32, и становится ясно, что и эта система наименее устойчива

<sup>10</sup> Разумеется, это справедливо за исключением особой точки  $\xi = 0,5$ , когда направление действия нагрузки не оказывает влияния на критическую силу и  $\theta_P = 1$ .

при размещении силы примерно на четверти длины стержня (точнее, при  $\xi = 0,22$ ) и при сжатии короткого участка стержня.



**Рис. 9.32.** Безразмерные параметры критической нагрузки для шарнирно опертого стержня

В заключение отметим, что в известной книге В.И. Феодосьева [1996] в разделе, относящемся к нетрадиционным задачам устойчивости, под номером 101 рассмотрена задача об устойчивости шарнирно опертого стержня с закреплением концевых сечений стержня от продольных перемещений.

Рассмотрев случай приложения продольной силы  $P$  в центральном сечении стержня (в наших обозначениях это соответствует фиксированному значению параметра  $\xi = 0,5$ ), В.И. Феодосьев обращает внимание читателя на то, что такое закрепление повышает критическую силу в восемь раз<sup>11</sup>. Однако, на этом, хотя и любопытном, выводе В.И. Феодосьев останавливается и не переходит к анализу более общей ситуации, связанной с изменением координаты  $\xi$  точки приложения силы  $P$ .

## 9.7. Учет несовершенств реальной конструкции

Рассматривая вопрос о методах, альтернативных по отношению к строгому анализу устойчивости равновесия В.В. Болотин [1965] указывает на *метод полного интегрирования*, под которым подразумевается исследование поведения системы для всех возможных классов возмущений, которые могли бы иметь место, или о статистических методах исследования. Справедливо обращая

<sup>11</sup> Решению задачи В.И. Феодосьева соответствует точка  $\xi = 0,5$  на графиках по рис. 9.27, откуда и видно, что  $P_{Acr} = 8P_0$ .

внимание на то, что и возмущенное решение должно быть проверено на устойчивость, В.В. Болотин приводит простейший пример шарнирно опертого упругого стержня постоянного сечения с кососимметричной начальной погибью (рис. 9.33), для которого расчет по деформированной схеме ведет к ошибочному результату (к значению второй критической силы  $4\pi^2 EI / L^2$ ), в то время как потеря устойчивости происходит по симметричной форме при в четыре раза меньшей силе  $P$ .

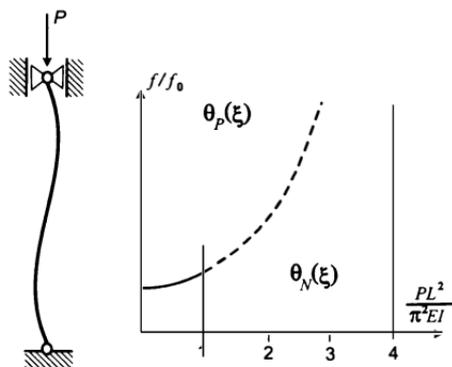


Рис. 9.33. Стержень с кососимметричной погибью

Означает ли это, что не имеет никакого смысла выполнять расчеты с учетом начальных несовершенств? Конечно нет. И здесь, не опровергая вывода о необходимости проверки устойчивости возмущенного решения, можно было бы привести два соображения в пользу полезности таких расчетов:

- при выполнении указанных расчетов более явно можно проследить за поведением тех элементов системы, которые оказываются незадействованными в работе идеализированной схемы (связи, нулевые стержни и т.п.);
- появляется возможность оценить те допуски на точность изготовления и монтажа, которые должны быть сформулированы для исследуемой конструкции, если она не принадлежит к классу заранее изученных в этом смысле.

Сами по себе значения несовершенств являются случайными величинами, и строгое исследование их влияния требует привлечения вероятностных методов, а также наличия информации о статистических характеристиках несовершенств. Однако, практически, инженеры оперируют с гораздо более бедными данными, исходя из некоторых представлений об ожидаемых или о максимально возможных значениях несовершенств. Иногда эти

данные нормируются, как, например, это сделано в Еврокоде-3, который требует учета возможных начальных несовершенств и при выполнении общего статического расчета системы. В общем случае, учету подлежат несовершенства системы в целом, несовершенства (неидеальность) узловых соединений и несовершенства элементов конструкции. Для многоэтажных рам таким несовершенством является отклонение от вертикали

$$\Psi = k_c k_s \Psi_0, \quad (9.70)$$

где

- $\Psi_0$  — допускаемый перекося колонны (например,  $\Psi_0 = 1/200$ );
- $k_c = (0,5 + 1/n_c)^{1/2}$ , но  $k_c \leq 1$ ;
- $k_s = (0,2 + 1/n_s)^{1/2}$ , но  $k_s \leq 1$ ;
- $n_s$  — число этажей;
- $n_c$  — общее число колонн, проходящих через все этажи, у которых нагрузка не ниже 50% от средней нагрузки на колонну.

Коэффициенты  $k_c$  и  $k_s$  учитывают малую вероятность одновременного наклона всех колонн в одну сторону по простейшей статистической гипотезе — все эти отклонения считаются статистически независимыми. В этом состоит первая идея, реализованная Еврокодом, а вторая заключается в том, что начальные геометрические отклонения допускаются учитывать в виде эквивалентных горизонтальных сил, например, по схеме рис. 9.34.

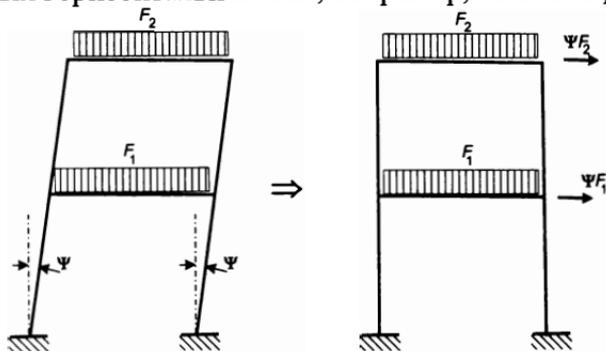


Рис. 9.34. Эквивалентные силы для учета отклонений от вертикали

Такие силы могут действовать по всем возможным горизонтальным направлениям, и необходимо выбрать неблагоприятные из них (например, для схемы по рис. 9.34, если ветер на раму действует слева направо, то неблагоприятным будет направление сил  $\psi F_1$  и  $\psi F_2$  тоже слева направо).

Аналогичен подход к расчету связевых систем, обеспечивающих боковую жесткость конструкции, где учитываются начальные несовершенства раскрепляемых элементов в виде их искривлений со стрелкой  $e_0 = k_r L / 500$ . Коэффициент  $k_r = (0,2 + 1/n_r)^{1/2}$ , но не больше, чем единица;  $n_r$  — число подкрепляемых элементов. Здесь вновь используется гипотеза статистической независимости искривлений.

Эквивалентная нагрузка на связевую систему (рис. 9.30)

$$q = \frac{k_r + 500\delta_q / L}{62.5} \sum \frac{N}{L}, \quad (9.71)$$

где  $\delta_q$  — прогиб связевой системы.

В тех случаях, когда связевая система стабилизирует изгибаемые элементы, усилия  $N$  могут быть определены как

$$N = M / h, \quad (9.72)$$

где  $M$  — максимальный изгибающий момент и  $h$  — высота изгибаемого элемента.

Существует большое число исследований, посвященных качественной оценке влияния начальных несовершенств на потерю устойчивости, которая интенсивно развивается в рамках так называемой «теории катастроф». Отсылая любознательного читателя к специальной литературе (см., например, [Томсон, 1985]), мы здесь укажем только на некоторые характерные результаты.

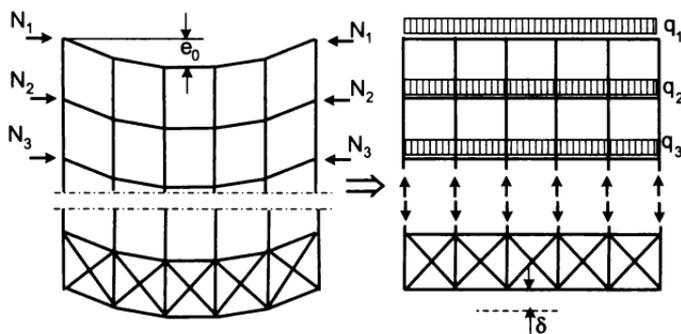
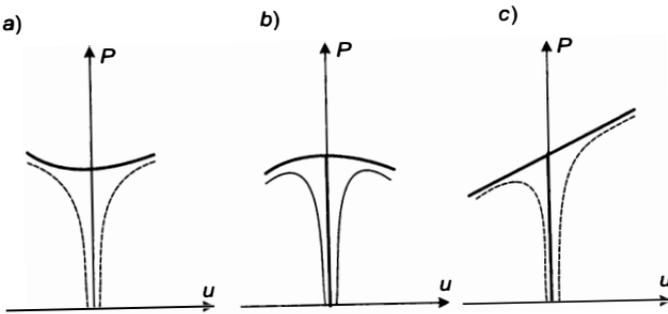


Рис. 9.35. Эквивалентные силы для связевых систем

На рис. 9.36 представлены характерные кривые зависимости послекритических перемещений от нагрузки для некоторых систем с одной степенью свободы.

Если в критической точке идеальной системы первоначальное устойчивое состояние сменяется другой устойчивой формой равновесия (рис. 9.36,а), то поведение несовершенной системы (пунктир) таково, что критическая нагрузка минует достаточно

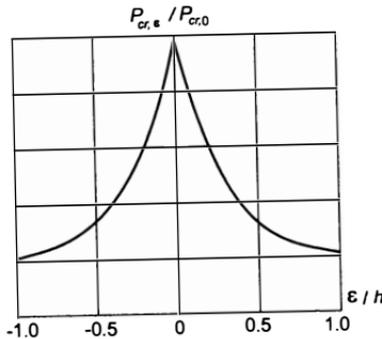
плавно. В случае, когда идеальная система такова, что в критической точке устойчивое состояние сменяется неустойчивым (рис. 9.36, *b*), поведение несовершенной системы характеризуется заметным падением критической нагрузки.



**Рис. 9.36.** Варианты послекритического поведения:  
*a* — мягкое; *b* — жесткое; *c* — промежуточное

Возможен и промежуточный вариант (рис. 9.36, *c*), когда система ведет себя различным способом при возмущениях различного знака. Заметим, что первый тип поведения в большей мере характерен для стержневых систем, а два другие — для оболочечных конструкций.

Особенно опасно, конечно, поведение системы по типу рис. 9.31, *b*. Часто фактическая предельная нагрузка несовершенной конструкции отличается от критической нагрузки идеальной схемы в несколько раз.



**Рис. 9.37.** Зависимость критической нагрузки от начальных несовершенств конструкции

Так, на рис. 9.37 приведен построенный в классической работе В.Койтера [Koiter, 1945] график, иллюстрирующий зависимость отношения предельной нагрузки несовершенной системы  $P_{cr,\varepsilon}$  к критической нагрузке идеальной системы  $P_{cr,0}$  от амплитудного значения несовершенства  $\varepsilon$ , отнесенного к толщине  $h$  замкнутой

цилиндрической оболочки, при сжатии оболочки вдоль образующей. При этом следует учитывать, что значения  $\varepsilon/h$ , превышающие единицу, являются отнюдь не исключениями.

Влияние начальных неправильностей на величину критической нагрузки легко проиллюстрировать на простейшей модели (рис. 9.38), для которой имеется точное решение задачи [Thompson, Hunt, 1973].

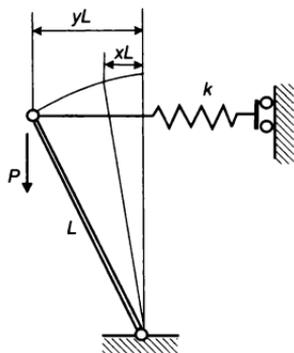


Рис. 9.38. Модель для оценки начальных несовершенств

Эта модельная система представляет собой абсолютно жесткий стержень длиной  $L$ , шарнирно прикрепленный к основанию и удерживаемый линейной пружиной жесткости  $k$ . Начальное несовершенство моделируется отклонением стержня  $xL$  от вертикали, полное перемещение обозначается как  $yL$ . В отклоненном состоянии усилие натяжения пружины равно  $R = k(y - x)L$ , а угол  $\alpha$  наклона стержня к вертикали определяется соотношением

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - (yL)^2}}{L} = \sqrt{1 - y^2}.$$

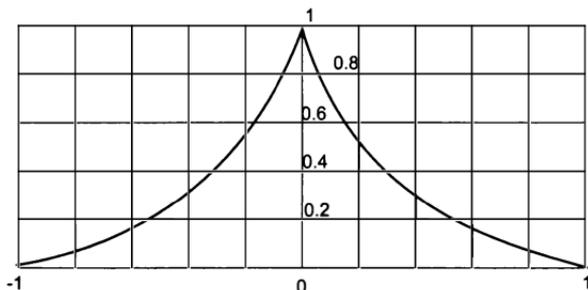
Тогда из условий равновесия имеем

$$\frac{Py}{\sqrt{1 - y^2}} = k(y - x)L.$$

Критическое значение нагрузки  $P_{cr}$  найдем из условия  $\partial P / \partial y = 0$ , которое реализуется при  $y = x^{1/3}$ , и подстановка этого значения в условие равновесия дает известное выражение

$$\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{kL} = (1 - x^{2/3})^{3/2}$$

для безразмерной критической нагрузки [Thompson, Hunt, 1973]. Зависимость  $\lambda_{cr}$  от параметра начального несовершенства  $x$  показана на рис. 9.39.



**Рис. 9.39.** Зависимость результата от начальных несовершенств

Как видно из этого рисунка, качественный характер зависимости критической нагрузки от начального несовершенства в этой простой модельной задаче напоминает аналогичную зависимость, полученную Койтером для круговой цилиндрической оболочки, что и было изображено ранее на рис. 9.37.

## 9.8. Замечания по учету $P$ - $\Delta$ эффектов

Использование геометрической матрицы жесткости  $K_G$  по (3.129), вообще говоря, направлено на учет вторичных эффектов при статическом и динамическом расчете конструкций, что, в частности, вызывает появление дополнительных изгибающих моментов от действия собственного веса при заметных горизонтальных перемещениях несущего каркаса. В англоязычной литературе по проектированию зданий и сооружений, например в Еврокоде, этот эффект обычно определяется как « $P$ - $\Delta$  анализ».

Было предложено много методов для оценки этих эффектов, в работе [Wilson, Habibulaah, 1987] анализировались соответствующие публикации и был предложен упрощенный метод расчета этих эффектов второго порядка. Если подходить к проблеме, как к решению геометрически нелинейной задачи, то потребуется использование итерационного или шагового процесса, при этом появится и необходимость учета рассматриваемых эффектов при динамическом расчете.

Для каркасов зданий, где нагрузка от собственного веса не меняется при деформировании и полные перемещения могут считаться малыми по сравнению с габаритами конструкции, задача  $P$ - $\Delta$  анализа может быть линеаризована и решение получено без итераций. Дело в том, что в терминологии Н.В.Корноухова такого рода задачи являются квазимоноциклическими. Это означает, что

распределение продольных сил между стержнями системы (или распределение цепных усилий в оболочечных элементах) может быть установлено с достаточной для практических целей точностью «в один удар» - из решения чисто линейной задачи. Но с момента, когда такое распределение нам становится известным, полная задача также фактически линеаризуется. Такой подход реализован, например, в системе **SCAD**. Он привлекателен тем, что не требует от пользователя каких либо дальнейших упрощений, связанных с учетом специфики конкретной задачи. Именно поэтому мы не останавливаемся на анализе различного рода предложений по учету  $P$ - $\Delta$  эффектов для систем частного вида.

## 10. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

*Человек задает Природе множество вопросов, с ее "точки зрения" бессмысленных, и желает получить ответы однозначные и укладывающиеся в любезные ему схемы. Одним словом, мы стремимся открыть не Порядок вообще, а лишь некоторый определенный порядок....*

Станислав Лем.

Сумма технологий.— М.: Мир, 1968. — С. 101.

Система инженерного образования в вузах строительного профиля построена таким образом, что задачам динамики уделяется незаслуженно малое внимание. Если многочисленными упражнениями у студентов и вырабатывается определенная интуиция (явно недостаточная, но способная совершенствоваться в процессе практической деятельности) по проблемам статического анализа конструкций, то «динамическое чутье» остается совсем неразвитым. Отсюда многие ошибки, а также абсолютно формальное отношение к подготовке исходной информации для решения динамической задачи средствами автоматизированного проектирования.

Это обстоятельство учитывалось авторами при подготовке текста настоящей главы, и мы сознательно пошли на несколько больший крен изложения в сторону его насыщения справочной и общенаучной информацией. Для подготовленного читателя она может оказаться лишней, и мы приносим свои извинения профессионалам за, быть может, вызывающий раздражение, излишне менторский тон изложения.

### 10.1. Расчетные модели в задачах динамики

Расчетная схема несущего каркаса, с помощью которой описывается упругое сопротивление конструкции в процессе анализа динамической реакции сооружения, чаще всего принимается такой же, как и при статическом расчете. Естественно, в такую схему

добавляются инерционные характеристики и данные о силах сопротивления движению; кроме того, более детально описываются и внешние воздействия, которые могут быть представлены как некоторые функции времени. Не останавливаясь на этих дополнениях расчетной модели, отметим определенную опасность использования описания несущей конструкции, одинакового для статического и динамического расчетов. Эта опасность не всегда осознается даже опытными расчетчиками, в основном решавшими статические задачи.

Дело в том, что по традиции, укоренившейся при статических расчетах, ориентированных на анализ предельных состояний системы, из расчетной модели удаляются элементы, которые мало сказываются на предельном сопротивлении системы. Отбрасываются перегородки, многие элементы ограждающих конструкций и другие компоненты здания, которые при деформациях, соответствующих уровню расчетного статического воздействия, на самом деле практически не участвуют в работе. Однако, при анализе динамического поведения, особенно в части оценки вклада высших собственных частот, соответствующие амплитуды колебаний могут оказаться намного меньшими, чем те перемещения, при которых эти «ненесущие» конструктивные элементы выбывают из работы.

Кроме того, сами жесткостные характеристики многих строительных материалов (и, в особенности, оснований) при динамическом расчете должны рассматриваться с другими значениями. Дело в том, что при статическом расчете эти характеристики могут приниматься с учетом реологических изменений, развивающихся при длительном нагружении под действием нагрузок, интенсивность которых, возможно, близка к предельной. Отсюда идет традиция учитывать, например, податливость грунтовых оснований по усредненному «секущему» модулю, справочные данные по модулям упругости железобетона в некоторой мере учитывают реологические процессы его твердения и т.п.

При динамическом расчете для умеренного уровня эксплуатационных нагрузок и не очень больших частот динамическая жесткость близка к «мгновенной» статической жесткости (т. е. определяется не секущим, а касательным модулем), немного возрастая с увеличением частоты [Цейтлин, Гусева, 1979].

Таким образом, при использовании одинаковой упругой модели для статического и динамического расчетов, чаще всего преуменьшается значение динамической жесткости, что, как известно, приводит к занижению вычисляемых собственных частот.

Ввиду практических трудностей выполнения динамического расчета с учетом реального значения динамической жесткости, необходимо считаться с тем, что в результатах будет присутствовать определенная погрешность значений собственных частот. Эта погрешность даже регламентирована, в зависимости от типа конструкции, в ряде инструкций по расчету зданий и сооружений на эксплуатационные динамические воздействия. Такой подход связан с определенными видами конструкций и требует достаточно детального обоснования при перенесении на объекты с другой конструктивной схемой, но, к сожалению, указанные обоснования чаще всего отсутствуют.

Большинство программ для динамического расчета конструкций, реализуя указания действующих нормативных документов, оперируют с усредненными по конструкции мерами диссипации (например, логарифмическими декрементами колебаний  $\delta$ ). Такой подход может быть оправдан, если рассматриваемая конструкция выполнена из одного материала с примерно одинаковыми конструктивными решениями и без ярко выраженных точек, где развивается внутреннее конструктивное трение. Но его перенос на расчет систем, выполненных из материалов и конструкций с резко отличными упругими, диссипативными и инерционными свойствами, может привести к заметным погрешностям.

Во многих реальных сооружениях значения  $\delta$  для различных подсистем отличаются на порядки: от тысячной доли для металлических конструкций (прокат, сварные элементы) до целых единиц для грунтовых оснований. Конечно, эти качественные и количественные различия свойств конструкции должны были бы учитываться в корректных динамических моделях.

Правильный учет фактических диссипативных свойств системы особенно важен при анализе резонансных режимов, когда, как известно, высота резонансного пика обратно пропорциональна величине  $\delta$ , а также при оценке длительности экспозиции, связанной с дозой вибрации, которую могут получить люди, находящиеся на колеблющейся конструкции [Казакевич, Кулябко, 1998].

Величину потерь энергии в самом сооружении, определяемую внутренним трением в материале и конструкционным демпфированием, трудно рассчитать теоретически, и она устанавливается в экспериментах и натуральных наблюдениях. В таблице 10.1 представлены такие экспериментальные данные, заимствованные из рекомендаций по проектированию атомных станций в США. Указанное в таблице критическое затухание

$C_{cr} = 2(KM)^{1/2}$ , где  $K$  — жесткость и  $M$  — масса, соответствует пороговому значению для тех случаев, когда выведенная из состояния равновесия система возвращается в него без колебательного процесса.

Таблица 10.1.

Тип сооружения	Затухание в % от критического значения $C_{cr}$ при напряжениях в долях расчетного сопротивления:	
	$0,67R_y$	$0,90R_y$
Стальные конструкции: сварные на болтах	2	4
	4	7
Бетонные конструкции: преднапряженные с обычным армированием	2	5
	4	7

Упомянутая выше возможная неточность вычисления собственных частот и погрешности в оценке логарифмического декремента наиболее сильно сказываются на величине угла сдвига фаз  $\mu$  между возмущающей силой и реакцией конструкции. Это обстоятельство может сделать сомнительными формально правильные результаты суммирования реакций конструкции (перемещений, усилий), вычисленных отдельно по формам собственных колебаний, поскольку, например,  $s$ -й член такой суммы вводится с множителем  $\cos(\theta t - \mu_s)$ , причем

$$\operatorname{tg} \mu_s = \frac{\delta / \pi}{\sqrt{1 + (\delta / 2\pi)^2}} \frac{\theta / \omega_s}{1 - (\theta / \omega_s)^2}, \quad (10.1)$$

где через  $\theta$  обозначена частота изменения возмущающей силы, а через  $\omega_s$  частота собственных колебаний по  $s$ -ой форме недемпфированной системы.

Имея в виду указанную неточность, многие авторы считали возможным полагать угол сдвига фаз  $\mu$  случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от нуля до  $180^\circ$ , что приводило к расчетной формуле типа «корень из суммы квадратов вкладов реакций, соответствующих собственным частотам».

Достаточно часто в динамических расчетах присутствует следующая ошибка: при рассмотрении конструкций на упругом основании это основание не наделяют инерционными свойствами. Как показывают специальные исследования [Ильтичев, 1970], при этом погрешность может иметь не только количественный, но и

качественный характер. Так, для конструкции, представленной на рис. 10.1, были получены приведенные на рис. 10.2,а резонансные кривые прогиба ригеля  $w_1$  и осадок опор  $w_2$  для случая безынерционного полупространства, подсчитанные для трех значений коэффициента неупругого сопротивления  $\gamma = 0; 0,05; 0,1$ .

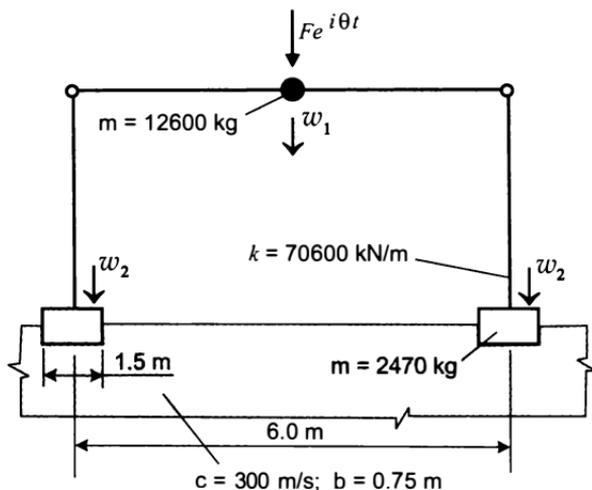


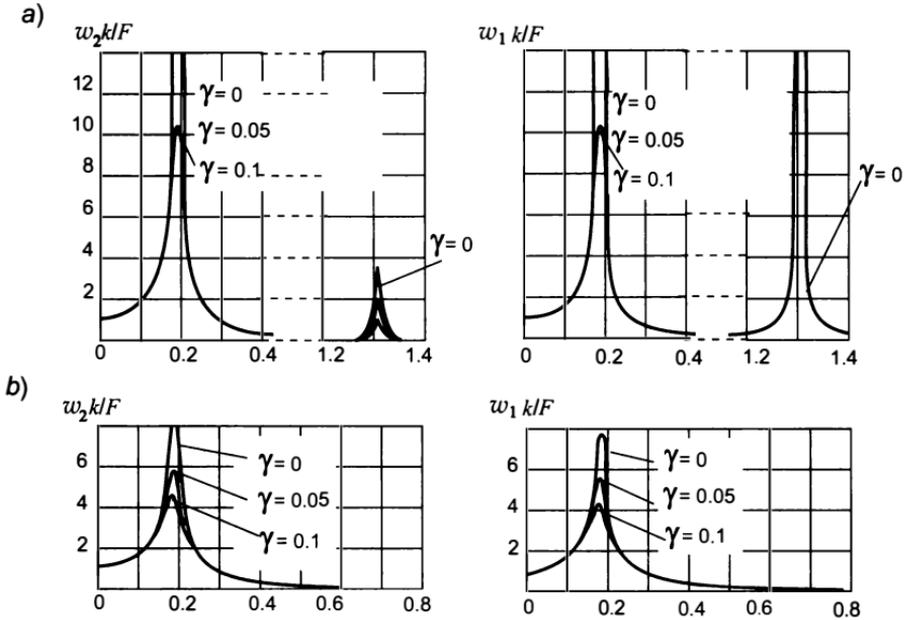
Рис. 10.1. Конструкция на упругом полупространстве

Аналогичные кривые для случая, когда учитывались инерционные свойства основания, приведены на рис. 10.2,б. Основание характеризуется скоростью распространения S-волн (поперечных)  $c = 300$  м/сек, а на величинах осадок сказывается полуширина фундамента  $b = 0,75$  м. По оси абсцисс отложены значения безразмерных частот  $\chi = \theta b / c$ .

Следует отметить, что на графиках, соответствующих инерционному полупространству, второй резонансный пик отсутствует, и, кроме того, амплитуда колебаний остается конечной даже при резонансе в отсутствие неупругого сопротивления конструкции. Положение первого резонансного пика практически не зависит от инерционных свойств основания, но амплитудные значения существенно меньше, если учитывается инерция основания. Эти эффекты связаны с тем, что затухание колебаний вследствие излучения энергии в полупространство оказывается сопоставимым (если не большим), чем потери на внутреннее трение в конструкции.

В работе [Гальченко, 1980] были проведены сопоставительные расчеты различных моделей упругого основания для решения динамических задач — модифицированная модель Винклера,

позволяющая учесть инерционные свойства основания, двухпараметровая модель Пастернака, упругое полупространство и др. Показано, что путем специального подбора параметров модели можно получить близкие результаты, но при обязательном учете инерционных свойств основания.



**Рис. 10.2.** Резонансные кривые: *a* — без учета инерции основания; *b* — с учетом инерции основания

Практические расчеты, с помощью которых могут быть учтены эффекты излучения энергии колебаний в основание, основываются на использовании эквивалентных жесткостей и коэффициентов потерь энергии в упрощенной модели, где к фундаментной плите присоединены эквивалентные пружины, отражающие сопротивление основания поступательным и угловым перемещениям, и соответствующие им демпферы. При этом коэффициенты удельного демпфирования вычисляются по формуле типа  $b = k\sqrt{C_z}$  [кгс×сек/см<sup>2</sup>]. Здесь  $k$  — безразмерный коэффициент, принимающий значение от 0,07 до 0,14, в зависимости от направления колебаний,  $C_z$  [кгс/см<sup>3</sup>] — коэффициент упругого равномерного сопротивления основания. Поскольку реальное основание может иметь чрезвычайно сложную структуру, и его трещиноватость, например, может препятствовать уводу энергии, предельную величину диссипации энергии в основание рекомендуется ограничивать, считая значение

коэффициента затухания величиной порядка 15 35% от критического.

Говоря о динамических расчетных моделях нельзя обойти вниманием вопрос о соотношении плоских и пространственных расчетных схем в задачах динамики сооружений. К сожалению, учебная и справочная литература настолько сильно пронизала традицией плоскостного расчета, что многие практикующие инженеры (особенно те, для которых преобладающими являются проблемы статической работы) попросту забывают об особенностях пространственных движений.

Попытка свести всю «пространственность» к раздельному рассмотрению колебаний, например, в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ , часто оканчивается неправильными выводами об особенностях динамической реакции объекта.

Типичным примером может служить дискуссия с одним из пользователей программы **SCAD**, который обвинил авторов разработки в грубой ошибке:

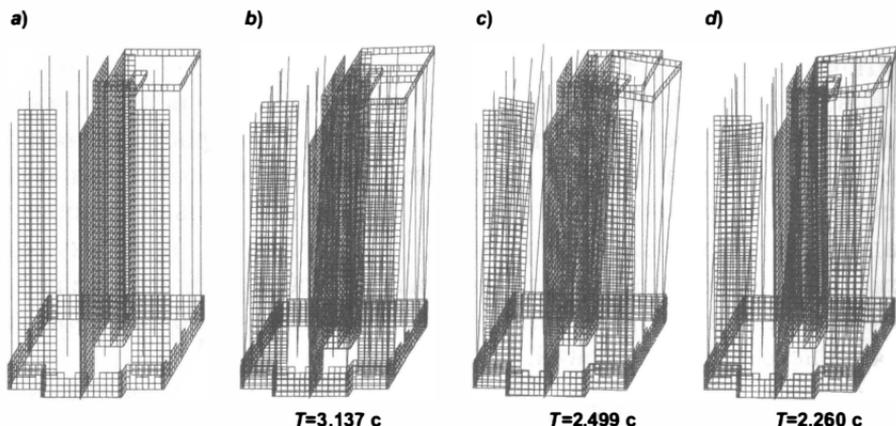
*«... модуль определения собственных чисел и векторов также вызывает большие сомнения ... результаты расходятся с имеющимися классическими решениями. Я один пример (14-этажное здание, 7 форм колебаний) проделал вручную - и потому заявляю это с полной ответственностью.*

*... прошу немедленно сообщить разработчикам, исправить ошибки и выслать исправления»*

В ответ на просьбу о присылке ручного расчета было получено сообщение, что такой расчет был выполнен для эквивалентного консольного стержня (кстати, защемленного, а не опертого на упругое основание, как это предусматривалось расчетной схемой здания показанной на рис. 10.3,а). Для этой консоли

*«...Периоды собственных колебаний в направлении X:  $T_1 = 2,208с$ ,  $T_2 = 0,3522с$ ,  $T_3 = 0,1258с$ ,  $T_4 = 0,064с$ ,  $T_5 = 0,0376с$ ,  $T_6 = 0,026с$ ,  $T_7 = 0,0186с$ . Периоды собственных колебаний в направлении Y:  $T_1 = 2,81с$ ,  $T_2 = 0,448с$ ,  $T_3 = 0,16с$ ,  $T_4 = 0,0816с$ ,  $T_5 = 0,05с$ ,  $T_6 = 0,033с$ ,  $T_7 = 0,024с$ ».*

На рис.10.3,б – 10.3,д показаны результаты пространственного расчета. Рисунок наглядно демонстрирует наличие крутильных компонент в формах собственных колебаний, которые характерны для здания с асимметричным ядром жесткости. Все это полностью пропущено в плоском расчете.



**Рис. 10.3.** Формы собственных колебаний (междуэтажные перекрытия условно не показаны): *a*— схема; *b*— первая форма; *c*— вторая форма, *d*— третья форма.

Конечно, попытка получить оценку достоверности результатов динамического расчета сама по себе может только приветствоваться, однако здесь требуется понимание того, какая задача решается и каковы особенности используемой динамической модели.

Часто практические инженеры (в особенности те, которые задачи динамики решают достаточно редко) хотели бы иметь ориентиры, позволяющего им оценить достоверность решения и отсеять заведомо ошибочные результаты. В роли такого ориентира могут выступать различного рода приближенные зависимости, типичные для той или иной предметной области, которые могут быть основаны на статистических или экспериментальных данных. С их помощью выявляются грубые ошибки расчетной схемы, когда полученный в процессе расчета результат существенно и необъяснимо расходится с такого рода оценкой. Типичными примерами могут быть значения первой частоты собственных колебаний, которые для многоэтажных зданий простой формы в плане даются эмпирической зависимостью принятой в Еврокоде

$$n_1 = 46 / H ,$$

где  $H$  — высота в метрах, а результат дается в герцах. Аналогично для свободно стоящих решетчатых башен существует оценка

$$n_1 = \left( \frac{L_N}{H} \right)^{2/3} \left( \frac{B}{H} \right)^{1/2} ,$$

где  $L_N = 270$  м для башен с квадратным планом и  $L_N = 230$  м для башен с треугольным планом и  $B$  — ширина башни в основании, а для мостов пролетом  $L$  от 20 м до 100 м эта частота

$$n_1 = 40(L)^{-3/4}.$$

### 10.1.1. Динамические степени свободы

Решение динамических задач на ЭВМ обычно требует значительно больших затрат машинного времени, чем решение аналогичных по сложности конструкции задач статического расчета. Поэтому, за исключением простейших моделей, практически всегда является существенной проблема выбора необходимого числа динамических степеней свободы. Имеется широко используемое эмпирическое правило, которое утверждает, что для системы с  $n$  динамическими степенями свободы надежно вычисляются примерно  $n/2$  первых собственных частот и соответствующих им форм собственных колебаний. По поводу этого правила в книге [Блехман и др., 1983] указывается, что оно близко перекликается с теоремой Котельникова из теории информации: для получения достаточной информации о непрерывном сигнале частота дискретных измерений должна быть, по крайней мере, вдвое выше наибольшей частоты, содержащейся в спектре сигнала.

Есть и еще одно соображение, поддерживающее подозрительное отношение расчетчика к частотам и формам свободных колебаний конструкции, относящимся к верхней части (половине?) спектра. Дело в том, что, как правило, модель динамической системы с конечным числом степеней свободы возникает не сама по себе, а как результат дискретизации (например, по методу конечных элементов) исходной континуальной модели. Так вот, для высших форм колебаний неустранимая без смены постановки задачи погрешность успела, возможно, просочиться уже в непрерывную модель, то есть до перехода к дискретной модели. Так, например, для простой изгибаемой балки Бернулли-Эйлера прямоугольного сечения, когда отношение высоты сечения к длине полуволны соответствующей формы колебаний начинает превышать некоторую критическую величину (приблизительно  $1/5$ ), становится сомнительной применимость теории Бернулли-Эйлера, и приходится переходить к теории изгиба балки Тимошенко, да еще и с учетом инерции вращения. При еще более коротковолновых формах колебаний недостаточно точной становится и эта непрерывная модель, так что требуется в очередной раз менять исходную механико-математическую постановку задачи, переходя, скажем, к постановке плоской динамической задачи теории упругости. Исследуя формы

колебаний дискретной модели, расчетчик может, хотя бы качественно, оценить, имеет ли смысл учитывать высшие формы, а если и имеет, то до какого номера формы включительно. В более общем плане все это, на самом деле, уже обсуждалось нами в начале главы 2 (см. рис. 2.1).

Требование использования вдвое большего числа степеней свободы, чем число собственных форм с частотами до 33 Гц, включено в нормы Комиссии по атомной энергии США [NUREG-0800, 1987] в качестве альтернативного требованию, чтобы результаты расчета не менялись более чем на 10% при увеличении  $n$ . Эти же нормы содержат и другое важное указание, касающееся возможности не учитывать в динамических расчетах некоторые подсистемы сооружения.

Если обозначить через  $M_1$  массу основной системы, а через  $M_2$  — массу присоединяемой к ней вторичной подсистемы (например, подвешиваемого трубопровода), и если соответствующие собственные частоты этих двух частей сооружения обозначены как  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то вторичную подсистему можно не учитывать, когда  $M_2/M_1 < 0,01$  или же когда  $0,01 < M_2/M_1 < 0,1$  и соотношение частот  $\omega_2/\omega_1 < 0,8$  или  $\omega_2/\omega_1 > 1,25$ .

Заметим, что минимальная  $\omega_1$  и максимальная  $\omega_n$  из собственных частот расчетной модели определяют некоторые «естественные» масштабы времени  $t_{\max} = 2\pi/\omega_1$  и  $t_{\min} = 2\pi/\omega_n$ , с помощью которых все процессы можно представить как «медленные», «нормальные» и «быстрые». Такая классификация позволяет избавиться от анализа несущественных эффектов, например, не рассматривать вид функции изменения нагрузки во времени, когда ее общее время действия существенно меньше, чем  $t_{\min}$ , или не учитывать переходные процессы при рассмотрении моментов времени, заметно превышающих  $t_{\max}$ . Если, кроме временных масштабов, учитывать и пространственные, то может быть проанализирована возможность игнорирования волновых процессов, которая обычно используется в расчетах строительных конструкций. Этот подход настолько глубоко укоренился среди расчетчиков, что чаще всего даже не рассматривается его законность. Вместе с тем, современные сооружения иногда имеют такие большие размеры, что время распространения возмущения (например, от сейсмического толчка) оказывается сопоставимым с периодами собственных колебаний. Естественно, что игнорирование процессов передачи возмущения оказывается тогда незаконным.

### 10.1.2. Динамическая конденсация — процедура Гайяна

Стремление к уменьшению количества динамических степеней свободы часто реализуется путем группировки масс конструкции в относительно небольшом количестве узлов, при этом остальные узлы расчетной схемы оказываются безмассовыми. Кроме того, почти всегда можно пренебречь некоторыми инерционными характеристиками системы, например, связанными с вращательными степенями свободы. Таким образом, возникает задача динамического анализа системы с неполным числом масс, в которой число учитываемых динамических степеней свободы может, например, составлять 10% от числа статических степеней свободы [Клаф, Пензиен, 1979]. Исключение чисто статических степеней свободы выполняется с использованием процедуры статического уплотнения, которая представлена выше в виде уравнения (3.175). Если же речь идет о частичном исключении динамических степеней свободы, то тогда используется конденсация по Р.Гайяну [1965].

Представляется полезным вновь вернуться к описанию этой процедуры с тем, чтобы проанализировать те погрешности, которые возникают при ее применении к более реалистической ситуации. Эта ситуация характеризуется тем, что к безмассовым относят степени свободы, для которых инерционные характеристики не равны нулю, а попросту малы. Тогда вместо (3.174) мы имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix}, \quad (10.2)$$

где диагональная матрица масс  $\mathbf{m}_{00}$  представлена элементами намного меньшими, чем элементы матрицы  $\mathbf{m}_{11}$ .

Предположим, что между подвекторами  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  может быть установлена линейная зависимость

$$\Psi_0 = \mathbf{T} \Psi_1, \quad (10.3)$$

причем матрица линейного преобразования  $\mathbf{T}$  сохраняется без изменений в процессе колебательного движения системы. Тогда полный вектор  $\Psi$  может быть представлен в виде

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Psi_1, \quad (10.4)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица порядка равного размерности подвектора  $\Psi_1$ .

Подстановка (10.4) в (10.2) и домножение полученного равенства слева на матрицу  $[[\mathbf{T}^T \mathbf{I}]]$  приводит к уравнениям свободных колебаний системы с укороченным набором динамических степеней свободы (все динамические степени свободы, собранные в векторе  $\Psi_0$ , исключаются)

$$(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{00} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{10} \mathbf{T}) \Psi_1 = \omega^2 (\mathbf{m}_{11} + \mathbf{T}^T \mathbf{m}_{00} \mathbf{T}) \Psi_1. \quad (10.5)$$

Для того, чтобы найти матрицу преобразования  $\mathbf{T}$ , из первого уравнения системы (10.2) получим

$$\Psi_0 = -\mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01} \Psi_1 + \omega^2 \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{00} \Psi_0. \quad (10.6)$$

Если в (10.6), в силу малости масс  $\mathbf{m}_{00}$  пренебречь вторым слагаемым, то искомая матрица преобразования  $\mathbf{T}$  запишется в виде

$$\mathbf{T} = -\mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}, \quad (10.7)$$

и уравнение (10.2) при таком выборе  $\mathbf{T}$  и с учетом условий симметрии полной матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{01}^T = \mathbf{K}_{10}$  упростится до уравнения

$$\mathbf{K}^* \Psi_1 = \omega^2 \mathbf{M}^* \Psi_1, \quad (10.8)$$

где  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{M}^*$  *приведенные* (иногда говорят — *сконденсированные*) матрицы жесткости и масс соответственно

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}, \quad (10.9)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{m}_{11} + \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{00} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.8) представляет собой *сконденсированное* уравнение свободных колебаний системы, содержащее в себе как технику статической конденсации, так и динамическую конденсацию по Гайяну. Если в выражении для приведенной матрицы масс в (10.10) сохранить только первое слагаемое, пренебрегая членом с малой массой  $\mathbf{m}_{00}$ , то приходим к процедуре статической конденсации. В противном случае речь идет о динамической конденсации по Гайяну. Различие между этими двумя процедурами заключается в том, что при статической конденсации массы  $\mathbf{m}_{00}$  просто отбрасываются при анализе свободных колебаний системы; при динамической же конденсации эти массы перераспределяются между остальными инерциальными характеристиками.

Сопоставим решения первоначальной задачи (10.2) и задачи (10.8). Пусть  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — упорядоченный по возрастанию спектр частот исходной задачи (10.2), а  $\omega_{Si}$  и  $\omega_{Di}$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) — спектры частот соответственно статически и динамически сконденсированных задач. Здесь  $n$  — число динамических степеней свободы исходной задачи,

$n_1$  — число динамических степеней свободы системы, оставшихся после конденсации. Несложно заметить, что динамически сконденсированная задача отвечает колебаниям механической системы, которая получается из исходной системы наложением на ее возможные формы колебаний связей (10.3), где матрица полисвязей  $\mathbf{T}$  определяется соотношением (10.7). Опираясь на теорему Релея, немедленно получаем оценку

$$\omega_i \leq \omega_{Di} \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (10.11)$$

С другой стороны, механическая система, отвечающая статически сконденсированной задаче на собственные колебания, получается из динамически сконденсированной системы простым отбрасыванием части масс. Не останавливаясь на формальном обосновании, заметим, что снижение инерциальных характеристик системы способно смещать частотный спектр только вправо. Это утверждение легко доказывается в общем виде, если опираться на вариационное описание задачи о собственных значениях. В результате имеем

$$\omega_{Di} \leq \omega_{Si} \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (10.12)$$

Объединяя оценки (10.11) и (10.12), получаем важное качественное соотношение, свидетельствующее о том, что в отношении частотного спектра динамическая конденсация всегда точнее статической конденсации.

Воспользуемся теперь соотношением для определения поправок первого порядка малости для собственных частот и собственных векторов возмущенных матриц [Банах, Перминов, 1972]. Безразмерные величины поправок пропорциональны элементам матрицы

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}_0^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_0 + \mathbf{\Phi}_0^T \Delta \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{\Phi}_0, \quad (10.13)$$

где  $\Delta \mathbf{K}$  и  $\Delta \mathbf{M}$  — возмущения матрицы жесткости и матрицы инерции соответственно;  $\mathbf{\Phi}_0$  — матрица собственных векторов невозмущенной системы и  $\mathbf{\Lambda}_0$  — диагональная матрица собственных чисел невозмущенной системы. Абсолютная величина поправок пропорциональна норме матрицы  $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}\| &\leq -\|\mathbf{\Phi}_0\|^T \|\mathbf{\Phi}_0\| (-\|\Delta \mathbf{K}\| + \|\Delta \mathbf{M}\| \|\mathbf{\Lambda}_0\|) = \\ &= P_{\Phi} (-\|\Delta \mathbf{K}\| + \|\Delta \mathbf{M}\| \|\mathbf{\Lambda}_0\|), \end{aligned} \quad (10.14)$$

где  $P_{\Phi}$  — спектральное число обусловленности.

Для исходной задачи  $\|C\| = \|m_{00}\|$ , а задача (10.8) отличается только членами малого порядка  $\varepsilon$  в матрице инерции, т. е.  $\Delta K = 0$ . Тогда для этой задачи

$$\|C \cdot\| = \|K_{01} K_{00}^{-1} m_{11} K_{00}^{-1} K_{10}\| \leq \frac{\|K_{01}\| \|K_{10}\|}{\|K_{11}\|^2} \|m_{00}\| < \|m_{00}\| < \varepsilon. \quad (10.15)$$

Примерно такую же оценку погрешности можно получить для задачи, где в приведенной матрице масс не учитываются внедиагональные члены, и вместо матрицы масс по (10.10) используется

$$M^{**} = \text{diag}(M_{11} - K_{01} K_{00}^{-1} m_{11} K_{00}^{-1} K_{10}). \quad (10.16)$$

У этой системы мы имеем удобную для вычислений структуру с диагональной матрицей масс.

При решении динамических задач не обязательно учитывать все найденные формы собственных колебаний, многие из них фактически не возбуждаются при конкретном внешнем воздействии. Проблема корректного задания необходимого числа учитываемых форм собственных колебаний в общем случае решается методом попыток, поскольку получить априорную оценку довольно трудно. Однако имеются и такие случаи, когда в нормативных документах, регламентирующих расчет на то или иное динамическое воздействие, рекомендуется учет определенного числа форм собственных колебаний. Так, например, СНиП 2.01.07–85 ограничивает диапазон частот, которые должны учитываться при расчете конструкций на пульсации ветрового потока, а СНиП II–7–81 регламентирует использование не менее 10 форм колебаний при сейсмическом расчете бетонных плотин и не менее 15 форм для плотин из грунтовых материалов. Более последовательны нормы США, которые требуют, чтобы сумма обобщенных масс по учитываемым формам собственных колебаний была не меньшей, чем 90% общей массы системы [NUREG-0800, 1987].

При выполнении этой нормы снижается риск того, что некая очень гибкая часть сооружения («хлыст»), практически изолированные собственные колебания которой определяют первые собственные формы, будет учтена, а колебания всего остального сооружения окажутся проигнорированными.

## 10.2. Интегрирование уравнений движения

В разделе 3.7 при рассмотрении движений механической системы с конечным числом динамических степеней свободы использовалось разложение

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \Psi_i = \Phi \mathbf{y}(t), \quad (10.17)$$

где  $\Phi$  — матрица, столбцы которой представляют собой векторы свободных колебаний системы  $\Psi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Линейное преобразование (10.17) позволило свести задачу расчета системы с конечным числом динамических степеней свободы к анализу независимых движений совокупности одномассовых систем, причем в уравнение движения каждой такой одномассовой системы было введено дополнительное слагаемое, учитывающее вязкое сопротивление движению, пропорциональное скорости

$$M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + C_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 M_i y_i = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.18)$$

Внимательный читатель может заметить здесь (и правильно, если заметит) некий подвох. В самом деле, сначала предлагается в общих уравнениях движения, не учитывающих силы сопротивления, провести переход от вектора исходных обобщенных координат  $\mathbf{u}(t)$  к так называемым *главным координатам*  $\mathbf{y}(t)$ , воспользовавшись разложением по (10.17), а затем в каждое из уравнений уже распавшейся системы ввести независимые друг от друга силы сопротивления<sup>1</sup>.

Во многих случаях такой, казалось бы незаконный, прием вполне оправдан и аргументируется отсутствием надежной исходной информации о распределении сил сопротивления движению системы. При таких обстоятельствах равноприменима почти любая здравая идея, в том числе и упрощающая расчет гипотеза о том, что силы вязкого сопротивления можно независимо вводить в каждое из уравнений (10.18). Однако в тех ситуациях, когда конструкция составлена из разнородных материалов, обладающих резко различными диссипативными свойствами, а также при наличии в системе конструктивных демпферов, введение независимых сил сопротивления в уравнения (10.18) приводит к чувствительным

<sup>1</sup> Иногда говорят о *физических координатах*  $\mathbf{u}(t)$  и *нормальных координатах*  $\mathbf{y}(t)$ . Хотя это и не канонизировано, все же наиболее часто для вектора главных координат используют обозначение  $\mathbf{q}(t)$ . Мы отступаем от этого неписанного правила потому, что символ  $\mathbf{q}$  использован нами ранее в главе 3 для других целей.

ошибкам в результатах расчетов. Это особенно отчетливо проявляется при близких к резонансным режимам внешних воздействий, причем демпфирование существенно влияет на формы колебаний системы. При таких обстоятельствах целесообразно исходить из более аккуратной постановки задачи, что приводит к необходимости численного интегрирования уравнений движения системы.

В общем случае уже в исходные уравнения движения (3.142) вводится вязкое сопротивление, так что эти уравнения принимают вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (10.19)$$

с симметричной матрицей диссипативных коэффициентов  $\mathbf{C} = \llbracket c_{ij} \rrbracket$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Из теории квадратичных форм известно [Гантмахер, 1967], что всегда существует такое линейное преобразование координат, которое позволяет одновременно привести две симметричные матрицы одинакового порядка к диагональному виду, если хотя бы одна из матриц (в нашем случае это матрица  $\mathbf{M}$ ) положительно определена. Однако для трех матриц (здесь это матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{C}$ ) в общем случае этого не удастся сделать. Этого можно добиться в том частном случае, когда матрица демпфирования  $\mathbf{C}$  может быть представлена в виде линейной комбинации двух других матриц. Пусть, например,

$$\mathbf{C} = a_M \mathbf{M} + a_K \mathbf{K}, \quad (10.20)$$

что соответствует случаю так называемого *пропорционального демпфирования*. Тогда уравнение (10.19) переписется в виде

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{u}} + a_M \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}(\mathbf{u} + a_K \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(t), \quad (10.21)$$

и переход к главным координатам по (10.17) вновь приводит к распадающейся системе уравнений

$$M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + M_i (a_M + \omega_i^2 a_K) \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 M_i y_i = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10.22)$$

что полностью совпадает с (10.18), если там положить

$$C_i = (a_M + \omega_i^2 a_K) M_i. \quad (10.23)$$

Перейдем теперь к более общему случаю, когда гипотеза о пропорциональном демпфировании оказывается слишком грубой, и для решения уравнения (10.19) приходится отказываться от

разложений по формам свободных колебаний, что заставляет прибегать к численному интегрированию.

Есть и еще один мотив, подталкивающий к использованию процедур численного интегрирования. Когда внешнее возмущение представляет собой достаточно сложную функцию времени, и это возмущение задано на ограниченном временном интервале, инженера может интересовать состояние системы в переходных процессах. В этом случае, даже при отсутствии вязкого сопротивления движению или при пропорциональном демпфировании, становится уместным численное интегрирование.

Основная идея, используемая при численном интегрировании, на удивление, проста и алгоритмична. Интервал времени  $[0, T]$ , на котором инженера предположительно интересует поведение механической системы, разбивается на относительно короткие промежутки времени  $\Delta t$  (как правило, равные для упрощения процедуры численного интегрирования), а на каждом из промежутков от достигнутого времени  $t$  до  $t + \Delta t$  входящие в уравнение (10.19) производные приближенно заменяются разностными отношениями. Используя информацию о достигнутых перемещениях, скоростях и ускорениях всех масс системы в момент времени  $t$ , на основе разностного аналога уравнений (10.19) получают новые значения перемещений, скоростей и ускорений, относящиеся к очередному моменту времени  $t + \Delta t$ , которые теперь становятся начальными условиями для следующего шага интегрирования, и т. д. На механическом уровне этот процесс интерпретируется как пошаговое выполнение условий динамического равновесия в приращениях с накоплением результирующих перемещений и их производных первого и второго порядков.

Известно множество способов построения процедуры численного интегрирования уравнений (10.19), различающихся, по сути, способом введения разностных отношений в эти уравнения [Бате, Вилсон, 1982]. Принято различать эти способы отнесением их к *явным* и *неявным* схемам интегрирования. Если при определении перемещений  $\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}(t + \Delta t)$  используется условие динамического равновесия с запаздыванием (в предшествующий момент времени  $t$ ), то есть

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t, \quad (10.24)$$

то говорят о схемах явного интегрирования. В противном случае, когда определение перемещений  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  опирается на опережающее для интервала времени  $[t, t + \Delta t]$  условие динамического равновесия

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}, \quad (10.25)$$

говорят о применении неявных схем. В (10.24) и (10.25) нижними индексами помечаются фиксированные моменты времени, к которым относятся соответствующие величины.

Преимущество явных схем интегрирования заключается в том, что на каждом шаге интегрирования они менее трудоемки по вычислительным затратам. Однако, как показывает практика применения явных схем, подтверждаемая и теоретическим анализом [Бате, Вилсон, 1982], явные схемы поражены весьма неприятным свойством — быстрым накоплением погрешности вычислений<sup>2</sup>. Именно поэтому в современных программных разработках промышленного применения наибольшее распространение получили неявные схемы, из которых отметим два наиболее популярных — это  $\beta$ -метод Ньюмарка и  $\vartheta$ -метод Вилсона<sup>3</sup>.

Согласно методу Ньюмарка используются следующие параметрически зависящие от  $\beta$  аппроксимации

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2} \left[ \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t \right] - \frac{1/2 - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t], \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + (\Delta t)^2 \left[ (1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_t + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right]. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Метод Ньюмарка, в зависимости от выбора параметра  $\beta$ , включает в себя как частный случай следующие схемы:

- $\beta = 0$  — схема интегрирования по Эйлери;
- $\beta = 1/6$  — схема с линейным ускорением;
- $\beta = 1/4$  — схема с постоянным средним ускорением;
- $\beta = 1/2$  — схема с центральными разностями;

<sup>2</sup> Специалистам по численному анализу хорошо известны такие понятия, как условно устойчивые схемы интегрирования и безусловно устойчивые, связанные с анализом накопления погрешностей при численном интегрировании. Мы не останавливаемся на обсуждении этих вопросов здесь, отсылая заинтересованного читателя к специальной литературе [Бате, Вилсон, 1982].

<sup>3</sup> Мы отступаем от оригинального и ставшего уже традиционным обозначения  $\theta$ -метода Вилсона в пользу другого возможного написания  $\vartheta$  той же греческой буквы «гета» во избежание путаницы в обозначениях, поскольку символ  $\theta$  в этой главе книги использован для обозначения частоты внешнего гармонического возмущения.

- $\beta = 1$  — схема с обратными разностями.

Ньюмарк обосновал безусловную устойчивость схемы интегрирования при  $\beta = 1/4$ , что соответствует случаю постоянного среднего ускорения на каждом из временных интервалов  $\Delta t$ .

В методе Вилсона принимается линейный закон изменения ускорений на интервале времени  $[t, t + \vartheta \Delta t]$ , где  $\vartheta \geq 1$ , что приводит к следующим аппроксимациям

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} &= \frac{6}{\vartheta^2 \cdot \Delta t^2} [\mathbf{u}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} - \mathbf{u}_t] - \frac{6}{\vartheta \cdot \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - 2\ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{3}{\vartheta \cdot \Delta t} [\mathbf{u}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} - \mathbf{u}_t] - 2\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\vartheta}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \mathbf{u}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} &= \mathbf{u}_t + \vartheta \cdot \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\vartheta^2 \cdot \Delta t^2}{6} \left[ \ddot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \cdot \Delta t} + 2\ddot{\mathbf{u}}_t \right]. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Анализ схемы Вилсона показывает ее безусловную устойчивость при выборе параметра  $\vartheta \geq 1,37$ . В практических расчетах обычно принимают  $\vartheta = 1,4$ .

С точки зрения пользователя программной продукции критичными являются следующие решения, которые необходимо принять, прежде чем приступить непосредственно к расчету. Прежде всего, необходимо описать историю динамического нагружения, иначе говоря, задаться в той или иной форме векторной функцией времени  $\mathbf{p}(t)$ . Далее нужно сориентироваться в выборе доступной для данной программы схемы интегрирования и установить значение параметра схемы. И наконец, необходимо назначить шаг интегрирования  $\Delta t$ . Так, например, в программе **GTSTRUDL** пользователь имеет гибкую возможность выбора не только схемы интегрирования с назначением параметра (при желании, выбор параметра производится автоматически), но и разбить временной участок на несколько последовательных интервалов времени с указанием своего шага интегрирования на каждом таком интервале. При назначении шага  $\Delta t$  безусловно устойчивые схемы интегрирования позволяют опираться на соображения точности расчета без оглядки на возможность накопления погрешности вычислений. Обычно считается, что удовлетворительные результаты могут быть получены при выполнении условия

$$\Delta t / T_k \leq 0,01, \quad (10.28)$$

где  $T_k$  — период характерной  $k$ -й формы свободных колебаний недемпфированной конструкции. Форма свободных колебаний ( $k$ -я форма) считается характерной, если нет необходимости принимать во внимание все последующие формы колебаний, начиная с  $(k+1)$ -й.

Естественно, что выбор номера характерной формы зависит от вида внешнего возмущения. Понятно также, что это — лишь качественная оценка, которая может потребовать уточнений по результатам расчетов. При относительно коротких историях нагружения бывает достаточным и более грубый шаг по времени. Так, например, нормы США для проектирования АЭС при расчете на сейсмический толчок рекомендуют выбирать шаг таким образом, чтобы при его уменьшении вдвое изменение результата не превышало 10%, что обычно достигается при шаге порядка  $(0,08 \dots 0,10)T_k$ .

Завершая этот раздел, в котором, по необходимости, проблема численного интегрирования уравнений движения затронута лишь легким поверхностным касанием, подчеркнем весьма высокую вычислительную трудоемкость этих процедур. Именно поэтому всякий раз нужны веские основания для проведения анализа динамического поведения конструкции с помощью численного интегрирования.

### 10.3. Вынужденные колебания при гармоническом воздействии

В отечественных нормативных документах при расчете зданий, фундаментов под машины с динамическими нагрузками и других строительных конструкций регламентируется использование гипотезы Е.С.Сорокина по учету внутреннего сопротивления в материале при расчете таких конструкций на динамическое воздействие нагрузки в близких к резонансным режимах.

Не останавливаясь на дискуссии по поводу достоинств и недостатков гипотезы Е.С.Сорокина (см., например, [Коллоушек, 1965]), сконцентрируем внимание на вычислительном аспекте, порождаемом этой проблемой. Согласно методике Сорокина [1972] учет внутреннего трения при колебаниях линейной системы может быть выполнен с применением комплексного модуля упругости для материала конструкции. Уравнения колебаний составляются для соответствующей идеально упругой системы, но в комплексной форме, в которой модуль упругости материала формально

умножается на коэффициент  $(1 + i\gamma)$ , где  $\gamma$  — так называемый коэффициент неупругого сопротивления материала,  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Считая, что входящие в уравнения движения перемещения механической системы также представляют из себя комплексные величины, получаем отсюда комплексное уравнение движения механической системы. Вещественная часть решения этого уравнения, соответствующая вещественной части комплексной возмущающей силы, и является решением поставленной задачи.

Рассмотрим случай колебаний механической системы с конечным числом динамических степеней свободы, предполагая сначала для простоты, что конструкция однородна по материалу, точнее говоря, будем считать, что коэффициент неупругого сопротивления  $\gamma$  является константой — одинаков для всех элементов и частей конструкции.

Обозначая число динамических степеней свободы через  $n$ , запишем сначала уравнения движения линейной системы без учета затухания. Имеем

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t). \quad (10.29)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений по направлениям динамических степеней свободы системы,  $\mathbf{M}$  — матрица инерциальных характеристик системы (матрица масс),  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости системы, соответствующая выбранным динамическим степеням свободы. Понятно, что левая часть уравнения (10.29) представляет собой сумму (по каждой из динамических степеней свободы) силы инерции и упругой восстанавливающей силы, которая, в соответствии с принципом Даламбера, приравнивается внешней возмущающей нагрузке  $\mathbf{P}$ , изменяющейся со временем  $t$ . Так обстоит дело при динамическом воздействии нагрузки на идеально упругую линейную консервативную систему.

Компоненты матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  при одновременном и пропорциональном изменении модулей упругости всех элементов конструкции изменяются пропорционально общему множителю — коэффициенту при модуле упругости. В рассматриваемом нами случае таковым общим множителем является комплексная величина  $(1 + i\gamma)$ . Таким образом, уравнение (10.29) при учете сил внутреннего сопротивления в рамках гипотезы Е.С. Сорокина переписывается в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + (1 + i\gamma)\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}(t), \quad (10.30)$$

где  $\mathbf{w}$  — искомый вектор комплексных перемещений,  $\mathbf{F}(t)$  — вектор комплексных внешних сил.

Оба этих комплексных вектора раскладываются на свою вещественную и мнимую части

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{P} + i\mathbf{Q}. \quad (10.31)$$

При гармоническом воздействии внешнюю нагрузку  $\mathbf{P}$  с заданной частотой внешнего возмущения  $\theta$  и амплитудным значением  $\mathbf{P}_0$  можно записать в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cos\theta t, \quad (10.32)$$

при этом, следуя методике Е.С.Сорокина, мнимая часть внешнего возмущения принимается изменяющейся по времени по тому же закону, но со сдвигом фазы на угол  $\pi/2$ , иначе говоря,

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}_0 \sin\theta t. \quad (10.33)$$

В экспоненциальной форме комплексная внешняя нагрузка  $\mathbf{F}$  устанавливается при этом в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 e^{i\theta t}. \quad (10.34)$$

В случае установившихся вынужденных колебаний решение для векторного дифференциального уравнения (10.30) принимается в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{Z} e^{i\theta t}, \quad (10.35)$$

где  $\mathbf{Z}$  — вектор, который мы будем называть *вектором комплексных амплитуд* искомых перемещений. Этот вектор также может быть представлен разложением на свою вещественную и мнимую части

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}. \quad (10.36)$$

После подстановок (10.34) и (10.35) в дифференциальное уравнение (10.30) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора  $\mathbf{Z}$  комплексных амплитуд

$$[(1 + i\gamma)\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}]\mathbf{Z} = \mathbf{P}_0. \quad (10.37)$$

Разделяя теперь вещественные и мнимые части векторного равенства (10.37), приходим к системе уравнений относительно вещественной  $\mathbf{X}$  и мнимой  $\mathbf{Y}$  частей комплексного вектора  $\mathbf{Z}$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}) & -\gamma\mathbf{K} \\ -\gamma\mathbf{K} & -(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.38)$$

Поскольку нас интересуют резонансные или близкие к резонансным режимы работы конструкции, это означает, что матрица  $(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})$  вырождена или близка к вырожденной — в резонансных режимах частота возмущения  $\theta$  совпадает с одной из собственных частот колебаний линейной системы  $\omega_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), определяемых решением векового уравнения

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (10.39)$$

Если считать, что рассматриваемая совокупность из  $n$  динамических степеней свободы не содержит возможных перемещений конструкции как жесткого тела, то в спектре собственных чисел матрицы  $\mathbf{K}$  не окажется нулевых собственных чисел (более того, все собственные числа матрицы  $\mathbf{K}$  будут строго положительны) и, следовательно, сама матрица жесткости  $\mathbf{K}$  окажется невырожденной, а значит обратимой

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}. \quad (10.40)$$

Матрица  $\mathbf{D}$  называется *матрицей податливости системы*.

Из второго уравнения матрично-векторной системы (10.38) вектор  $\mathbf{X}$  может быть выражен через вектор  $\mathbf{Y}$ , а именно

$$\mathbf{X} = -\gamma^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) \mathbf{Y}. \quad (10.41)$$

Подставляя далее (10.41) в первое уравнение системы (10.38), получим

$$\mathbf{Y} = -[\gamma^2 \mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})]^{-1} \gamma \mathbf{P}_0, \quad (10.42)$$

и, возвращаясь снова к (10.41), находим окончательно

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) [\gamma^2 \mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})]^{-1} \mathbf{P}_0. \quad (10.43)$$

Чтобы быть уверенным в возможности применения формул (10.42) и (10.43), следует убедиться в том, что заключенная в квадратные скобки в правой части (10.43) матрица

$$\gamma^2 \mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}) \quad (10.44)$$

не вырождается при любых значениях  $\theta$ , если только  $\gamma \neq 0$ . Для этого, прежде всего, заметим, что при сделанных предположениях относительно закрепления конструкции от жестких смещений матрица жесткости системы  $\mathbf{K}$ , а вместе с ней и обратная ей матрица податливости  $\mathbf{D}$  не только невырождены, но и положительно определены. Далее, в силу симметрии матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ , выражение для второго слагаемого в (10.44) можно переписать в виде

$$(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})^T \mathbf{D} (\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M}), \quad (10.45)$$

откуда вытекает положительная полуопределенность матрицы (10.45) (неотрицательность всех ее собственных чисел). Поскольку сумма положительно определенной матрицы  $\gamma^2 \mathbf{K}$  и положительно полуопределенной матрицы  $(\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})^T \mathbf{D} (\mathbf{K} - \theta^2 \mathbf{M})$  гарантированно является положительно определенной матрицей, то отсюда следует допустимость операции обращения в формулах (10.42) и (10.43).

Не следует думать, что вещественная часть  $\mathbf{X}$  вектора комплексных амплитуд  $\mathbf{Z}$  и вектор амплитуд вещественной части  $\mathbf{u}$  комплексного вектора перемещений  $\mathbf{w}$  совпадают между собой (аналогичное замечание относится и к мнимым частям тех же векторов). Действительно, из (10.35) и (10.36) находим, что

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X} + i\mathbf{Y})e^{i\theta t} = (\mathbf{X}\cos\theta t - \mathbf{Y}\sin\theta t) + i(\mathbf{Y}\cos\theta t + \mathbf{X}\sin\theta t), \quad (10.46)$$

Следовательно

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\cos\theta t - \mathbf{Y}\sin\theta t, \quad \mathbf{v} = \mathbf{Y}\cos\theta t + \mathbf{X}\sin\theta t. \quad (10.47)$$

Введем в рассмотрение вектор амплитуд  $\mathbf{A}$  и вектор фазовых сдвигов  $\boldsymbol{\mu}$ , компоненты которых определим через компоненты векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  формулами

$$A_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad \cos\mu_i = X_i/A_i, \quad \sin\mu_i = Y_i/A_i. \quad (10.48)$$

Воспользовавшись теперь известными из тригонометрии формулами для синуса и косинуса от суммы углов, получим из (10.47) и (10.48)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\theta t + \mu_1) \\ A_2 \cos(\theta t + \mu_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(\theta t + \mu_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_1 \sin(\theta t + \mu_1) \\ A_2 \sin(\theta t + \mu_2) \\ \vdots \\ A_n \sin(\theta t + \mu_n) \end{bmatrix}. \quad (10.49)$$

Таким образом, видим, что соответственные компоненты действительной и мнимой частей вектора перемещений совпадают по амплитуде и сдвинуты по отношению друг к другу по фазе на угол  $\pi/2$ .

В частности, в случае одномассовой системы (точнее, для системы с одной динамической степенью свободы, то есть при  $n = 1$ ), из формул (10.42) и (10.43) получаем

$$X = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \theta^2 / \omega^2}{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}, \quad Y = -\frac{P_0}{k} \frac{\gamma}{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}, \quad (10.50)$$

где принято во внимание, что для одномассовой системы с инерциальной характеристикой  $m$  и жесткостью системы по направлению движения массы  $k$  частота свободных колебаний  $\omega$  определяется формулой  $\omega^2 = k/m$ . Воспользовавшись теперь формулами (10.48), найдем амплитудное значение  $A$  перемещений массы

$$A = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}}, \quad (10.51)$$

совпадающее с известным решением.

Формулами (10.42), (10.43) и (10.48) полностью определяется решение задачи поиска динамических перемещений масс конструкции при установившихся колебаниях системы с конечным числом динамических степеней свободы при учете сил внутреннего трения в материале.

Отметим, что в книге Р.А.Резникова [1971] приведен алгоритм решения этой же задачи, основанный на разложении искомым перемещений и внешнего воздействия по формам собственных колебаний соответствующей идеально упругой системы, лишенной внутреннего трения, что требует значительного объема дополнительных вычислений. В самом деле, по алгоритму Р.А.Резникова требуется предварительное решение полной проблемы на собственные значения и собственные векторы для матрицы порядка  $n$ , тогда как по изложенному здесь алгоритму эта трудоемкая (и коварная) в вычислительном отношении задача замещается операцией обращения матрицы (10.44) того же порядка  $n$ .

Определением перемещений масс конструкции решение не завершается, так как далее необходимо будет найти все остальные интересующие инженера компоненты напряженно-деформированного состояния конструкции. С этой целью воспользуемся цепочкой следующих тригонометрических преобразований

$$\begin{aligned} & a \cos(\theta t + \alpha) + b \cos(\theta t + \beta) = \\ & = a(\cos\theta t \cos\alpha - \sin\theta t \sin\alpha) + b(\cos\theta t \cos\beta - \sin\theta t \sin\beta) = \\ & = (a \cos\alpha + b \cos\beta) \cos\theta t - (a \sin\alpha + b \sin\beta) \sin\theta t = c \cos(\theta t + \varphi), \quad (10.52) \end{aligned}$$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}, \quad (10.53)$$

$$\cos\varphi = (a \cos\alpha + b \cos\beta) / c, \quad \sin\varphi = (a \sin\alpha + b \sin\beta) / c. \quad (10.54)$$

Геометрически эта цепочка преобразований соответствует сложению двух векторов **a** и **b**, заданных в комплексной плоскости своими модулями *a* и *b* (амплитудными значениями) и углами сдвига фаз  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 10.4).

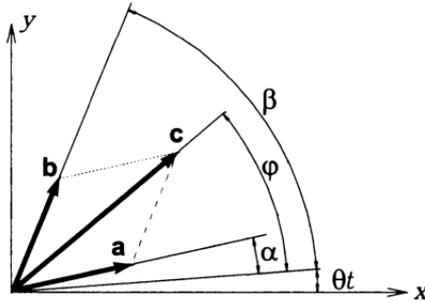


Рис. 10.4. Сложение комплексных векторов

В том случае, когда нас интересует сумма нескольких (скажем, *m*) величин, и для каждого слагаемого известно его амплитудно-фазовое представление

$$c(t) = a_1 \cos(\theta t + \alpha_1) + a_2 \cos(\theta t + \alpha_2) + \dots + a_m \cos(\theta t + \alpha_m), \quad (10.55)$$

можно, исходя из геометрической интерпретации тригонометрических преобразований (10.52) – (10.54), сразу записать выражения для амплитуды *c* и фазы  $\alpha_c$

$$c(t) = c \cos(\theta t + \alpha_c),$$

$$c = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^m a_j \cos\alpha_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^m a_j \sin\alpha_j \right)^2},$$

$$\cos\alpha_c = \left( \sum_{j=1}^m a_j \cos\alpha_j \right) / c, \quad \sin\alpha_c = \left( \sum_{j=1}^m a_j \sin\alpha_j \right) / c. \quad (10.56)$$

Предположим, что нас интересует поведение во времени некоторого кинематического или силового фактора в конструкции — это может быть перемещение выделенной точки конструкции в заданном направлении, угол поворота сечения некоторого стержня, какая-либо компонента деформации, внутренняя сила и т.п.

Обозначив интересующий нас фактор через  $H$ , представим его в следующем виде

$$H(t) = \sum_{i=1}^n H_i R_i(t) = \mathbf{H}^T \mathbf{R}(t), \quad (10.57)$$

где  $H_i$  — значение искомого фактора в конструкции от действия единичной силы  $\bar{R}_i = 1$ , приложенной в месте и по направлению  $i$ -ой динамической степени свободы системы. Компоненты вектора  $\mathbf{R}(t)$  определяются из условия порождения этим вектором, как внешней нагрузкой, перемещений масс конструкции  $\mathbf{u}$ , иначе говоря,

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{u}. \quad (10.58)$$

Воспользовавшись теперь амплитудно-фазовым представлением вектора перемещений  $\mathbf{u}$  в виде (10.49), приходим к следующей линейной комбинации

$$H(t) = a_1 \cos(\theta t + \mu_1) + a_2 \cos(\theta t + \mu_2) + \dots + a_n \cos(\theta t + \mu_n), \quad (10.59)$$

где вектор  $\mathbf{a}$  с компонентами  $a_1, \dots, a_n$  отыскивается из условия

$$\mathbf{a} = \mathbf{KH}. \quad (10.60)$$

Поскольку нас интересует амплитудно-фазовое представление фактора  $H$ , то к (10.59) применяется рассмотренное выше тригонометрическое преобразование (10.53) — (10.56). В результате получим

$$H(t) = H_0 \cos(\theta t + \mu_H). \quad (10.61)$$

Отношение амплитуды  $H_0$  к сумме амплитуд  $a_i$  составляющих компонент в формуле (10.59) называется *коэффициентом синфазности*  $\eta$  фактора  $H$ , то есть

$$\eta = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_j \cos \mu_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j \sin \mu_j\right)^2} / \sum_{j=1}^n a_j. \quad (10.62)$$

Ясно, что коэффициент синфазности всегда меньше единицы и равен единице только в случае синфазных колебаний всех масс системы, иными словами, при условии совпадения углов сдвига фаз для всех масс системы

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n. \quad (10.63)$$

Остановимся кратко на проблеме поиска напряжений, которая для рассматриваемой постановки динамической задачи имеет некоторые особенности.

Итак, любой вид внутренней силы  $S$  в элементах системы (изгибающий момент в стержне, продольная сила, цепное усилие в пластине и т.п.) определяется двумя параметрами — амплитудой  $A_s$  и фазовым сдвигом  $\mu_s$ , причем

$$S = A_s \cos(\theta t + \mu_s). \quad (10.64)$$

При вычислении динамических напряжений, являющихся линейной комбинацией двух или более силовых факторов, одних лишь амплитудных значений усилий недостаточно, поскольку эти усилия не совпадают в общем случае по фазе. Пусть, например, в сечении некоторого стержня плоской стержневой системы возникает динамический изгибающий момент  $M$  и продольная сила  $N$  так, что

$$M = M_0 \cos(\theta t + \mu_M), \quad N = N_0 \cos(\theta t + \mu_N) \quad (10.65)$$

с соответствующими амплитудными ( $M_0$ ,  $N_0$ ) и фазовыми ( $\mu_M$ ,  $\mu_N$ ) параметрами. Тогда нормальное напряжение  $\sigma$  в фибровых волокнах этого сечения определится элементарной формулой сопротивления материалов

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{N_0}{F} \cos(\theta t + \mu_N) \pm \frac{M_0}{W} \cos(\theta t + \mu_M), \quad (10.66)$$

где  $F$  и  $W$  — площадь сечения и момент сопротивления для рассматриваемого фибрового волокна.

Применение цепочки тригонометрических преобразований (10.52) — (10.54) к формуле (10.66) дает возможность записать выражение для напряжения  $\sigma$  через амплитуду  $\sigma_0$  и фазовый сдвиг  $\mu_\sigma$

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\theta t + \mu_\sigma), \quad (10.67)$$

Понятно, что амплитудное значение напряжения  $\sigma_0$  и фаза  $\mu_\sigma$  будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{\left(\frac{N_0}{F}\right)^2 + \left(\frac{M_0}{W}\right)^2 \pm 2 \frac{N_0}{F} \frac{M_0}{W} \cos(\mu_N - \mu_M)}, \\ \cos \mu_\sigma &= \left(\frac{N_0}{F} \cos \mu_N \pm \frac{M_0}{W} \cos \mu_M\right) / \sigma_0, \\ \sin \mu_\sigma &= \left(\frac{N_0}{F} \sin \mu_N \pm \frac{M_0}{W} \sin \mu_M\right) / \sigma_0. \end{aligned} \quad (10.68)$$

В общем случае, когда напряжение (нормальное  $\sigma$  или касательное  $\tau$ ) является линейной комбинацией нескольких видов усилий, то есть

$$\sigma = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots + a_m S_m, \quad S_i = S_{0i} \cos(\theta t + \mu_{Si}), \quad (10.69)$$

где  $a_i$  — некоторые константы ( $i = 1, \dots, m$ ), для определения амплитуды  $\sigma_0$  и фазы  $\mu_\sigma$  можно воспользоваться общим случаем, т.е. цепочкой преобразований (10.55) — (10.56).

Обратимся теперь к ситуации, когда интересующее нас динамическое напряжение не может быть представлено в виде линейной комбинации ранее вычисленных динамических усилий. В качестве примера можно указать на проблему поиска главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  при известных компонентах тензора напряжений в задаче о плоском напряженном состоянии. В этом и подобных этому случаях представляющее интерес для инженера динамическое напряжение является некоторой нелинейной функцией  $f(S_i)$  от динамических усилий  $S_i$ , то есть

$$\sigma = a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_m S_m, S_i = S_{0i} \cos(\theta t + \mu_{Si}), \quad (10.70)$$

В такой ситуации приемлемым общим подходом, независящим от вида нелинейной функции  $f(S_i)$ , может оказаться прямой перебор значений  $\sigma$  при дискретном изменении времени  $t$ . Поскольку все аргументы функции  $f(S_i)$  являются периодическими функциями времени  $t$  с одним и тем же периодом  $T = 2\pi/\theta$ , то и  $\sigma(t)$  оказывается периодической функцией с тем же периодом. Это дает возможность ограничиться перебором временного параметра в формуле (10.70) на интервале от нуля до  $T$ . В качестве коэффициента синфазности для напряжения  $\sigma$  в этом случае уместно принимать отношение вычисленного амплитудного значения функции  $\sigma(t)$  к значению этой же функции от амплитудных значений аргументов.

Понятно также, что привычное для инженера графическое изображение некоторого силового или кинематического фактора в виде эпюр, изолиний и т.п. служит зеркалом статического состояния конструкции. При динамических же воздействиях один и тот же силовой или кинематический фактор (скажем, в разных сечениях стержня) обладает различными фазовыми характеристиками. В силу этого обстоятельства адекватное графическое изображение этого фактора в динамике более уместно представлять с помощью анимации. Другое дело, что амплитудные значения величин рассматриваемого фактора могут быть по-прежнему изображены статически, то есть в виде тех же эпюр, изолиний и т.п., причем эти эпюры представляют собой, по сути, огибающие соответствующих анимационных картин.

Надо сказать, что для изобретательности разработчиков программного обеспечения на этом пути открывается целая гамма новых и, насколько нам известно, еще не реализованных

возможностей. Например, весьма показательны для понимания работы конструкции были бы анимационные картины, демонстрирующие совместное изменение во времени как направлений главных напряжений, так и их величин. Нет сомнения, что инженеры-расчетчики высокого уровня квалификации по достоинству оценят новшества подобного рода, повышающие привлекательную конкурентоспособность программной продукции.

Кратко коснемся важной в практическом отношении ситуации, когда конструкция неоднородна по материалу. Все, что нужно для учета неоднородности, — это заменить в уравнении (10.38) матрицу  $\gamma \mathbf{K}$  на матрицу  $\mathbf{K}_\gamma$ . Понятно, что  $\mathbf{K}_\gamma$  представляет из себя матрицу жесткости конструкции, собранную из элементов, все жесткостные характеристики которых домножены на коэффициент  $\gamma$ , свой для каждого из элементов. Дальнейшие выкладки аналогичны случаю однородной по материалу конструкции и затруднений не вызывают.

### 10.3.1. Модель Гордеевой

Все сказанное в этом разделе выше предназначено, главным образом, для разработчиков программной продукции. Что же касается непосредственно пользователей, то еще более 40 лет назад С.П. Гордеевой [1966] была предложена расчетная схема, которая, по замыслу, предназначена для получения решений рассматриваемой здесь задачи, не выходя за рамки требований стандартного программного обеспечения.

При обосновании модели Гордеевой будем исходить из системы линейных алгебраических уравнений (10.38), предварительно преобразовав эту систему к форме, удобной для дальнейших построений. Сразу же оговорим, что применение модели Гордеевой принципиально ограничено двумя требованиями

- матрица инерции  $\mathbf{M}$  должна быть диагональной;
- коэффициент неупругого сопротивления материала  $\gamma$  должен быть одинаков для всех элементов системы.

Особенно существенно последнее требование, так как оно не позволяет использовать модель Гордеевой для конструкций, имеющих в своем составе, например, железобетонные и стальные элементы.

Итак, введем в рассмотрение следующую блочно-диагональную матрицу

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (10.71)$$

Умножая обе части уравнения (10.38) слева на эту матрицу и учитывая соотношение (10.40), получим

$$\begin{bmatrix} (\theta^2 \mathbf{D} \mathbf{M} - \mathbf{I}) & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & (\theta^2 \mathbf{D} \mathbf{M} - \mathbf{I}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.72)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная квадратная матрица порядка  $n$ . Введем также в рассмотрение два новых вектора неизвестных  $\mathbf{J}_x$  и  $\mathbf{J}_y$ , положив

$$\mathbf{J}_x = \theta^2 \mathbf{M} \mathbf{X}, \quad \mathbf{J}_y = \theta^2 \mathbf{M} \mathbf{Y}. \quad (10.73)$$

Вспоминая физический смысл векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , введенные в (10.73) векторы  $\mathbf{J}_x$  и  $\mathbf{J}_y$  уместно рассматривать как вещественную и мнимую части комплексных амплитуд вектора инерционных сил.

После подстановок выражений для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  из (10.73) в уравнение (10.72) получим

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{D} - \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1}) & \gamma \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1} \\ \gamma \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1} & -(\mathbf{D} - \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.74)$$

Сформируем теперь расчетную схему, которая, собственно, и образует модель Гордеевой. Будем считать, что эта система содержит две части, которые назовем *вещественной* и *мнимой* частями модели Гордеевой. Вещественная часть полностью повторяет исходную механическую систему, колебания которой и изучаются. Мнимая часть также повторяет заданную систему, но с заменой жесткостей всех ее составляющих элементов на аналогичные элементы с жесткостными характеристиками противоположного знака.

По направлению движения каждой массы (в направлении каждой из динамических степеней свободы) введем пакет из трех пружин, как это показано на рис. 10.5, где кружком обозначен узел вещественной части модели с массой  $m_i$ , а прямоугольником — соответствующий узел мнимой части в модели Гордеевой<sup>4</sup>.

Вещественная часть приведенной системы на рис. 10.4 условно изображена сплошной линией, а мнимая часть — пунктирной. Жесткости пружин, соединяющих вещественную и мнимую части, в модели Гордеевой выбираются следующим образом

<sup>4</sup> Полагаем, что забавное созвучие между узлом Гордеевой и Гордиевым узлом не вводит читателя в заблуждение. Обойдемся без меча Александра Македонского.

$$c_{ix} = -\frac{m_i \theta^2}{1 + \gamma}, \quad c_{iy} = \frac{m_i \theta^2}{1 - \gamma}, \quad c_{i0} = \frac{m_i \theta^2}{\gamma}. \quad (10.75)$$

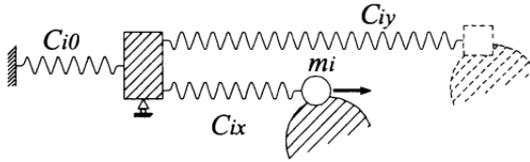


Рис. 10.4. Принцип построения расчетной модели

Если теперь формально рассчитать образованную приведенную систему на статическое воздействие внешних сил  $P_0$ , то усилия в пружинах с жесткостями  $c_{ix}$  и  $c_{iy}$  окажутся совпадающими с  $i$ -ми компонентами соответствующих векторов  $J_x$  и  $J_y$ , определяемых системой уравнений (10.74). Действительно, разрезая эти пружины и рассматривая усилия в этих пружинах в качестве неизвестных, образуем систему канонических уравнений метода сил, которая полностью совпадает с системой уравнений (10.74).

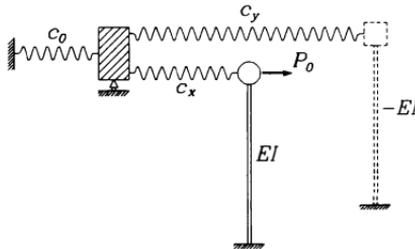


Рис. 10.6. Модель Гордеевой

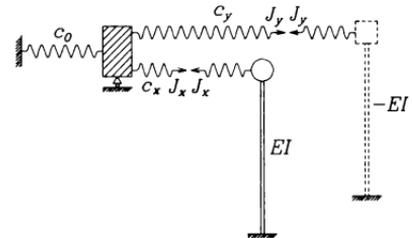


Рис. 10.7. Неизвестные усилия

Для того, чтобы проиллюстрировать применение модели Гордеевой, рассмотрим в качестве примера консольную стойку с сосредоточенной массой  $m$ , размещенной на свободном конце консоли, под действием гармонической нагрузки  $P(t) = P_0 \cos \theta t$  (рис. 10.6).

Пусть  $EI$  — жесткость стойки при изгибе,  $l$  — высота стойки. Следуя модели Гордеевой, приведенную расчетную схему при использовании произвольной программы, предназначенной для статического расчета, следует выбирать так, как это показано на рис. 10.6.

Воспользуемся методом сил, выбрав основную систему с помощью введения разрезов в пружинах 1 и 2 и обозначив  $J_x$  и  $J_y$  соответствующие неизвестные усилия в пружинах (рис. 10.7)<sup>5</sup>.

Вводя обозначения

$$k = 3EI / l^3, \quad \omega^2 = k / m, \quad p = \theta^2 / \omega^2, \quad (10.76)$$

выпишем выражения для коэффициентов и свободных членов в системе канонических уравнений метода сил

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{c_x} + \frac{1}{c_0} = \frac{1}{k} - \frac{1}{m\theta^2} = -\frac{1-p}{kp}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{c_0} = \frac{\gamma}{kp}, \\ \delta_{22} &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{c_y} + \frac{1}{c_0} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{m\theta^2} = \frac{1-p}{kp}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{P_0}{k}, \quad \Delta_{2P} = 0, \end{aligned} \quad (10.77)$$

$$\delta_{11}J_x + \delta_{12}J_y + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}J_x + \delta_{22}J_y + \Delta_{2P} = 0. \quad (10.78)$$

Раскрывая решение системы уравнений (10.78) по правилу Крамера, получаем

$$J_x = \frac{\Delta_{1P}\delta_{22} - \Delta_{2P}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \quad J_y = \frac{\Delta_{2P}\delta_{11} - \Delta_{1P}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \quad (10.79)$$

что после подстановок по формулам (10.77) и элементарных преобразований дает

$$J_x = \frac{P_0}{k} \frac{kp(1-p)}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad J_y = -\frac{P_0}{k} \frac{k\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}. \quad (10.80)$$

Перемещения  $X$  и  $Y$ , отвечающие действительной и мнимым частям решения исходной задачи по модели Гордеевой, определяются на основании формул (10.73), которые в данном случае примут вид

$$X = \frac{J_x}{kp} = \frac{P_0}{k} \frac{1-p}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad Y = \frac{J_y}{kp} = -\frac{P_0}{k} \frac{\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad (10.81)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с ранее полученным решением — формулами (10.50).

Обратим внимание на то обстоятельство, что перемещения вещественной и мнимой частей модели Гордеевой не совпадают с вещественной и мнимыми частями векторов перемещений исходной

<sup>5</sup> Мы отступаем от общепринятых обозначений для неизвестных метода сил только для того, чтобы избежать путаницы, так как буква  $X$  в этом параграфе уже использована нами для обозначения вещественной части комплексных амплитуд  $Z$ . Что касается обозначений Гордеевой, то она для величин  $J_x$  и  $J_y$  использует соответственно символы  $Z'$  и  $Z''$ .

колеблющейся системы, как это может показаться на первый взгляд. В самом деле, например в задаче о консольной стойке перемещение  $X_\Gamma$  вершины стойки для вещественной и  $Y_\Gamma$  мнимой частей модели Гордеевой равняются соответственно

$$X_\Gamma = (P_0 - J_x) / k = \frac{P_0}{k} \frac{(1-p)(1-2p) + \gamma^2}{(1-p)^2 + \gamma^2},$$

$$Y_\Gamma = J_y / k = -\frac{P_0}{k} \frac{p\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad (10.82)$$

что отличается от соответствующих величин  $X$  и  $Y$ .

В этой связи рекомендация Гордеевой по определению амплитуд динамических усилий по формуле

$$S = \sqrt{(S')^2 + (S'')^2}, \quad (10.83)$$

где  $S'$  и  $S''$  — соответствующие усилия в вещественной и мнимой частях модели Гордеевой, является ошибочной. Кроме того, для системы с несколькими динамическими степенями свободы амплитудные значения усилий, как это было здесь показано, зависят не только от амплитудных значений перемещений масс, но и от их взаимных фазовых сдвигов.

Само собой разумеется, что модель Гордеевой уместно применять только тогда, когда в распоряжении пользователя не имеется программного обеспечения, предназначенного для прямого расчета конструкций на вынужденные колебания с учетом потерь энергии в материале по гипотезе Сорокина.

## 10.4. Декремент колебаний

Логарифмический декремент колебаний характеризует процесс затухания колебаний в системе. Он равен натуральному логарифму отношения амплитудных значений колеблющейся величины, измеренных с интервалом в один период. Для простейшего осциллятора с массой  $M$ , коэффициентом упругости  $K$  и коэффициентом вязкого сопротивления  $C$  дифференциальное уравнения свободного движения

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = 0 \quad (10.84)$$

имеет решение в виде колебательного процесса

$$y = A_0 e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t + \mu) \quad (10.85)$$

с амплитудой (произвольная постоянная)  $A_0$  и сдвигом по фазе (произвольная постоянная)  $\mu$ , если только демпфирование меньше критического значения

$$C \leq C_0 = 2\sqrt{KM}.$$

Здесь обозначено

$$\omega^2 = K/M; \quad 2\beta = C/M; \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}.$$

Периодом колебаний условно будем называть время  $T = 2\pi/\bar{\omega}$ , а безразмерное произведение  $\delta = \beta T$  является логарифмическим декрементом колебаний и соответствует его определению, приведенному выше.

Рассмотрим, как изменяется суммарная энергия системы  $E$  в процессе затухающих колебаний. Эта энергия равна сумме потенциальной энергии пружины и кинетической энергии движущейся массы

$$E = \frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2. \quad (10.86)$$

Подставляя сюда данные формулы (10.84), получим

$$E = \frac{1}{2}KA_0^2 e^{-2\beta t} \left( 1 + \frac{\beta\bar{\omega}}{\omega^2} \sin(2\bar{\omega}t + 2\mu) + \frac{\beta^2}{\omega^2} - 2\frac{\beta^2}{\omega^2} \sin^2(\bar{\omega}t + 2\mu) \right). \quad (10.87)$$

Нетрудно проверить, что отношение энергий рассматриваемой системы  $E_0$  — в момент времени  $t = t_0$  и  $E_T$  — в момент времени  $t = t_0 + T$  (по истечении одного периода колебаний) не зависит от момента  $t_0$  и выражается формулой

$$\frac{E_T}{E_0} = e^{-2\beta T} = e^{-2\delta}. \quad (10.88)$$

Отсюда следует, что логарифмический декремент колебаний достаточно просто выражается и через энергию

$$\delta = -\frac{1}{2} \ln \frac{E_T}{E_0}. \quad (10.89)$$

Если на осциллятор действует внешняя периодическая нагрузка

$$F = F_0 \cos \theta t = f_0 M \cos \theta t, \quad (10.90)$$

то решение, соответствующее установившимся колебаниям, может быть представлено в виде

$$y = A \cos(\theta t - \alpha), \quad (10.91)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}}, \quad (10.92)$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\theta\beta}{\omega^2 - \theta^2}. \quad (10.93)$$

Решение (10.91) может быть представлено и в другом виде

$$y = A_s \sin(\theta t) + A_c \cos(\theta t), \quad (10.94)$$

где

$$A_s = \frac{2\beta\theta f_0}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}, \quad (10.95)$$

$$A_c = \frac{(\omega^2 - \theta^2) f_0}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.96)$$

Постоянная  $A_s$  называется амплитудой поглощения, а постоянная  $A_c$  - амплитудой дисперсии.

Энергию, которая поглощается системой за один цикл колебаний, можно вычислить по формуле

$$E_s = \pi F_0 A_s = \frac{2\pi M\beta\theta f_0^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.97)$$

Максимальное значение потенциальной энергии системы

$$E_y = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \frac{M\theta^2 f_0^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.98)$$

Нетрудно проверить, что логарифмический декремент в случае установившихся вынужденных колебаний выражается через отношение энергий по формуле

$$\delta = \frac{E_s}{2E_y}. \quad (10.99)$$

Отношение  $\psi = E_s / E_y$  часто называют *коэффициентом поглощения*. Ясно, что  $\delta = \psi / 2$ .

Как видно из приведенных классических примеров, логарифмический декремент колебаний достаточно просто выражается через энергию, которая поглощается системой за один цикл колебаний, и потенциальную энергию системы. Более чистый

результат получается в случае установившихся вынужденных колебаний.

Используя выражения для энергии, можно попытаться построить алгоритм отыскания системы с обычным вязким трением, энергетически эквивалентной реальной системе, у которой механизм демпфирования может быть и не в виде вязкого трения, и более того, различным для разных частей системы (узлов, подсистем), поскольку в реальных сооружениях эти свойства могут различаться на порядки.

Идея такого построения заключается в следующем. Предположим, что исследуемая конечно-элементная система с  $n$  степенями свободы находится в состоянии установившихся вынужденных колебаний относительно заданной, не обязательно нулевой, равновесной формы, причем частота колебаний  $\theta$ , форма и размах колебаний известны (заданы). В этом случае мы фактически переходим к системе с одной степенью свободы. Лучше, если частота и форма колебаний — собственные, но это не обязательно.

Пусть произвольное деформированное состояние системы характеризуется вектором перемещений  $[[u_1, \dots, u_n]]^T$ , равновесная форма, относительно которой происходят колебания, — вектором  $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$ , а относительные амплитудные значения перемещений по рассматриваемой форме колебаний — вектором  $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$ . Тогда деформированное состояние системы в момент времени  $t$  можно выразить формулой

$$u_k = u_k^0 + a_k^0 \cos(\theta t) \quad (k=1, \dots, n). \quad (10.100)$$

Если мы сумеем определить потери энергии  $E_s$  в системе за один цикл колебаний и упругую энергию системы в максимально отклоненном состоянии  $E_y$ , то по формуле (10.99) легко найдем искомый логарифмический декремент колебаний  $\delta$ .

Понятно, что упругая энергия накапливается только в конечных элементах. Будем считать, что и потеря энергии происходит только в конечных элементах. Если это не так, можно пополнить систему элементами специального вида (демпферами), не обладающими упругостью, а выполняющими лишь диссипативные функции, и добиться, чтобы такое утверждение было справедливо. В таком случае можно определить  $E_s$  и  $E_y$  для каждого конечного элемента в отдельности, и результаты сложить.

По поводу упругой энергии все обстоит достаточно просто. По каждому элементу надо воспользоваться формулой для выражения потенциальной энергии элемента через перемещения его узлов (такие формулы выписываются при разработке конечного элемента) и

вычислить по ней потенциальную энергию элемента при перемещениях узлов  $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$ . После суммирования результатов вычислений по всем элементам получим упругий потенциал  $E_y$  для всей системы.

Следует отметить, что при определении упругого потенциала мы пользуемся амплитудными значениями формы колебаний  $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$  и никак не учитываем состояние, характеризуемое смещениями  $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$ , в окрестности которого и происходят колебания. Мы так поступаем потому, что при смещениях  $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$  по предположению выполняются условия равновесия, то есть в данной точке все частные производные от потенциальной энергии по перемещениям  $u_1, \dots, u_n$  равны нулю. Значение потенциальной энергии в этой точке также считаем нулевым.

Иное дело — потери энергии в элементе за цикл колебаний. Для получения количественных данных надо изучить отдельно диссипативные свойства каждого типа элемента. Будем считать, что конечный элемент привязан к собственной системе координат, характеризуется  $m$  перемещениями  $v_1, \dots, v_m$ , и имеет матрицу жесткости с элементами  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ). Переход от перемещений исследуемой системы  $u_1, \dots, u_n$  к перемещениям конечного элемента в местной системе координат  $v_1, \dots, v_m$  выполняется с помощью линейных преобразований по формулам

$$v_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.101)$$

с известными коэффициентами линейных зависимостей  $c_{ij}$  ( $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$ ).

Рассмотрим теперь простейшие типы элементов, которые чаще всего присутствуют в расчетных моделях.

#### 10.4.1. Конечные элементы из упругого материала

За неимением более обоснованных зависимостей, будем считать, следуя идеологии СНиП 2.01.07-85, что каждый материал характеризуется своим коэффициентом поглощения  $\psi$ , не зависящим ни от вида, ни от скорости, ни от интенсивности деформирования. Такой подход может быть применен для материальных конечных элементов, широко используемых в конечно-элементных

вычислительных комплексах, и пригоден, если напряжения не превосходят расчетного сопротивления,

В этом случае энергия, рассеиваемая в материале, выражается формулой

$$E_s = \frac{\Psi}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m s_{ij} b_i^0 b_j^0, \quad (10.102)$$

где величины

$$b_i^0 = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_j^0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.103)$$

представляют собой амплитудные значения перемещений в местной системе координат.

Коэффициенты поглощения  $\psi$  определяются опытным путем, их значения приведены в справочной литературе.

### 10.4.2. Элемент сухого трения

Рассматриваемый элемент представляет собой ползун, прижатый к шероховатому основанию так, что сила трения при его проскальзывании равна  $F$  (рис. 10.8). Элемент имеет одну степень свободы - перемещение  $v$ .

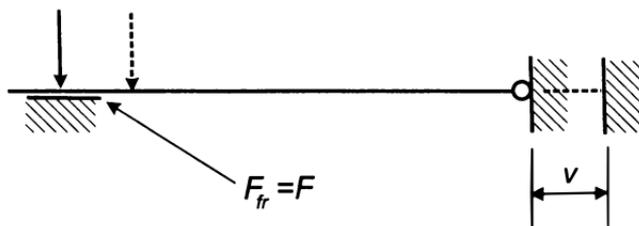


Рис. 10.8. Элемент сухого трения

Если закрепленный конец ползуна колеблется с амплитудой  $b^0$ , потеря энергии за один цикл определится формулой

$$E_s = 4b^0 F. \quad (10.104)$$

### 10.4.3. Элемент вязкого трения

По аналогии с элементом сухого трения рассмотрим элемент вязкого трения. Конструктивно такой элемент может быть выполнен в виде

цилиндра с жидкостью, в котором перемещается перфорированный или неплотно прилегающий поршень (рис. 10.9).

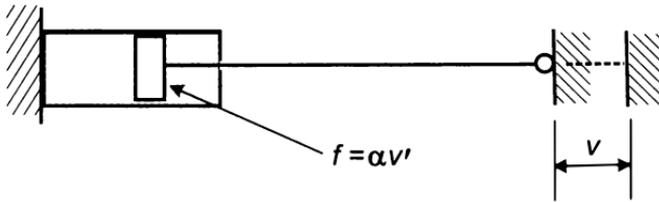


Рис. 10.9. Элемент вязкого трения

Элемент имеет одну степень свободы — перемещение  $v$ , а сила вязкого трения  $f$  в таком устройстве пропорциональна скорости перемещения поршня  $v'$  и выражается формулой  $f = \alpha v'$ , где  $\alpha$  — заданный коэффициент пропорциональности.

Если поршень перемещается по закону

$$v = b^0 \cos(\theta t), \quad (10.105)$$

то сила трения выражается как

$$f = -\alpha \theta b^0 \sin(\theta t) \quad (10.106)$$

и за один цикл колебаний рассеивается энергия

$$E_s = \pi \alpha \theta (b^0)^2. \quad (10.107)$$

#### 10.4.4. Элемент нелинейно-вязкого трения

В книге Я.Г. Пановко [1980] приведено решение задачи об определении эквивалентного коэффициента линейного вязкого сопротивления  $C_{eqv}$  для элемента у которого сила вязкого трения определяется выражением

$$F_d = C_n \text{sign}(\dot{y}) \dot{y}^n. \quad (10.108)$$

Результаты этого анализа могут быть представлены в виде табл. 10.2 [Spence, Kenchington. 1993], где приведены также данные о диссипации энергии за цикл колебаний, совершаемых по закону  $y = y_{\max} \cos(\theta t - \alpha)$ .

Таблица 10.2.

Тип сопротивления	$n$	Диссипация энергии за цикл $E_s$	Коэффициент эквивалентного вязкого сопротивления $C_{eqv}$
Сухое трение	0	$4C_0 y_{max}$	$\frac{4}{\pi} \frac{C_0}{\theta y_{max}}$
Вязкое трение	1	$\pi C_1 \theta y_{max}^2$	$C_1$
Квадратичное	2	$\frac{8}{3} C_2 \theta^2 y_{max}^3$	$\frac{8}{3\pi} \theta y_{max}$
Кубическое	3	$\frac{8}{3} \pi C_3 \theta^3 y_{max}^4$	$\frac{3}{4} (\theta y_{max})^2$

### 10.4.5. Демпфирование излучением

Вероятно один из главных механизмов демпфирования конструкций связан с излучением энергии в окружающую среду. Если, например, пластина вибрирует в жидкости, то возникают исходящие от нее волны, приводящие в движение большое количество жидкости. Энергия, переданная от конструкции к жидкости (более обще — окружающей среде), теряется конструкцией, а ее значение за цикл колебаний определяется как

$$E = \pi \theta \rho C r^2, \quad (10.109)$$

где  $\rho$  — плотность среды, в которой возникают волны,  $C$  — скорость звука в этой среде и  $r$  — амплитуда вибрации. Энергия, рассеянная за цикл оказывается такой же, как и для вязкого трения с коэффициентом демпфирования  $B = \rho C$  в области единичного размера. Это называется характеристикой динамической жесткости (импеданса) среды.

Даже для среды низкой плотности типа воздуха, это дает очень существенный вклад в демпфирование в пределах конструкции. Если конструкция окружена более плотной средой типа воды, тогда демпфирование излучением более существенно. Если конструкция опирается на твердое основание, то демпфирование излучением в это основание может давать относительно высокое значение в точках опирания. В гражданском строительстве это может быть главным компонентом демпфирования. Чтобы проиллюстрировать важность этого, недемпфированная модель конструкции была рассчитана [Wilson, [www.csibercli.com](http://www.csibercli.com)] с учетом демпфирования излучением в основание, что дало величину порядка 10% от критического

демпфирования. Вторым примером была оценка значения демпфирования для опор моста в русле реки и проверка различных моделей демпфирования. Оценки включали демпфирование излучением в основание, демпфирование в материале опор и сопротивление воды в русле реки. Единственным механизмом, который дал реалистическое представление измеренного значения демпфирования, было демпфирование излучением. Все другие механизмы дали оценки демпфирования, на порядок меньшие.

Для определения коэффициентов демпфирования естественных оснований под колеблющимся фундаментом можно воспользоваться приближенными формулами, которые связывают эти характеристики с коэффициентом жесткости основания  $C_z$

- $B_z = 0,014F \sqrt{C_z}$  — для вертикальных перемещений (осадок);
- $B_x = 0,007F \sqrt{C_z}$  — для горизонтальных перемещений (сдвигов);
- $B_\varphi = 0,01J \sqrt{C_z}$  — для поворотов.

Здесь  $F$  — площадь подошвы фундамента и  $J$  — момент инерции этой площади.

Несколько другие рекомендации приводит Вильсон [Wilson, [www.csibercli.com](http://www.csibercli.com)]. На основании решения задачи о колебаниях круглого штампа на упругом полупространстве он предлагает использовать данные, представленные в таблице 10.3. Эта таблица также содержит данные о величине присоединенной массы и жесткости основания.

Таблица 10.3.

Направление колебаний	Жесткость	Демпфирование	Присоединенная масса
Вертикальное	$K = \frac{4Gr}{1-\nu}$	$1,79\sqrt{Kpr^3}$	$1,50pr^3$
Горизонтальное	$18,2Gr \frac{1-\nu^2}{(2-\nu)^2}$	$1,08\sqrt{Kpr^3}$	$0,28pr^3$
Поворот	$2,7Gr^3$	$0,47\sqrt{Kpr^3}$	$0,28pr^3$

Обозначения:  $r$  — радиус штампа;  $G$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность

## 10.5. Три резонансные кривые

Большинство инженеров осведомлены о резонансном режиме колебаний, когда совпадение частоты внешнего воздействия с частотой собственных колебаний приводит к резкому нарастанию амплитуд. Для идеальной системы без потерь энергии резонанс определяет неограниченный рост амплитуд, но и для реальной системы этот рост может быть очень большим. Поэтому понятно стремление избежать резонанса, создав такую систему, собственная частота которой не совпадает с частотой возмущающей силы.

Но насколько она должна не совпадать? Что выгоднее: чтобы собственная частота была больше или меньше частоты возмущения? Ответ на эти вопросы дает анализ так называемых резонансных кривых.

Если рассмотреть простейшую систему с одной степенью свободы, то уравнение типа (3.149) будет иметь вид

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = F(t) \quad (10.110)$$

или в другой форме

$$\ddot{y} + 2\omega\zeta \dot{y} + \omega^2 y = F/M, \quad (10.111)$$

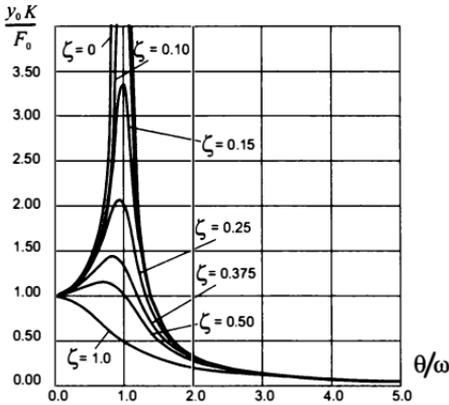
где:

- $\omega = \sqrt{K/M}$  – частота собственных колебаний недемпфированной системы;
- $Z = C/C_{cr}$  – относительное демпфирование;
- $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$  – критическое демпфирование, т. е. такое значение коэффициента  $C$ , начиная с которого выведенная из состояния равновесия система возвращается к этому состоянию без осцилляций;
- $\bar{\omega} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$  – собственная частота демпфированных колебаний.

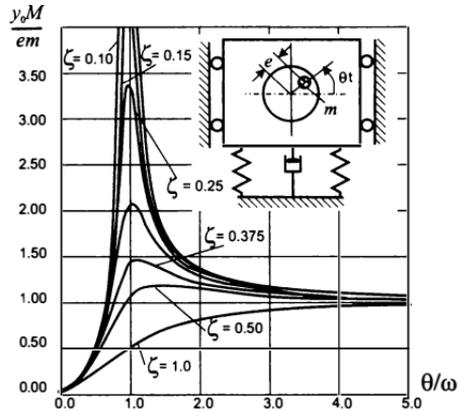
Под воздействием гармонической возмущающей силы  $F = F_0 \sin \theta t$  система совершает гармонические колебания  $y = y_0 \sin(\theta t - \varphi)$ , безразмерная амплитуда которых зависит от отношения частот  $\theta/\omega$  и определяется выражением

$$\frac{y_0 K}{F_0} = \left[ \left( 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (10.112)$$

Эта амплитуда имеет максимальное значение при  $\theta/\omega = \sqrt{1-2\zeta^2}$ , когда  $y_0 K / F_0 = \left[2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right]^{-1}$ , график изменения безразмерной амплитуды в функции от отношения  $\theta/\omega$  представлен на рис. 10.10.



**Рис. 10.10.** Резонансная кривая при силовом гармоническом возбуждении



**Рис. 10.11.** Резонансная кривая при возбуждении неуравновешенной массой

Полезно обратить внимание на то, что с точки зрения уменьшения амплитуд колебаний более выгодным является увеличение частоты собственных колебаний по сравнению с частотой возмущения, поскольку область  $\theta/\omega > 1$  характеризуется меньшими значениями амплитуд.

Специальный случай возбуждения представлен на рис. 10.11, где колебания вызываются несбалансированной массой  $m$ , которая имеет эксцентриситет  $e$  и вращается с угловой скоростью  $\theta$ . Возмущающая сила при этом определяется как  $p = em\theta^2 \sin \theta t$ , а безразмерная амплитуда

$$\frac{y_0 M}{em} = (\theta/\omega)^2 \left[ \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\theta}{\omega}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (10.113)$$

имеет максимальное значение  $y_0 M / (em) = (1-2\zeta^2) / (2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$ . График этой функции показан на рис. 10.11, из которого видно, что в указанном случае рекомендация по уходу от резонанса имеет прямо противоположный характер.

Наконец, можно рассмотреть еще один случай гармонического возбуждения, когда по закону  $z = z_0 \sin \theta t$  движется основание. Безразмерная амплитуда перемещений определяется выражением

$$\frac{y_0}{z_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\theta/\omega)^2}{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2}}. \quad (10.114)$$

График этой функции показан на рис. 10.12. Он напоминает график на рис. 10.10, но здесь все кривые проходят через точку с абсциссой  $\theta/\omega = \sqrt{2}$ .

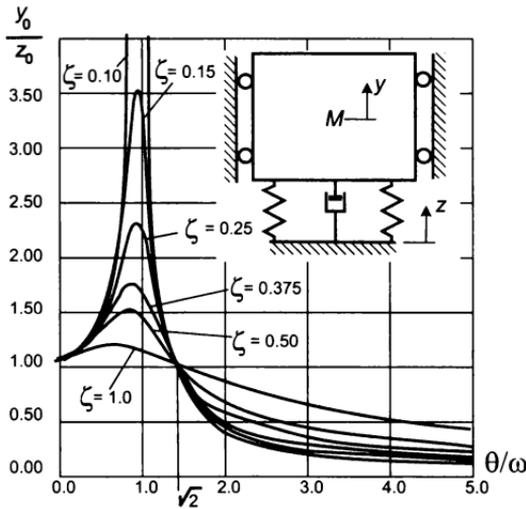


Рис. 10.12. Резонансная кривая при гармоническом возбуждении основания

Схема по рис. 10.12 применяется в системах виброизоляции и отношение  $y_0/z_0$  в некотором смысле характеризует качество виброизоляции, которая, как видно из графика, является эффективной лишь при частотах  $\theta/\omega > \sqrt{2}$ , при этом наличие в ней затухания, вообще говоря, является нежелательным, поскольку с ростом  $\zeta$  отношение  $y_0/z_0$  начинает увеличиваться.

Следует заметить, что усилие в упругой связи определяется относительным перемещением  $d = y - z$ , для которого безразмерная амплитуда равна

$$\frac{d_0}{z_0} = (\theta/\omega)^2 \left[ \left( 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (10.115)$$

Ее график такой же, как показан на рис. 10.11.

## 10.6. Расчет сооружений на сейсмические воздействия

Сейсмические воздействия принадлежат к числу самых опасных и именно землетрясения уносят наибольшее число человеческих жизней. С другой стороны расчет на воздействие землетрясений является одним из наиболее условных в ряду расчетов строительных конструкций и эта условность может быть допущена только потому, что в нормах проектирования предусмотрены многочисленные эмпирические поправки к результатам расчета. Поэтому изложение мы будем вести в стиле описания нормативной методики (с имеющимися обоснованиями такой методики и некоторыми комментариями).



Рис. 10.13. Возникновение инерционных сил

То, что обычно называют сейсмической нагрузкой, нагрузкой в строгом смысле этого слова не является. Сооружение подвергается воздействию колебательных движений основания, возникающих при землетрясении, и при движении сооружения, вызванном этим кинематическим возбуждением, возникают инерционные силы,

которые и принято называть сейсмическими нагрузками<sup>6</sup>. Схематическая иллюстрация механизма возникновения этих сил представлена на рис. 10.13.

Следовательно, сейсмическая нагрузка неотделима от динамических свойств сооружения и представляет собой не воздействие землетрясения, а результат взаимодействия землетрясения и сооружения. Именно поэтому нельзя описать сейсмическую нагрузку, не затрагивая методики динамического расчета.

### 10.6.1. Спектральный метод расчета

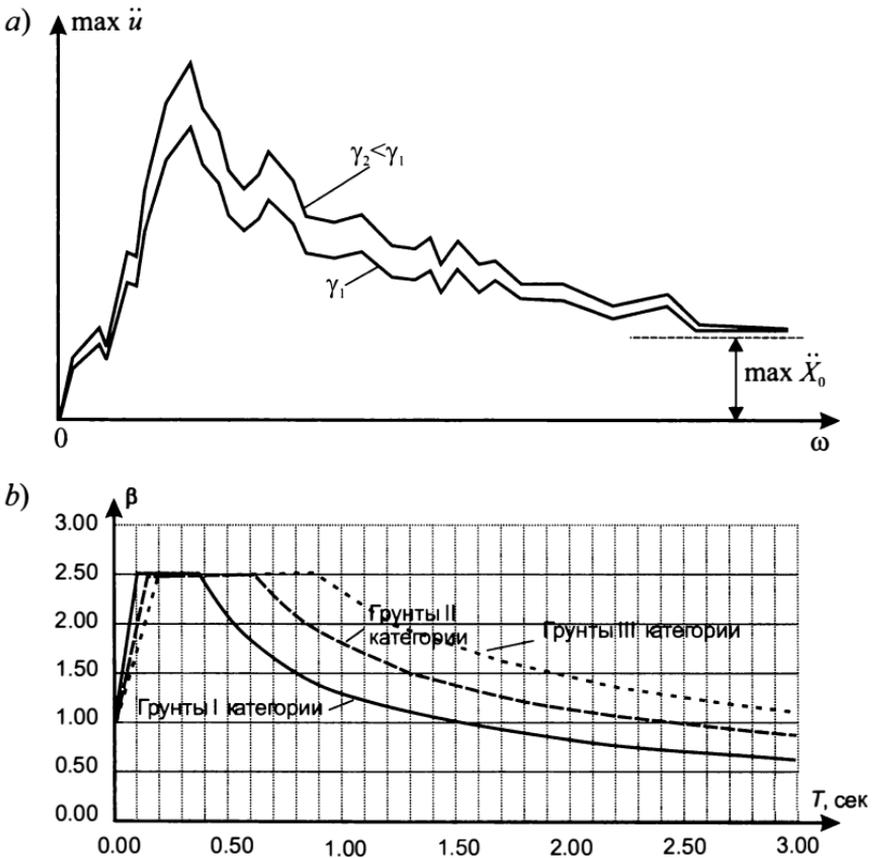
Практические расчеты на действие сейсмических сил регламентируются нормативными документами, в основу которых, как правило, положена так называемая линейно-спектральная теория М. Био. В первоначальном виде основу метода составляли замеренные экспериментально ускорения маятников, обладавших различными частотами собственных колебаний, под действием землетрясения. Полученные под воздействием перемещений основания по закону, отвечающему реальным землетрясениям, максимальные значения таких ускорений представляются в функции частоты собственных колебаний маятника (пробного осциллятора) и образуют *спектр ускорений*, который служит основой для определения сейсмической нагрузки (рис. 10.14.а).

Совершенно ясно, что реакции осцилляторов с различными круговыми частотами  $\omega$  и различными параметрами демпфирования  $\gamma$  на возмущение одной и той же акселерограммой будут различными. Общий характер этих зависимостей виден из рис. 10.14,а. В частности, при частоте  $\omega = 0$  ускорения осциллятора  $\ddot{y}$  обращаются в нуль (абсолютно податливый осциллятор не реагирует на смещение точки подвеса), а при значительном увеличении  $\omega$  (обычно при  $\omega > 33$  Гц) ускорение массы осциллятора стремится к величине ускорения основания  $\ddot{x}_0$  независимо от значения  $\gamma$ , т.е. осциллятор ведет себя как абсолютно твердое тело.

В основу методики расчета положены так называемые расчетные спектры, которые определяются путем статистической обработки ряда спектров реакций различных реальных землетрясений. Такие

<sup>6</sup> Следует отметить, что чаще всего используются не значения фактически действующих инерционных сил, а их оценки.

спектры использованы в отечественных нормах проектирования для сейсмических районов (см., например, СТО 36554501-016-2009), где они приводятся в форме *спектрального коэффициента динамичности*  $\beta$  (рис. 10.14, *b*), которые являются отношениями ускорений осциллятора к ускорению основания. Отличие кривой  $\beta$  от графика спектра ускорений состоит в том, что традиционно график  $\beta$  представляется в функции от периода собственных колебаний, а не от частоты.



**Рис. 10.14.** Спектры ускорений (а) и спектральные коэффициенты динамичности (б):

Кроме того, обычно используют предположение о поведении основания сооружения как единого жесткого тела (к сожалению, без явного указания на эту гипотезу), предполагая, что все опорные точки конструкции движутся поступательно по одинаковому закону  $x_0 = x_0(t)$ .

Тогда, помня о том, что перемещения системы отсчитываются от положения точки основания, а инерционные силы определяются не

относительным, а абсолютным ускорением, будем иметь следующие условия динамического равновесия:

$$\mathbf{M} \frac{d^2(\mathbf{u} + \mathbf{J}x_0)}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}. \quad (10.116)$$

В уравнении (10.116) обозначено:

- $\mathbf{u}$  вектор перемещений, отвечающий динамическим степеням свободы системы;
- $\mathbf{M}$  – матрица масс;
- $\mathbf{B}$  – матрица демпфирования;
- $\mathbf{K}$  – матрица жесткостей;
- $\mathbf{J}$  – вектор перемещений масс системы, отвечающий жесткому смещению системы при одновременном смещении всех точек основания на единицу в заданном направлении движения.

После перенесения заданного ускорения основания в правую часть из (10.116) получим

$$\mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{J} \frac{d^2x_0}{dt^2}. \quad (10.117)$$

В случае *линейной* системы можно решать систему уравнений (10.117) способом разложения по формам собственных колебаний, разыскивая решение в форме

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{q}(t), \quad (10.118)$$

где  $\mathbf{q}(t)$  — вектор неизвестных пока нормальных координат, которые являются функциями времени, а не пространственного положения точки. Их изменение по пространству целиком определяется видом форм собственных колебаний, которые представлены столбцами матрицы  $\mathbf{\Phi}$ . Матрица  $\mathbf{\Phi}$  удовлетворяет условиям ортогональности

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ \mu_j & (j = k) \end{cases}; \quad \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ \omega_j^2 \mu_j & (j = k) \end{cases}, \quad (10.119)$$

где  $\omega_j$  — частота собственных колебаний системы по  $j$ -й форме.

Подстановка (10.118) в (10.117) и умножение слева на матрицу  $\mathbf{\Phi}^T$  дает

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B} \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t) = -\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \ddot{x}_0. \quad (10.120)$$

Если предположить (случай пропорционального демпфирования), что матрица диссипации  $\mathbf{B}$  представима в виде линейной комбинации матрицы масс и матрицы жесткостей

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}. \quad (10.121)$$

то система уравнений распадается на отдельные уравнения вида<sup>7</sup>

$$\mu_j \ddot{q}(t) + 2\zeta_j \omega_j \mu_j \dot{q}(t) + \omega_j^2 \mu_j q(t) = -\ddot{Y}_j(t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (10.122)$$

где параметр  $\zeta_j$  определяется равенством

$$\zeta_j = \frac{\alpha + \beta\omega_j^2}{2\omega_j},$$

а под  $\ddot{Y}_j(t)$  понимается  $j$ -ая компонента вектора  $\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}}_0(t)$ . После деления (10.122) на  $\mu_j$  можем записать

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta_j \omega_j \dot{q}(t) + \omega_j^2 q(t) = -\Gamma_j \ddot{x}_0(t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (10.123)$$

Величина  $\Gamma_j$  называется коэффициентом участия, она показывает какой вклад вносит  $j$ -я форма собственных колебаний в общий отклик системы. Уравнение (10.123) является уравнением колебаний одномассовой системы с собственной частотой  $\omega_j$  и коэффициентом неупругого сопротивления  $\xi_j$ , решение которого легко получить для любого заданного воздействия при фиксированном значении сопротивления  $\xi_j$  и заданной собственной частоте  $\omega_j$  (периоде собственных колебаний  $T_j = 2\pi / \omega_j$ ).

Можно выполнить такие расчеты для систем с различными периодами собственных колебаний  $T_j$  и для каждого такого решения найти максимальное значение ускорения. Откладывая это значение на плоскость  $\ddot{u} - T$  (рис. 10.15), получим зависимость значений максимального ускорения от периода собственных колебаний системы  $T$ , совокупность которых образует *спектр ускорений*  $S_a(T)$ .

При этом максимальное ускорение  $i$ -й точки системы по  $j$ -й форме собственных колебаний можно представить в виде

<sup>7</sup> Даже в тех случаях, когда предположение о пропорциональном демпфировании несправедливо, уравнение (10.122) можно рассматривать как приближенное, полученное путем удержания в матрице  $\Phi^T \mathbf{B} \Phi$  только диагональных членов. Это приближение выполняется с хорошей точностью для сооружений, у которых коэффициент неупругого сопротивления для всех элементов не превышает 0,3 [Уздин и др., 1993].

$$\ddot{u}_j^{(\max)} = x_{kj} \tilde{\beta}_j A g, \quad (10.125)$$

где через  $Ag$  представлено расчетное пиковое значение ускорения основания, а через  $\tilde{\beta}_j$  – приведенный спектральный коэффициент динамичности  $\tilde{\beta}_j = S_a(T_j)/S_a(0)$ , который соответствует единичному значению пикового ускорения основания. Для районов с расчетной сейсмичностью 7, 8 и 9 баллов множитель  $A$  соответственно принимается равным 0,1; 0,2 и 0,4.

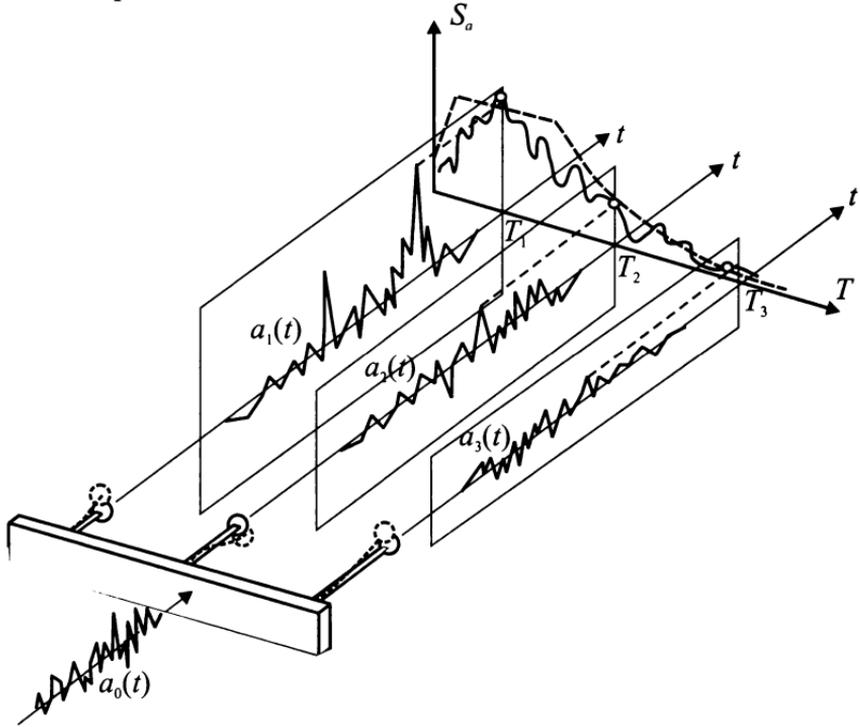


Рис. 10.15. К построению кривой коэффициентов динамичности

Выполняя такие построения не для одного конкретного воздействия, а для серии из  $k$  расчетных акселерограмм, можно от зависимости  $\tilde{\beta}_i(T)$  ( $i=1, \dots, k$ ) перейти к огибающей кривой  $\tilde{\beta}(T)$ . Такие огибающие строились многими исследователями при различных значениях параметра затухания  $\zeta_j$ , и было показано, что зависимость  $\beta(T, \gamma)$  можно представить как

$$\beta(T, \zeta) = \tilde{\beta}(T, \zeta_s) K_\psi. \quad (10.126)$$

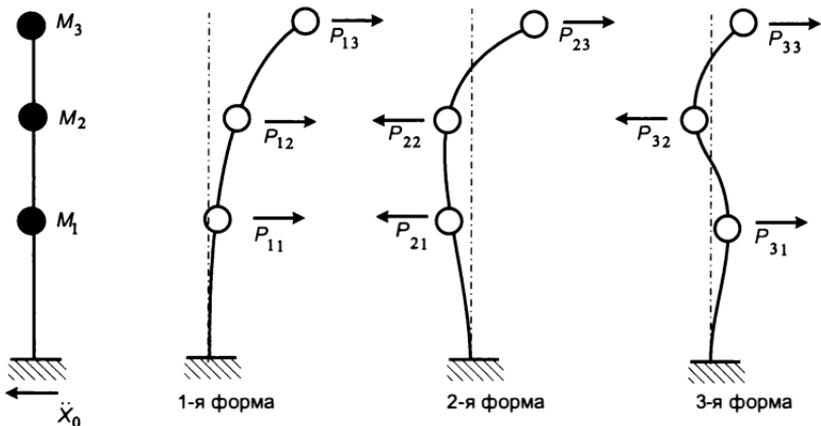
Здесь  $\zeta_s$  — эталонное значение, принимаемое равным 0,1; 0,16 и 0,22 для грунтов I, II и III категорий соответственно, а множитель  $K_\psi$  позволяет осуществить переход от эталонного значения параметра затухания к фактическому, свойственному площадке строительства [Уздин и др., 1993],

Окончательно инерционные нагрузки (сейсмические воздействия) при колебаниях сооружения по  $j$ -й форме (рис. 10.16) получаются при умножении ускорений на массы:

$$s_{kj} = Agm_k \beta(T_j) K_\psi \eta_{kj}, \quad (10.127)$$

где  $\eta_{kj}$  — коэффициент формы, вычисляемый по формуле

$$\eta_{kj} = \Gamma_j \varphi_{kj} = \frac{\varphi_{kj} \sum_{i=1}^n m_i \varphi_{ij}}{\sum_{s=1}^n m_s \varphi_{sj}} \quad (10.128)$$



**Рис. 10.16.** Инерционные сейсмические нагрузки, отвечающие различным формам собственных колебаний

Суммирование вкладов отдельных форм колебаний нормами рекомендуется выполнять с использованием среднеквадратичной оценки типа «корень из суммы квадратов»:

$$s_k = \sqrt{\sum_{j=1}^n s_{kj}^2} \quad (10.129)$$

Такой подход основывается на гипотезе о том, что все модальные реакции являются нормально распределенными случайными

величинами с одинаковыми коэффициентами корреляции, что согласуется со многими наблюдениями, хотя и не является точно установленным фактом.

Суммирование внутренних сил, которые определяются по обычным правилам для каждой из учитываемых форм собственных колебаний, также выполняют по формуле типа (10.120), но здесь возможна одна неприятность — использование модулей моментов, продольных сил и поперечных сил приводит, например, к тому, что исчезают сжато-изогнутые сечения, все они оказываются растянуто-изогнутыми. Для борьбы с этим явлением иногда значениям компонентов вектора внутренних сил присваиваются знаки, как у аналогичных компонентов в первой форме собственных колебаний. Такой подход реализован в некоторых программных системах, но обосновать его достаточно трудно, даже если предположить, что именно первая форма собственных колебаний и реализует основной вклад в суммарное значение каждого из компонентов вектора-ответа.

Учитывая, что оценка суммы модальных вкладов содержит выражение квадратного корня, а перед ним, как известно, следует ставить знак  $\pm$ , можно принять, что все компоненты внутренних сил (напряжений) могут иметь произвольный знак и учитывать все возможные комбинации их знаков. Но более правильным было бы вспомнить, что при проверке конструкции найденные оценки максимальных значений компонентов усилий используются не сами по себе, а подставляются в некоторую формулу, определяющую критерий пригодности конструкции (например, в формулу для вычисления напряжений). Тогда необходимо для каждой учитываемой формы собственных колебаний подсчитать значение этого критерия и уже потом суммировать его по (10.129).

Следует заметить, что использование формулы (10.129) «гасит» знаки модальных компонентов сейсмической реакции, что в некоторых случаях может приводить к недоразумениям. Достаточно типичным примером такой ситуации может служить случай кратных частот, когда формы собственных колебаний, соответствующих такой частоте, определяются с точностью до некоторого произвола. Так, например, вертикально расположенный консольный стержень с одинаковыми главными жесткостями поперечного сечения имеет кратные формы собственных колебаний, которые определяются с точностью до произвольного поворота вокруг оси  $Z$ , как это показано в плане на рис. 10.17, где в варианте *a*) собственные формы направлены вдоль координатных осей, а в варианте *б*) — повернуты на  $45^\circ$ . Если сейсмический импульс действует вдоль оси  $X$ , то для

варианта а) реакция по второй форме будет отсутствовать, и все перемещения окажутся лежащими в плоскости  $(X, Z)$ .

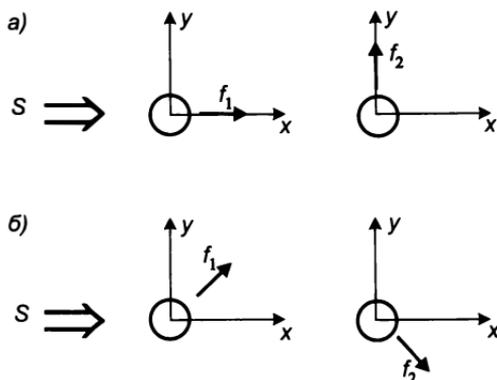


Рис. 10.17. Случай кратной частоты

Для варианта б) будут возбуждаться обе формы собственных колебаний, но тот факт, что компоненты по оси  $Y$  имеют разные знаки и гасят друг друга, окажется потерянным при использовании правила «корень из суммы квадратов». В результате окажется, что возбуждаются перемещения не только по направлению действия сейсмического толчка, но и в перпендикулярном направлении. Как видим, вывод зависит от произвола при выборе пары собственных форм, соответствующих кратной частоте.

Более точным способом суммирования вкладов отдельных форм колебаний является метод, основанный на учете корреляции движений по отдельным формам, который приводит к формуле

$$s = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n s_p \rho_{pk} s_k}, \quad (10.130)$$

в которой коэффициенты корреляции  $\rho_{ps}$  определяются формулой

$$\rho_{pk} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r(1+r)^2} \quad (r = \omega_p/\omega_k). \quad (10.131)$$

Вместо вычислений по (10.130) некоторые нормативные документы предлагают считать  $\rho_{ks} = 1$ , если частоты  $\omega_p$  и  $\omega_s$  различаются не более чем на 10%, а в остальных случаях принимать  $\rho_{pk} = 0$ . Это приводит к зависимости

$$s = \sqrt{\sum_{p=1}^n s_p^2 + 2 \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n s_p s_k} \quad (p \neq k), \quad (10.132)$$

где первая сумма под радикалом соответствует далеко отстоящим, а двойная сумма — близко расположенным частотам.

## 10.6.2. Специальные проблемы спектральной методики

Изложенная в предыдущем разделе спектральная методика определения сейсмических нагрузок обошла вниманием несколько важных деталей, к числу которых относится проблема выбора направления сейсмического воздействия, вопросы учета крутильного компонента и выбора числа учитываемых форм собственных колебаний.

### *Направление воздействия*

Сейсмическое воздействие может иметь произвольную ориентацию в пространстве, и нормы требуют, чтобы было найдено невыгодное направление. Но наиболее невыгодное направление сейсмического воздействия зависит от того, какой именно элемент конструкции мы рассматриваем: например, для колонн здания невыгодным оказывается горизонтальное направление вектора вдоль оси  $X$ , а для балок междуэтажных перекрытий — вертикальное.

Если считать вероятности возникновения сейсмической нагрузки по каждому из трех ортогональных направлений  $XYZ$  (ось  $Z$  вертикальна) статистически независимыми, то для расчетного значения можно использовать среднеквадратичную комбинацию

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \quad (10.133)$$

Доказано [Wilson, 1997], что в этом случае результат не зависит от выбранной системы координатных осей. Такой подход много лет используется в сейсмических нормах США [UBC 1997]. Другой подход демонстрируют нормы Франции [PS 1992], где направления  $X$  и  $Y$  выбираются тоже произвольно, а затем после определения динамической реакции  $S_x$ ,  $S_y$  и  $S_z$  по каждому из вариантов действия сейсмической нагрузки составляются вероятностные комбинации

$$\begin{aligned} S &= \pm S_x \pm \lambda S_y \pm \mu S_z, \\ S &= \pm \lambda S_x \pm S_y \pm \mu S_z, \\ S &= \pm \lambda S_x \pm \mu S_y \pm S_z \end{aligned} \quad (10.134)$$

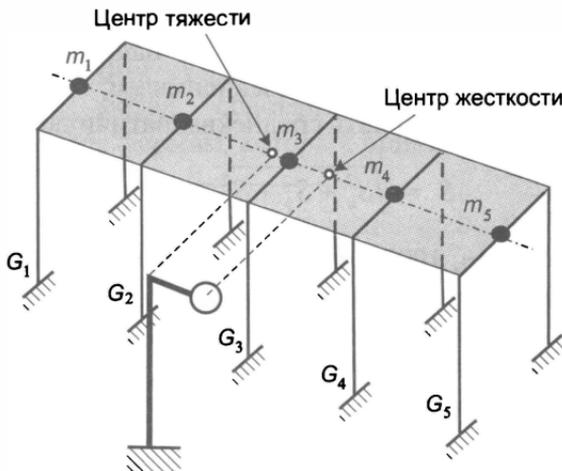
с использованием коэффициентов  $\lambda = 0,3$  и  $\mu = 0,3$ . Аналогичные требования сформулированы и в новых нормах России по

проектирования атомных станций, но с коэффициентами  $\lambda = 0,4$  и  $\mu = 0,4$ .

### Крутильный компонент

Поле перемещений грунта под основанием сооружения является неоднородным, что не учитывает основная гипотеза спектрального метода о синхронном поступательном движении основания. Фактическая неоднородность приводит к тому, что на сооружение действуют не только сейсмическая сила, но и сейсмический момент. Комбинация этих нагрузок приводит к напряженно-деформированному состоянию элементов конструкций, которое по своему характеру и по интенсивности усилий полнее, определеннее и корректнее соответствует фактическому напряженно-деформированному состоянию сооружения при землетрясении.

В отечественных нормах в качестве грубой оценки предлагается учесть это обстоятельство приближенно, вводя в рассмотрение крутящий момент относительно вертикальной оси здания или сооружения. При этом расчетный эксцентриситет между центрами жесткости и масс в рассматриваемом уровне следует принимать не менее 10% размера сооружения в плане в направлении, перпендикулярном сейсмической нагрузке  $s_{ik}$ . (рис. 10.18).



**Рис. 10.18.** Введение в консольную расчетную модель эксцентриситета между центром жесткости (ЦЖ) и центром масс (ЦМ)

Эта рекомендация норм вызывает множество вопросов, начиная с неопределенности понятия центра жесткости, нахождение которого не является тривиальной операцией для любого случая нерегулярной в плане компоновки элементов жесткости, и кончая вопросом о

способе приложения найденного таким образом закручивающего момента. Последнее не безразлично для схем, не имеющих абсолютно жесткого диска в уровне его действия. Так, для междуэтажного перекрытия, показанного на рис. 10.19 (монолитная железобетонная плита толщиной 18 см), две эквивалентные по суммарному значению  $M_{кр}$  схемы реализации сейсмического момента приводят к 25%-му расхождению значений изгибающих моментов в колоннах.

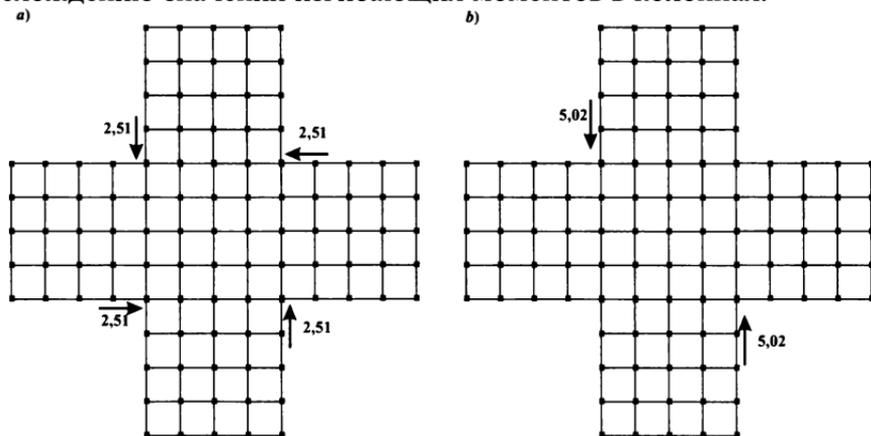


Рис. 10.19. Варианты реализации крутящего момента

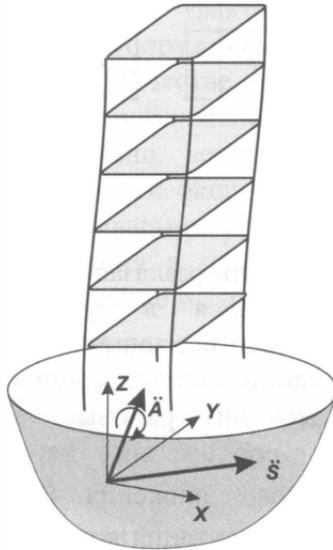
Другой подход развивался в работах Н.А. Николаенко и Ю.П. Назарова и нашел себе воплощение в современных редакциях норм проектирования сейсмостойких сооружений СП 31-114-2004 и ДБН В.1.1-12:2006. Здесь интегральные параметры сейсмического движения основания сооружения характеризуются вектором ускорений поступательного движения  $\dot{\mathbf{S}}$  и вектором ускорений ротации  $\ddot{\mathbf{A}}$  (рис. 10.20), ориентация которых выбирается из условия максимизации сейсмического воздействия.

Здесь сейсмическое воздействие рассматривается случайным не только во времени, но и в пространстве, и его параметрами являются:

- инвариантная (независимая от ориентации в пространстве) интенсивность векторов воздействия;
- спектральный состав;
- ориентация векторов воздействия в пространстве.

Эти параметры относятся к некоторой области пространства ("массиву") с геометрическими размерами, соизмеримыми с размерами сооружения в плане. При этом движения "массива" как единого целого определяется двумя интегральными характеристиками: вектором ускорения поступательного движения  $\ddot{\mathbf{x}}_0$  с компонентами  $\ddot{x}_{0,i}$  ( $i = X, Y, Z$ ) в координатной системе  $XYZ$  и

вектором углового ускорения вращения (ротации)  $\ddot{\alpha}_0$  с компонентами  $\ddot{\alpha}_{0,i}$  ( $i = X, Y, Z$ ). Детальный анализ ротационной составляющей представлен в работе [Ньюмарк, Розенблюэт, 1980], где показано, что интенсивность угловых ускорений ротации  $w = |\ddot{\alpha}_0|/|\ddot{x}_0|$  зависит от свойства грунтов и от размеров рассматриваемого массива. В нормах принимается, что  $w = \bar{w}\chi$ , где:  $\bar{w} = 2 \cdot 10^{-2}$ ;  $6 \cdot 10^{-2}$  и  $9 \cdot 10^{-2}$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для грунтов соответственно I, II и III категорий. Значения  $\chi$  вычисляются по формуле:  $\chi = \exp[\gamma(B - 25)]$ , где  $B \geq 25$  м – меньший размер сооружения в плане и  $\gamma = -7,2 \cdot 10^{-3}$ ,  $-1 \cdot 10^{-2}$  и  $-1,6 \cdot 10^{-2}$  ( $\text{м}^{-1}$ ) для I, II и III категорий грунтов соответственно.



**Рис. 10.20.** Расчетная модель сооружения и массива, на котором оно покоится

Если расчетная модель сооружения содержит только точечные массы, то расчет рекомендуется вести по обычной формуле спектрального метода с коэффициентом формы колебаний, вычисляемым как

$$\eta_{ijk} = X_{ijk} \cdot \frac{\sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^3 Q_p X_{ijp} \cdot E_{pj}}{\sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^3 [Q_p X_{ijp}^2]}, \quad (10.135)$$

где:

- $X_{ijk}$  — перемещения  $k$ -й ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) массы по  $j$ -му ( $j = 1, 2, 3$ ) направлению при  $i$ -й форме колебаний;
- $E_{pj}$  — суммарное перемещение  $p$ -й массы (ее координаты обозначены как  $x_p, y_p$  и  $z_p$ ) по направлению  $j$  с учетом поступательного движения и ротации, которое следует вычислять по формулам:

$$\begin{aligned} \text{для } j=1 & \quad E_{p1} = \left[ v_{\ddot{x}_{01}} + w(B) \left( x_{2p} v_{\ddot{a}_{03}} - x_{3p} v_{\ddot{a}_{02}} \right) \right]; \\ \text{для } j=2 & \quad E_{p2} = \left[ v_{\ddot{x}_{02}} + w(B) \left( x_{3p} v_{\ddot{a}_{01}} - x_{1p} v_{\ddot{a}_{03}} \right) \right]; \\ \text{для } j=3 & \quad E_{p3} = \left[ v_{\ddot{x}_{03}} + w(B) \left( x_{1p} v_{\ddot{a}_{02}} - x_{2p} v_{\ddot{a}_{01}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.136)$$

Направляющие косинусы  $v_{\ddot{x}_{01}}, v_{\ddot{x}_{02}}, v_{\ddot{x}_{03}}$  вектора поступательных ускорений  $\ddot{x}_0$  и направляющие косинусы  $v_{\ddot{a}_{02}}, v_{\ddot{a}_{01}}, v_{\ddot{a}_{03}}$  вектора ускорений ротации  $\ddot{a}_0$  определяют ориентацию векторов

Направляющие косинусы  $v_{\ddot{x}_{10}}, v_{\ddot{x}_{20}}, v_{\ddot{x}_{30}}$  вектора поступательных ускорений  $\ddot{x}_0$  и направляющие косинусы  $v_{\ddot{a}_{10}}, v_{\ddot{a}_{20}}, v_{\ddot{a}_{30}}$  вектора ускорений ротации  $\ddot{a}_0$  определяют ориентацию векторов сейсмического воздействия  $\ddot{x}_0$  и  $\ddot{a}_0$  в пространстве и принимаются в расчет из условия наиболее опасного направления воздействия.

Следует отметить, что результаты расчета могут сильно зависеть не только от ориентации, но и от места приложения вектора ротации. Об этом свидетельствуют данные экспериментального расчета достаточно простого здания, показанного на рис. 10.21.

В табл. 10.4 приведены значения перемещений, вычисленные для двух узлов на вершине здания: центрального № 4017 и периферийного № 4046.

Таблица 10.4

Вариант	$X_{4046}$	$Y_{4046}$	$X_{4017}$	$Y_{4017}$
$\ddot{A} \equiv 0$	216,2	17,1	216,3	17,0
$\ddot{A} \parallel Y$	708,8	59,6	709,2	59,9
$\ddot{A} \parallel Z$ (в центре)	582,5	471,3	343,6	28,9
$\ddot{A} \parallel Z$ (в углу)	935,9	720,9	809,5	546,6

Расчет выполнялся на сейсмическое воздействие вдоль оси  $X$ , для которого вектор ротации был взят в трех вариантах. Первый вариант соответствовал вектору ротации  $\ddot{A}$ , привязанному к центру основания и ориентированному вдоль горизонтальной оси  $Y$ , второй — при ориентации вектора  $\ddot{A}$  вдоль оси  $Z$  и, наконец, третий — при

ориентации  $\ddot{A}$  вдоль оси  $Z$ , но с привязкой этого вектора к углу основания.

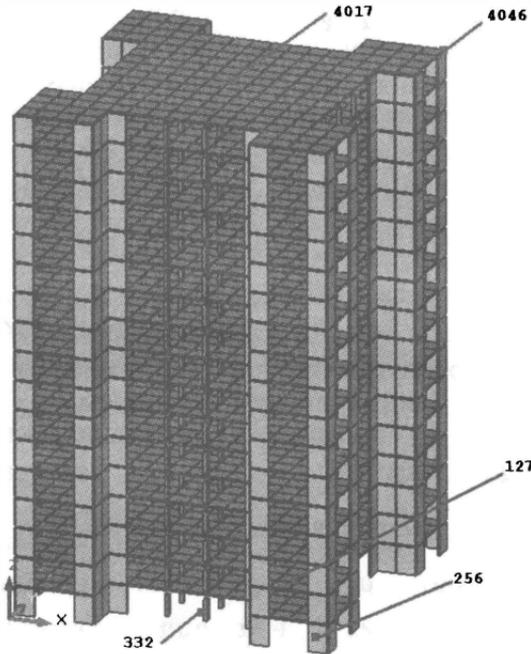


Рис. 10.21. К примерам сопоставительных расчетов

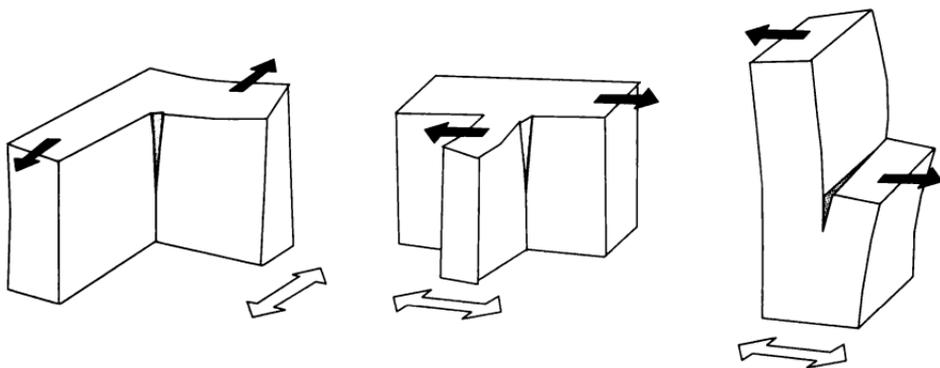
### 10.6.3. Акселерограммы. Интегрирование уравнений движения

Указанные выше сложности, связанные с использованием спектрального метода расчета, определяют некоторые ограничения на область его применения. Так, например, в нормах Украины ДБН В.1.1-12: 2006 приводится характерная таблица применимости различных методов расчета:

Метод расчета	Типы сооружений
Спектральный метод а) с применением упрощенных расчетных моделей сооружений, с учетом поступательных колебаний	Здания и сооружения простой геометрической формы с симметричным и регулярным расположением масс и жесткостей, с наименьшим размером в плане не более 30м, .

Метод расчета	Типы сооружений
Спектральный метод б) с учетом, помимо поступательных, крутильных сейсмических воздействий (сейсмического момента)	Здания и сооружения, кроме указанных в п.1 настоящей таблицы
Прямой динамический расчет	Здания и сооружения с новыми конструктивными решениями, не прошедшие экспериментальной проверки. Объекты повышенного уровня ответственности Здания и сооружения высотой более 50 м и сооружения с пролетом более 30 м. Здания и сооружения, оснащенные системой сейсмоизоляции и другими системами регулирования сейсмической реакции

Упоминание в этой таблице зданий простой геометрической формы связано с тем обстоятельством, что в альтернативных случаях возможно проявление нежелательных эффектов показанных на рис. 10.22, а эти эффекты могут быть пропущены при расчетах по спектральной методике с использованием упрощенных схем.

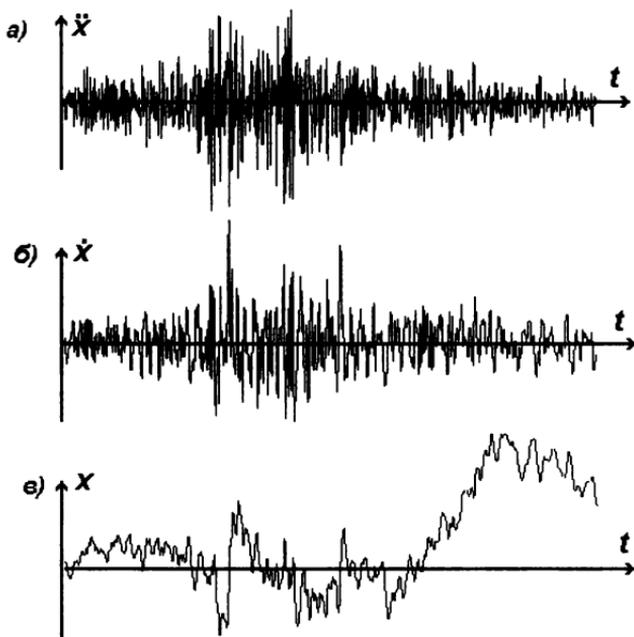


**Рис. 10.22.** Возможные схемы разрушения зданий сложной конфигурации

Для особо ответственных сооружений нормы требуют, чтобы расчет на сейсмические воздействия выполнялся с использованием инструментальных записей землетрясений, наиболее опасных для данного здания или сооружения, а также синтезированных

акселерограмм. При этом следует учитывать возможность развития неупругих деформаций конструкций.

Инструментальные записи *акселерограмм* (зависимость «ускорение-время»), *велосиграмм* (зависимость «скорость-время») и *сейсмограмм* (зависимость «перемещение-время») являются наиболее полным представлением сейсмических воздействий. Пример таких записей представлен на рис. 10.23.



**Рис. 10.23.** Запись колебаний грунта:  
а – акселерограмма, б – велосиграмма, в – сейсмограмма

О методике отбора инструментальных записей и о способах создания синтезированных акселерограмм нормы не говорят ничего. Вместе с тем эта задача является нетривиальной. Некоторые указания по ее решению имеются в Еврокоде-8, и они сводятся к тому, что законы колебаний грунта должны быть совместимы с расчетным спектром отклика, принятым для данной площадки, т. е. их спектры в определенном смысле близки к расчетному.

Это условие считается достигнутым если выполнены такие требования:

- использовано не менее пяти акселерограмм;
- средние значения ускорений спектральной реакции при нулевом периоде собственных колебаний, рассчитанные на основе индивидуальных временных процессов, не меньше, чем величина  $A_g$  для рассматриваемой местности;

- в интервале периодов, где кривая  $\beta(T)$  имеет постоянное значение, усредненное по всем процессам, значение спектра должно быть не меньше, чем величина  $A_g\beta$ ;
- ни одно из значений среднего спектра не должно быть ниже соответствующего значения расчетного спектра более чем на 10%.
- продолжительность периода стационарной части акселерограммы  $T_s$  для эпицентральных местностей должна коррелировать с величиной расчетного ускорения  $A$ , как это указано в табл. 10.5.

Таблица 10.5

$A$	0,1	0,2	0,3	0,4
$T_s, \text{с}$	10,0	15,0	20,0	25,0

Особую проблему составляет обеспечение статистической независимости используемых акселерограмм и их балансировки. Три компонента акселерограммы должны быть различными и взаимно статистически независимыми, иначе при расчетах с одновременным их использованием результаты будут получаться завышенными. Для проверки статистической независимости пары акселерограмм, например  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , необходимо вычислить их нормированный коэффициент корреляции  $\rho_{12}$ :

$$\rho_{12} = \frac{\langle (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) \rangle}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (10.137)$$

где угловыми скобками обозначена операция вычисления математического ожидания находящегося в них выражения;  $m_1$  и  $m_2$  - математические ожидания функций  $x_1$  и  $x_2$ ;  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — их стандартные отклонения. Два компонента считаются статистически независимыми, если  $|\rho_{12}| \leq 0,3$ .

Достаточное разнообразие и независимость инструментальных записей обеспечивает выполнение следующих требований к определенной записи для ее включения в состав расчетного набора. Эти записи должны:

- быть зарегистрированными при землетрясениях с разными магнитудами, разной глубиной очагов и на разных расстояниях от эпицентра;
- соответствовать разной интенсивности проявления в пунктах регистрации;
- обладать по отношению друг к другу индивидуальными свойствами (например, иметь разные соотношения между максимумами поступательных компонентов в направлениях  $X, Y, Z$ ).

Что касается балансировки акселерограмм, то отметим следующее. Сейсмические движения грунта носят хаотический, иррегулярный характер. Их значения обычно задают в виде таблиц, которые называются *оцифрованными акселерограммами*. Искажения акселерограмм, возникающие при их записи и оцифровке, могут играть важную роль в расчетах сооружений. Необходимо отметить, что большинство записанных акселерограмм, в связи со свойствами используемой аппаратуры, содержатся ошибки в длиннопериодной области. К числу простейших ошибок такого класса относятся смещение и поворот нулевой линии акселерограммы. Даже небольшие ошибки такого рода могут исказить картину перемещений рассчитываемого объекта.

Например, следует обеспечить, чтобы в момент окончания землетрясения расчетная скорость грунта равнялась нулю. В противном случае можно получить нереально большие остаточные смещения. Так, для сейсмичности 8 баллов (пиковое значение ускорения основания  $2 \text{ м/с}^2$ ) перекося нулевой линии в 1%, который соответствует воздействию постоянного однонаправленного ускорения  $0,02 \text{ м/с}^2$ , за время действия землетрясения 30 с даст перемещение около 9 м.

Корректировка акселерограммы связана не только с наложением дополнительных условий

$$z(T) = 0, \quad \dot{z}(T) = 0, \quad (10.138)$$

требуемых, чтобы в конце землетрясения (время  $T$ ) равнялись нулю смещение и скорость, но и устранения общего тренда.

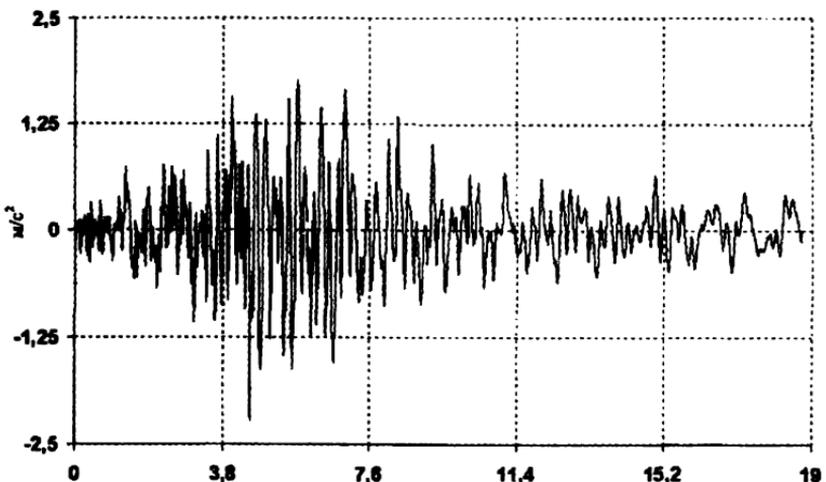


Рис. 10.24. Акселерограмма

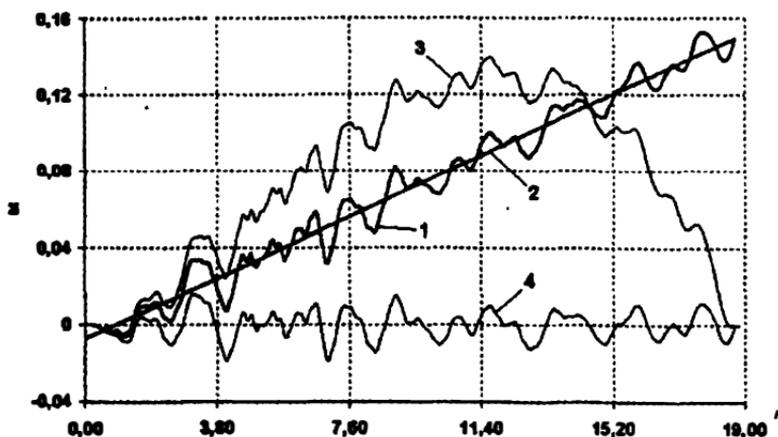


Рис. 10.25. Сейсмограммы:

1 — без корректировки; 2 — тренд вычисленной сейсмограммы; 3 — после наложения условий (10.138); 4 — после корректировки

Соответствующая процедура описана в работе [Уздин и др., 1993], а на рис. 10.24 и 10.25 показаны исходная акселерограмма и сейсмограмма, полученная путем ее интегрирования.

Из рисунка 10.25 видно, что только наложения дополнительных условий (10.138), которое рекомендуется во многих работах, недостаточно для корректного описания смещений грунта. Зачастую требуется не только исключения тренда, но и фильтрации верхних частот.

Расчеты по акселерограммам выполняются в режиме прямого интегрирования уравнений движения. Само интегрирование реализуется численно при некотором шаге по времени. При этом можно получить графики (см. рис 10.26) изменения перемещений и усилий во времени (time history). С их помощью можно не только проследить за изменением того или иного параметра, но и установить временной интервалы, где эти параметры приобретают экстремальные значения. Этот интервал можно исследовать более детально.

При достаточно большом числе узлов и элементов в расчетной модели количество таких графиков может измеряться сотнями и не только инженерный анализ, но и сколь-нибудь полезное разглядывание всех их становится невозможным. В связи с этим для каждого из графиков анализируются только экстремальные значения, даже без учета того, что экстремумы достигаются в различные моменты времени.

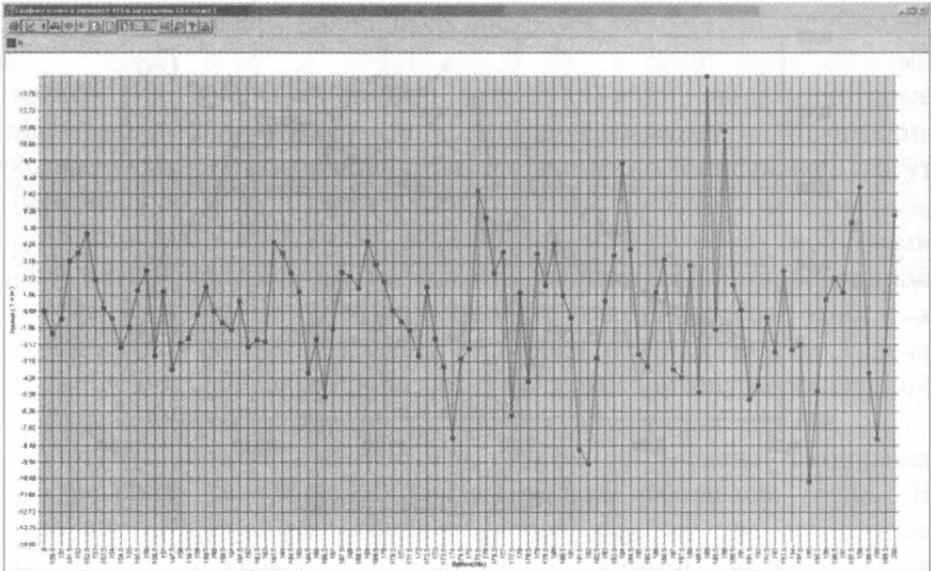


Рис. 10.26. отрезок графика изменений перемещений

Эти значения сопоставляются с результатами расчета по линейно-спектральной методике, например. Так, как это представлено на рис. 10.27, где приведены результаты сопоставительных расчетов одного специального большепролетного покрытия.

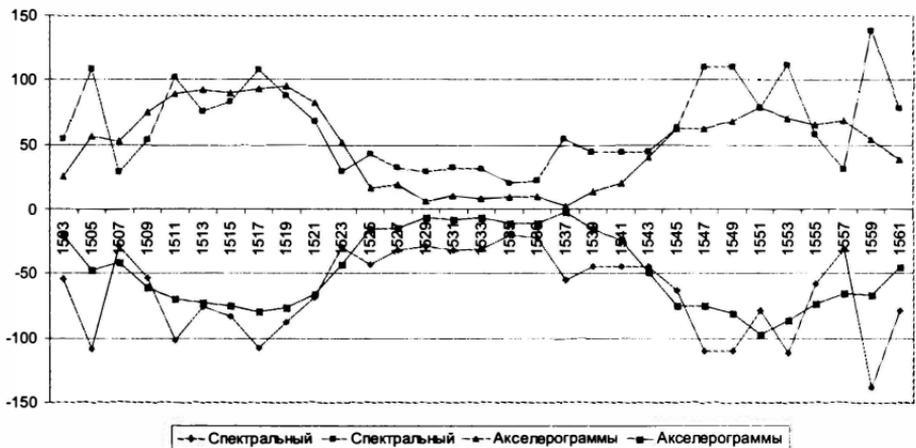


Рис. 10.27. Огибающие усилий в элементах нижнего пояса большепролетного покрытия

В данном случае относительно хорошее совпадение результатов объясняется тем, что при расчетах по спектральной методике использовался не обобщенный график спектрального коэффициента

динамичности  $\beta$  из норм проектирования, а специальный график этого коэффициента, построенный по той же самой акселерограмме.

## 10.7. Действие импульсных и ударных нагрузок

Импульсные нагрузки, рассматриваемые в этом разделе, представляют собой кратковременно действующие силы и/или удары, не вызывающие в элементах сооружения макропластических деформаций. Микропластические деформации в местах контакта с ударяющим телом или в других точках конструкции и являющиеся причиной рассеяния энергии колебаний, учитываются в расчетах как внутреннее трение материала.

Чаще всего импульсная нагрузка представляется выражением типа

$$P(t) = \begin{cases} P_0 f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau \end{cases}, \quad (10.139)$$

где  $t = 0$  — начало действия нагрузки;  $P_0$  — ее максимальное значение;  $f(t)$  — закон изменения нагрузки во времени, пронормированный так, что максимум  $|f(t)| = 1$ . Наиболее часто употребляемые в расчетах функции  $f(t)$  указаны в табл. 10.6.

Таким образом, импульсная нагрузка характеризуется продолжительностью действия  $\tau$ ; законом изменения во времени (формой импульса)  $f(t)$  и наибольшей величиной  $P_0$ . Чем меньше тот промежуток времени, в течение которого действует знакопостоянная нагрузка, тем меньшую роль играет закон распределения этой нагрузки во времени [Рабинович и др., 1970]. Основное и решающее значение приобретает только одна характеристика нагрузки — импульс силы

$$S = P_0 \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (10.140)$$

Для мгновенного импульса, когда  $\tau \rightarrow 0$  максимальное перемещение простейшей системы с одной степенью свободы определяется формулой

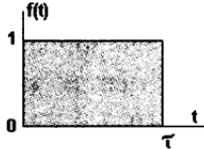
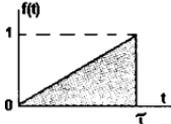
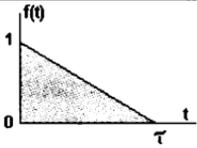
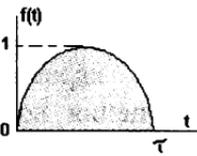
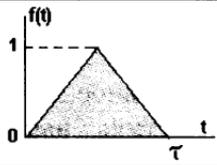
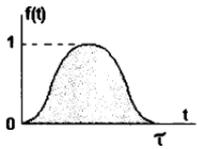
$$Z_{max} = \frac{S}{M\omega}, \quad (10.141)$$

где:

- $M$  — масса;
- $\omega$  — частота собственных колебаний.

В других случаях значение  $Z_{\max}$  уточняется путем умножения на коэффициент импульсивности  $\varepsilon(\tau^*)$ , зависящий от относительной продолжительности импульса  $\tau^* = \tau / T = \tau\omega / 2\pi$ .

Таблица 10.6.

№	График	$f(t)$ при $0 \leq t \leq \tau$	$\int_0^\tau f(t)dt$
1		$f(t) = 1$	$\tau$
2		$f(t) = t/\tau$	$\tau/2$
3		$f(t) = 1 - t/\tau$	$\tau/2$
4		$f(t) = \sin(\pi t / \tau)$	$2\tau/\pi$
5		$f(t) = \begin{cases} 2t/\tau, & t \leq \tau/2 \\ 2[1 - (t/\tau)], & t > \tau/2 \end{cases}$	$\tau/2$
6		$f(t) = (1/2)[1 - \cos(2\pi t / \tau)]$	$\tau/2$

Значения коэффициента интенсивности уменьшаются от 1,0 при  $\tau^* = 0$  до нуля (рис. 10.28).

Если импульс вызван ударом по конструкции, то его значение можно приближенно оценить по формуле

$$S = mv_0(1 + k_0), \quad (10.142)$$

где  $m$  — масса ударяющего тела;  $v_0$  — его скорость в момент

соприкосновения с конструкцией;  $k_0$  — коэффициент восстановления (отскока), значение которого зависит от свойств соударяющихся тел в месте контакта и от их формы (табл. 10.7).

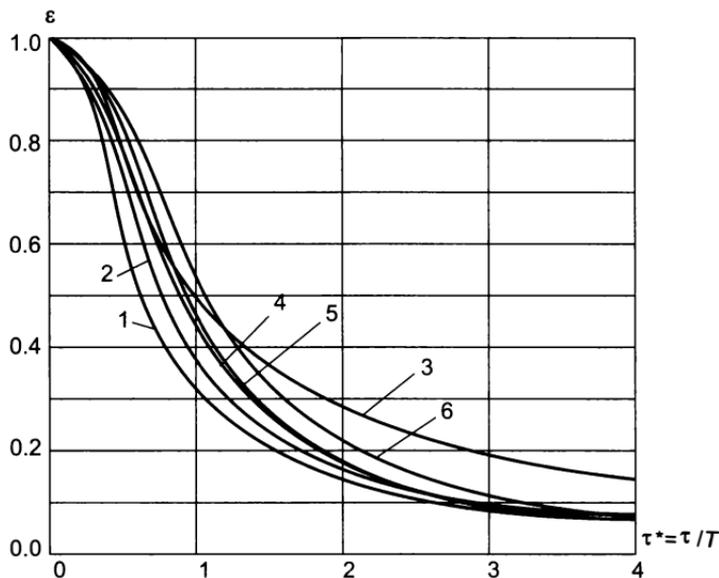


Рис. 10.28. Коэффициент импульсивности для шести форм импульса по таблице 10.6

Таблица 10.7.

Материал поверхности конструкции и в месте удара	Материал и форма ударяющего тела				
	Сталь и другие твердые металлы		Медь, алюминий, твердые пластмассы, камень, бетон и пр.		Пластичные и сыпучие материалы
	Скругл.	Угловат.	Скругл.	Угловат.	
Сталь	0,60	0,35	0,40	0,25	0,00
Дерево	0,55	0,30	0,40	0,20	0,00
Камень	0,40	0,20	0,30	0,15	0,00
Бетон	0,35	0,15	0,25	0,10	0,00
Ксилолит	0,20	0,10	0,10	0,05	0,00
Асфальт	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Этот коэффициент обычно определяется экспериментальным путем как отношение высоты отскока падающего тела к высоте его падения.

При расчете на импульсные воздействия важную роль играет коэффициент потерь  $\eta$ , характеризующий затухание колебаний. Он связан с коэффициентом поглощения энергии  $\psi$  и коэффициентом внутреннего трения  $\gamma$  соотношениями

$$\eta = \psi / (2\pi) = \frac{\gamma}{(1 - \gamma^2 / 4)}. \quad (10.143)$$

Через последний коэффициент выражается и логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{1 - \gamma^2 / 4}}. \quad (10.144)$$

Справочные данные о значениях коэффициентов  $\eta$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$  или  $\delta$  можно найти в известных справочниках и в других источниках, включая нормативные документы.

Для систем с несколькими степенями свободы при действии системы мгновенных импульсов  $S_k^0$ , приложенных в точках  $k = 1, \dots, m$ , решение ищется путем разложения по формам собственных колебаний и дается формулой

$$u_j = \sum_{i=1}^n U_{ji} \exp(-\frac{\gamma}{2} \omega_i t) \sin(\omega_i t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (10.145)$$

где  $U_{ji}$  вычисляется с использованием форм собственных колебаний  $\Psi_i$  по формуле

$$U_{ji} = \frac{\Psi_{ji}}{\omega_j} \sum_{r=1}^m \varepsilon \left( \frac{\tau_r \omega_j}{2\pi} \right) \Psi_{jr} S_r^0, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, n). \quad (10.146)$$

Практический интерес, конечно, представляют экстремальные значения перемещений и усилий рассчитываемой системы, но отыскание момента времени, когда такой экстремум реализуется для суммы типа (10.145), вызывает не только определенные вычислительные трудности, но и встречает более серьезное возражение. Оно основывается на том факте, что, безусловно, имеются расхождения между вычисленными и фактическими частотами собственных колебаний системы [Сорокин, 1968], что приводит к заметному отклонению сдвига фаз.

В практике расчетов строительных конструкций утвердилась предложенная Е.С. Сорокиным методика оценки суммы затухающих гармоник, в основу которой положена следующая идея — для гармоник с наибольшими амплитудами в сумму включаются значения, соответствующие моменту времени  $t = T_q / 4$  ( $q$  — номер гармоники, для которой в сумме (10.145) достигается максимальная амплитуда  $U_{ji}$ ), а для всех прочих берется значение огибающих этих гармоник в тот же момент времени. Иными словами, если для

перемещения в точке  $j$  выполняется условие  $|U_{jq}| > |U_{ji}|$  ( $i \neq q$ ), то вычисления производятся по формуле

$$|u_j| = \sum_{i=1}^{q-1} |U_{ji}| \sin \frac{\pi \omega_i}{2\omega_q} + \sum_{i=q}^n |U_{ji}| \exp\left(-\frac{\gamma \pi \omega_i}{4\omega_q}\right). \quad (10.147)$$

Графическая иллюстрация для случая  $q = 1$  дана на рис. 10.29.

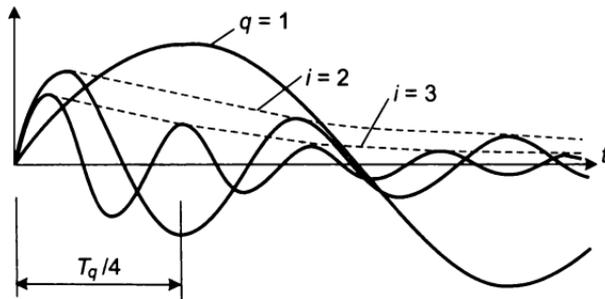


Рис. 10.29. Графическая интерпретация способа оценки экстремума

По поводу суммирования внутренних сил, которое выполняют по формуле, аналогичной (10.147), следует сказать то же самое, что и для суммирования по Розенблюму в случае сейсмического воздействия — возникают неприятные эффекты потери знака.

Но здесь, кроме указанного ранее выхода, имеется возможность и прямой оценки максимума перемещений (компонент усилий, напряжений и т.п.), определяемых по формулам типа (10.147). Для этого следует устроить перебор значений такой суммы на интервале времени от 0 до  $T_q/4$  с достаточно мелким шагом, например, не менее одной восьмой наименьшего из учитываемых периодов собственных колебаний. При этом следует рассмотреть возможность изменения таких периодов примерно на  $\pm 5\%$ , чтобы учесть возможную неточность определения частот собственных колебаний.

## 10.8. Колебания под воздействием пульсаций ветрового потока

### 10.8.1. Моделирование ветрового воздействия

Ветровая нагрузка в соответствии с требованиями норм [СНиП 2.01.07–85] может быть рассмотрена как:

- нормальное давление  $w_e$ , приложенное по внешней поверхности сооружения или элемента;
- нормальное давление  $w_i$ , приложенное к внутренним поверхностям зданий с проницаемыми ограждениями или проемами.

В первом случае нормальное давление  $w_e$  следует определять как сумму средней и пульсационной составляющих, во втором случае  $w_i$  следует рассматривать только как среднюю составляющую.

В результате расчета на действие ветровой нагрузки определяются перемещения узлов расчетной схемы и усилия (напряжения) в элементах системы отдельно от действия средней и пульсационной составляющих ветровой нагрузки. Суммарное значение реакции сооружения (перемещения, усилия, напряжения) определяется по формуле

$$X = X^s \pm X^d, \quad (10.148)$$

где:

- $X$  — величина искомого фактора;
- $X^s$  — значение рассматриваемого фактора, определяемое действием статической компоненты ветровой нагрузки;
- $X^d$  — то же от действия пульсационной составляющей ветровой нагрузки.

Знак  $\pm$  перед динамической составляющей значения фактора  $X^d$  напоминает о том, что в процессе вычислений оценивается его расчетная амплитуда. При определении суммарного эффекта ветрового воздействия необходимо выбрать тот знак, который является более неблагоприятным, что дает формулу

$$X = X^s + \text{sign}(X^s) \cdot X^d. \quad (10.149)$$

К сожалению, в тексте норм [СНиП 2.01.07–85] и в популярных справочниках знак  $\pm$  перед динамической составляющей отсутствует, что приводит в некоторых случаях к недоразумениям (этот недостаток исправлен в нормах [МГСН 4.04-94]). Кроме того, нормы [СНиП 2.01.07–85] оперируют с понятием *пульсационной составляющей ветровой нагрузки*, не указывая, что использование этой нагрузки для определения всех прочих факторов (перемещений, усилий и т.п.) нельзя выполнять с помощью обычных методов линейного расчета, если рассматривается система с более чем одной степенью свободы. Это было уже зафиксировано в предыдущей редакции норм [СНиП II-6-74], но, к сожалению, не попало в явной форме в [СНиП 2.01.07–85].

### 10.8.2. Динамическое действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки

Целью динамического расчета на ветровое воздействие является анализ установившихся колебаний сооружения в ветровом потоке. Определяются вероятностные характеристики узловых перемещений, внутренних сил или напряжений в конечных элементах. При этом конечной целью является определение динамической составляющей  $X^d$  расчетного фактора  $X$ .

Как и в документах [СНиП 2.01.07–85], [МГСН 4.04-94] используется квазистационарная модель обтекания, когда предполагается, что характерные размеры обдуваемых ветром поверхностей малы по сравнению с поперечными размерами вихрей, что заставляет ограничивать использование описываемого подхода зданиями и сооружениями, у которых характерный размер сплошной обдуваемой поверхности не превышает величину порядка 100 м. При больших размерах в плане использование квазистационарной модели вряд ли допустимо, поскольку не выполняется основное предположение о малости генеральных размеров конструкции по сравнению с диаметром вихрей, содержащей основную энергию турбулентного потока. По-видимому, указанное ограничение в большей степени касается сооружений со сплошными внешними поверхностями (здания, градирни и т.п.), чем сквозных конструкций (башни, эстакады и т.п.).

Выше в разделе 10.2 было указано, каким образом общие уравнения движения

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = q(t) \quad (10.150)$$

путем использования разложения по формам собственных колебаний

$$U = \Phi y \quad (10.151)$$

преобразуются к независимым уравнениям относительно обобщенных (нормальных) координат  $y(t)$

$$\ddot{y}_r(t) + \gamma\omega_r\dot{y}_r(t) + \omega_r^2 y_r(t) = Q_r(t) \quad (r = 1, \dots, n), \quad (10.152)$$

где:

- $\gamma = \delta/\pi$  — коэффициент неупругого сопротивления;
- $\delta$  — логарифмический декремент колебаний;
- $Q_r(t)$  — обобщенная сила, являющаяся  $r$ -й компонентой вектора

$$Q(t) = \Phi^T q(t) \quad (10.153)$$

или в развернутой форме

$$Q_r = \sum_{j=1}^n \Psi_{jr} q_j . \quad (10.154)$$

В настоящее время общепринятым является подход, когда нагрузка от ветровых пульсаций представляется как стационарный и стационарно связанный случайный процесс. При действии на систему с  $n$  степенями свободы такой нагрузки  $q_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) используется их описание в виде спектральных и взаимных спектральных плотностей  $S_{ij}(\omega)$ <sup>8</sup>.

Взаимные спектральные плотности обобщенных сил  $Q_r(t)$  ( $r = 1, \dots, n$ ), согласно (10.142), связаны с  $S_{ij}(\omega)$  зависимостью

$$S_{Q_r Q_s}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi_{ir} S_{ij} \Psi_{js} \quad (10.155)$$

или в матричной форме

$$S_Q = \Psi^T S_q \Psi, \quad (10.156)$$

где:

- $S_q$  – матрица взаимных спектральных плотностей нагрузок  $q_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ );
- $S_Q$  – то же для обобщенных нагрузок  $Q_r(t)$  ( $r = 1, \dots, n$ ).

Реакцией механической системы  $\mathbf{X}(t)$  на действие динамической нагрузки  $\mathbf{q}(t)$  будем считать вектор узловых перемещений, внутренних сил (напряжений) в конечных элементах или вектор других расчетных факторов. Важно лишь, что реакция  $\mathbf{X}(t)$  связана с обобщенными координатами  $\mathbf{p}(t)$  линейной зависимостью

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{p} . \quad (10.157)$$

Если  $\mathbf{q}(t)$  — описанное выше стационарное случайное воздействие, то компоненты вектора  $\mathbf{X}(t)$  являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами, которые характеризуются двумя матрицами:

- матрицей спектральных плотностей  $S_X$ ;

<sup>8</sup> Значение спектральной плотности  $S_f(\omega)$  пропорционально доле общей мощности случайного процесса  $Q(t)$ , приходящейся на диапазон частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Взаимные спектральные плотности  $S_{ij}(\omega)$  характеризуют степень корреляционной связи между процессами  $Q_i(t)$  и  $Q_j(t)$  в этом же диапазоне частот.

- матрицей ковариаций  $\langle \mathbf{X}^2 \rangle$ , элементами которой являются ковариации  $\langle X_i X_j \rangle$  компонент вектора  $\mathbf{X}$  (здесь и далее угловыми скобками обозначена операция осреднения).

В силу линейной зависимости (10.157), для матрицы ковариаций справедливо соотношение

$$\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \mathbf{A} \langle \mathbf{p}^2 \rangle \mathbf{A}^T. \quad (10.158)$$

Ковариации обобщенных координат определяются по формуле

$$\langle y_r y_s \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\varrho_r \varrho_s}(\omega) d\omega}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)}. \quad (10.159)$$

При расчете на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки в матрице  $\Psi$  достаточно удержать лишь первые  $m$  столбцов (в подавляющем большинстве случаев  $m$  намного меньше  $n$ ), для которых собственные частоты не превышают некоторого предельного значения  $\omega_{\text{lim}}$ . Последнее рекомендуется нормами [СНиП 2.01.07-85] в зависимости от ветрового района и декремента колебаний. Соответственно до  $m$  сокращается и число нормальных координат  $y_r$ , а также количество уравнений (10.152).

### 10.8.3. Представление пульсационной составляющей ветровой нагрузки

Будем предполагать, что с сооружением, находящимся в ветровом потоке, связана система координат  $(X, Y, Z)$  с началом в точке  $O$ , такая что:

- точка  $O$  лежит на поверхности земли;
- ось  $Z$  вертикальна и направлена вверх;
- направление  $X$  совпадает с направлением ветра.

Обозначим через  $\mathbf{r}$  радиус-вектор точки на поверхности сооружения относительно полюса  $O$ . В работе [Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра, 1978] показано, что вектор пульсационной составляющей определяется по формуле

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{W}_0(\mathbf{r}) \zeta(z) v^p(\mathbf{r}, t), \quad (10.160)$$

где:

- $W_0(\mathbf{r})$  — вектор средней (статической) составляющей ветровой нагрузки;
- $\zeta(z)$  — коэффициент пульсаций на высоте  $z$ , значение которого зависит от типа местности;
- $v^p(\mathbf{r}, t)$  — пульсационная составляющая ветровой нагрузки.

При дискретном задании ветровой нагрузки в узлы расчетной схемы формула (10.160) преобразуется к виду

$$\mathbf{P}_k^W(t) = \mathbf{P}_k^s \zeta(z_k) v_k^p(t) \quad (k = 1, \dots, n_y) \quad (10.161)$$

где:

- $n_y$  — число узлов расчетной схемы, в которых задана статическая составляющая ветровой нагрузки;
- $\mathbf{P}_k^s, \mathbf{P}_k^W$  — векторы статической и пульсационной составляющих ветровой нагрузки в узле  $k$ .

Элементы матрицы взаимных спектральных плотностей динамического воздействия  $\mathbf{q}(t)$  вычисляются по формуле

$$S_{ij} = P_{kq}^s P_{ll}^s \zeta(z_k) \zeta(z_l) S_{v_k^p v_l^p}, \quad (10.162)$$

где:

- $i, j = 1, \dots, n$  — номера обобщенных координат;
- $k, l = 1, \dots, n_y$  — номера узлов;
- $q = 1, \dots, n_k; l = 1, \dots, n_l$  — номера степеней свободы соответственно в узлах  $k$  и  $l$ .

Например, в программном комплексе **SCAD** число динамических степеней свободы может меняться от узла к узлу и определяется как инерционными характеристиками узла, так и наложенными на него связями. Допускается до шести степеней свободы в узле, т.е. в (10.162) будет  $0 \leq n_k \leq n_l \leq 6$ . Таким образом, двойные индексы при статических компонентах нагрузки в (10.162) определяют номер узла и номер степени свободы в этом узле.

Если такую же индексацию применить к фундаментальной матрице  $\Psi$ , то матричная формула (10.156) примет следующий развернутый вид

$$S_{\varrho_r, \varrho_s} = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} \sum_{q=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \Psi_{kqr} \Psi_{lrs} P_{kq}^s P_{ll}^s \zeta(z_k) \zeta(z_l) S_{v_k^p v_l^p} \quad (r, s = 1, \dots, m). \quad (10.163)$$

После перегруппировки слагаемых можно получить:

$$S_{Q_r Q_s} = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} A_{kr} A_{ls} S_{v_k^p v_l^p}, \quad (10.164)$$

где введены обозначения

$$A_{kr} = \zeta(z_k) \sum_{q=1}^{n_k} \psi_{kqr} P_{kq}^s; \quad A_{ls} = \zeta(z_l) \sum_{t=1}^{n_k} \psi_{lts} P_{lt}^s. \quad (10.165)$$

После подстановки (10.164) в (10.159) получаем следующее выражение для ковариации обобщенных координат

$$\langle y_r, y_s \rangle = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} A_{kr} A_{ls} \xi_{klrs} \quad (r, s = 1, \dots, m), \quad (10.166)$$

где

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{v_k^p v_l^p} d\omega}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)}. \quad (10.167)$$

При этом

$$\frac{1}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)} = \text{Re}_{rs}(\omega) + i\text{Im}_{rs}(\omega), \quad (10.168)$$

где

$$\text{Re}_{rs} = \frac{(-\omega^2 + \omega_r^2)(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r \omega_s}{\left[(-\omega^2 + \omega_r^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r^2\right] \left[(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_s^2\right]}, \quad (10.169)$$

$$\text{Im}_{rs} = \frac{\gamma\omega \left[ \omega_s (-\omega^2 + \omega_r^2) - \omega_r (-\omega^2 + \omega_s^2) \right]}{\left[(-\omega^2 + \omega_r^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r^2\right] \left[(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_s^2\right]}. \quad (10.170)$$

С учетом (10.166) интеграл (10.155) можно представить в виде суммы

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \text{Re}_{rs}(\omega) d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \text{Im}_{rs}(\omega) d\omega. \quad (10.171)$$

Спектральные и взаимные спектральные плотности пульсаций скорости ветра должны быть четными функциями от  $\omega$ , то есть  $S_{v_k^p v_l^p}(\omega) = S_{v_k^p v_l^p}(-\omega)$  ( $k, l = 1, \dots, n_y$ ). Кроме того, из (10.169) и (10.170) следует, что  $\text{Re}_{rs}(\omega)$  является четной, а  $\text{Im}_{rs}(\omega)$  — нечетной функциями:  $\text{Re}_{rs}(\omega) = \text{Re}_{rs}(-\omega)$ ,  $\text{Im}_{rs}(\omega) = -\text{Im}_{rs}(-\omega)$ .

Из приведенных свойств четности/нечетности следует, что мнимая часть интеграла (10.171) равна нулю, а в действительной части можно

заменить интеграл от  $-\infty$  до  $\infty$  удвоенным интегралом от 0 до  $\infty$ . Тогда (10.171) преобразуется к виду

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \operatorname{Re}_{rs}(\omega) d\omega \quad (k, l = 1, \dots, n_y; \quad r, s = 1, \dots, m). \quad (10.172)$$

Из анализа (10.166) также следует, что

$$\operatorname{Re}_{rs}(\omega) = \operatorname{Re}_{sr}(-\omega), \quad \varphi_{klrs} = \varphi_{klrs}. \quad (10.173)$$

С учетом (10.166) можно сделать вывод о симметрии матрицы ковариаций обобщенных координат  $\langle y_r, y_s \rangle = \langle y_s, y_r \rangle$  ( $r, s = 1, \dots, m$ ).

#### 10.8.4. Спектр пульсаций скорости ветра

Взаимный спектр пульсаций продольной компоненты скорости ветра в свободной атмосфере представляет собой скалярную функцию частоты  $\omega$  и пары точек пространства, отождествляемые с узлами расчетной схемы сооружения, к которым приложена ветровая нагрузка

$$S_{v_k^p v_l^p} = \frac{u^2}{3f(1+u^2)^{4/3}} \exp(-u\chi_{kl}), \quad (k, l = 1, \dots, n_y), \quad (10.174)$$

где:

- $f = \omega/2\pi$  — частота в Гц;
- $u = Lf/v_{10}$  — безразмерная частота;
- $L = 1200$  м — интегральный масштаб турбулентности;
- $v_{10}$  — средняя скорость ветра на высоте 10 м;
- $\chi_{kl}$  — приведенное расстояние между точками  $k$  и  $l$  ( $\chi_{kl} = \chi_{lk}$ ).

$$\chi_{kl} = (20|x_k - x_l| + 8|y_k - y_l| + 8|z_k - z_l|) / L. \quad (10.175)$$

После подстановки (10.174) в (10.172) получаем

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^2 \exp(-u\chi_{kl})}{3f(1+u^2)^{4/3}} \operatorname{Re}_{rs}(\omega) d\omega, \quad (10.176)$$

при этом  $\xi_{klrs} = \xi_{lkr s}$  ( $k, l = 1, \dots, n_y; \quad r, s = 1, \dots, m$ ).

#### 10.8.5. Динамическая составляющая расчетного фактора

Расчетное динамическое значение некоторого фактора  $X$ , связанного с обобщенными координатами линейной зависимостью

$$X = \sum_{r=1}^m \alpha_r p_r \quad (10.177)$$

определяются по формуле типа формулы Розенблюма

$$X^d = \left( \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \alpha_r \langle p_r p_s \rangle \alpha_s \right)^{1/2} \quad (10.178)$$

Здесь также происходят потери знаков отдельных компонент, о которых говорилось выше при рассмотрении сейсмической реакции, и также нет соответствия между такими откликами, как перемещения и внутренние силы (напряжения), поскольку преобразование (10.178) является нелинейным. Последнее обстоятельство, не слишком четко представляемое в справочной литературе, зачастую приводит к недоразумениям.

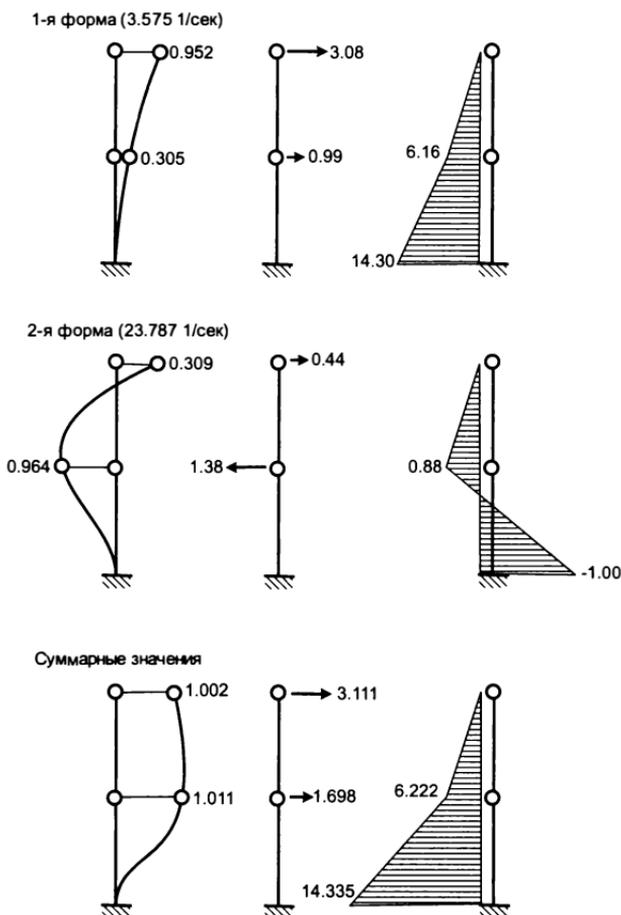


Рис. 10.30. Результаты расчета по формам собственных колебаний

Достаточно типичный пример представлен на рис. 10.30, из которого видно, что вычисленные суммарные формы собственных колебаний и соответствующие им инерционные силы не приводят к суммарной эпюре моментов, которая вычисляется по моментам отдельных форм колебаний. Для каждой формы порознь такое соответствие, естественно, имеет место.

Следует отметить, что действующие нормы предусматривают применение коэффициента обеспеченности  $\lambda = 3,0$ , который использован при назначении коэффициентов пульсации. С другой стороны, имеется известная рекомендация А. Давенпорта [Davenport, 1962], в соответствии с которой коэффициент обеспеченности связывается с периодом собственных колебаний, и для  $i$ -го тона вычисляется по формуле

$$\lambda_i = \sqrt{2 \ln(T/T_i)} + \frac{0.577}{\sqrt{2 \ln(T/T_i)}} \quad (10.179)$$

при  $T = 3600$  сек, соответствующем времени осреднения, использованном при получении спектров пульсации продольной компоненты скорости ветра.

Если воспользоваться этой рекомендацией, то

$$X^d = \left( \sum_{r=1}^m \frac{\lambda_r}{3} \sum_{s=1}^m \alpha_r \langle y_r y_s \rangle \alpha_s \right)^{1/2}, \quad (10.180)$$

что и дает искомый результат.

### 10.8.6. Проблемы численной реализации

Из изложенного видно, что расчет на динамическое воздействие пульсационной составляющей ветровой нагрузки (с вычислительной точки зрения) содержит следующую основную трудность — необходимость определения огромного числа коэффициентов  $\xi_{klrs}$ , каждый из которых требует вычисления несобственного интеграла.

Для уменьшения объема вычислений можно для каждой пары учитываемых собственных частот  $\omega_r$ ,  $\omega_s$  заменить дискретное множество величин  $\xi_{klrs}$  непрерывной функцией  $\xi_{rs}(\chi)$  на отрезке  $[0, \chi_{\text{lim}}]$ , где  $\chi_{\text{lim}} \geq \chi_{kl}$  и определяется габаритными размерами сооружения. Непрерывная функция  $\xi_{rs}(\chi)$  на отрезке  $[0, \chi_{\text{lim}}]$  хорошо аппроксимируется кубическим сплайном, и требуемые значения интегралов  $\xi_{klrs}$  получаются подстановкой в этот сплайн соответствующих значений  $\chi_{kl}$ . Сама сплайн-аппроксимация строится

следующим образом. Отрезок числовой оси  $[0, \chi_{\text{lim}}]$  подразделяется на семь частей в отношении 1:1:1:3:3:9:9, как показано на рис. 10.31.

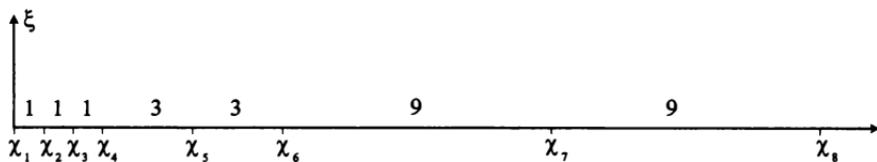


Рис. 10.31. Узловые точки сплайн-аппроксимации

По заданным в узловых точках значениям строится кубический полином, в котором некоторые коэффициенты вычисляются из условий сопряжения, которые основываются на свойствах непрерывности первых и вторых производных аппроксимирующей функции  $\xi_{rs}(\chi)$ . Алгоритм интерполяции кубическими сплайнами подробно описан в [Форсайт и др., 1980]. В результате аппроксимации на каждом из подинтервалов определяется соответствующий кубический полином.

Для каждой пары собственных частот  $\omega_r \leq \omega_s$  ( $r, s = 1, \dots, m$ ) в каждой узловой точке сплайна  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) необходимо вычислить несобственный интеграл (10.176), который представим в виде суммы интегралов  $I_1$  в пределах от 0 до  $\omega_s$  и  $I_2$  в пределах от  $\omega_s$  до бесконечности. Типичный график подынтегральной функции показан на рис. 10.32. Наиболее сложным является интегрирование на отрезке  $[0, \omega_s]$ , поскольку на этом участке функция сильно осциллирует и имеет острые пики. Такой характер подынтегральной функции затрудняет процедуру численного интегрирования.

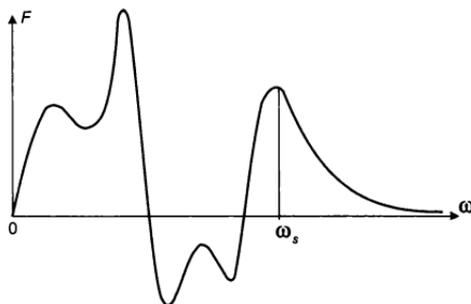


Рис. 10.32. Типичный график подынтегральной функции

Наиболее предпочтительными при интегрировании таких функций являются адаптивные квадратурные процедуры, целью которых служит получение результата с предписанной точностью за малое (по

возможности) машинное время. Описание такой процедуры дано в [Форсайт и др., 1980].

На интервале  $[\omega_s, \infty]$  подынтегральная функция убывает и является достаточно полой. Сложность при вычислении этого интеграла заключается в том, что он имеет бесконечный верхний предел, который при численном интегрировании следует заменить конечным. Однако здесь можно воспользоваться свойством асимптотически экспоненциального затухания, что дает возможность получить хорошую оценку «реального верхнего предела» интегрирования.

Формирование матрицы ковариаций обобщенных координат размером  $m \times m$  ( $m$  — число обобщенных координат) требует значительных вычислительных ресурсов. С целью сокращения объема вычислений полезно рассмотреть возможные упрощения вычислительного процесса. Подобный анализ содержится в работах Петрова и Базилевского [1977, 1979], который показывает, что величина взаимной корреляции  $r$ -й и  $s$ -й форм собственных колебаний  $\langle y_r, y_s \rangle$  по отношению к основным членам  $\langle y_r, y_r \rangle$  и  $\langle y_s, y_s \rangle$  может быть оценена с использованием приближенной зависимости

$$\langle y_r, y_s \rangle / \langle y_r, y_r \rangle \cong \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma^2} \left( 1 - \frac{\omega_r}{\omega_s} \right)^2} = \Delta_{rs}. \quad (10.181)$$

Использование формулы (10.181) позволяет предварительно оценить величину побочных элементов матрицы ковариаций и не вычислять те интегралы, для которых оценка (10.181) дает малое, по сравнению с единицей, значение. Так, например, при  $\omega_r = 3\omega_s$  и  $\gamma = 0,1$  оценка (10.181) дает значение 0,005, и соответствующий интеграл вряд ли следует учитывать.

# 11. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Самолеты позволяют летать, но добраться до аэропорта приходится самому.

**В. Босс.** Лекции по математике.— М.: КомКнига, 2005

Опыт проектной работы последних десятилетий показывает, что развитие средств автоматизации инженерных расчетов оказывает самое серьезное (увы, как положительное, так и отрицательное) воздействие на качество расчетных обоснований проектных решений. Тот уровень детальности и точности расчета, который сегодня доступен проектировщикам в массовом порядке, вчера еще был недостижим даже для наиболее квалифицированных организаций и специалистов. Вместе с тем массовая доступность современных мощных расчетных вычислительных комплексов (в дальнейшем ВК) создает и целый ряд новых проблем. В особенности остро эти проблемы встают при проектировании высокоответственных объектов, где цена любой ошибки может оказаться очень большой.

## 11.1. Дублирование расчетов как мера защиты от ошибок

В качестве меры повышения качества расчетных обоснований проектных решений, Главгосэкспертиза России высказала предложение

*«...осуществлять расчеты не менее чем по двум сертифицированным, независимо разработанным и проверенным в практике программным комплексам, проводить сопоставительный анализ полученных результатов»<sup>1</sup>.*

---

<sup>1</sup> Письмо Главгосэкспертизы России №24-10-3/1281 от 28.06.04

Названная проблема имеет технический, юридический и организационный аспект. Сформулировав ее, Главгосэкспертиза безусловно сделала важное дело, однако во многом поднятые вопросы остались без надлежащих ответов, т. е. и здесь «хотели, как лучше, а получилось, как всегда».

### 11.1.1. Что такое «независимо разработанные» программные комплексы

подавляющее большинство программных систем основаны на одних и тех же предпосылках (например, на методах конечно-элементного анализа), при этом разработчики заимствуют любые доступные (опубликованные в научной печати, описанные в документации, подсмотренные на демонстрациях и т. п.) находки своих конкурентов. В идейном плане «независимая разработка» представляет собой мираж (не путать с программой МИРАЖ).

В статье [Городецкий и др., 2005] обращается внимание на то, что независимо разработанные ВК могут использовать различные модификации однотипных алгоритмов и численных методов, что обуславливает различие в результатах. И далее утверждается, что указанное различие

*«...возрастает при недостаточно корректном использовании программного комплекса, при применении расчетных схем, не соответствующих его возможностям и особенностям. Поэтому такая ситуация может свидетельствовать о допущенных просчетах...».*

Однако указанный тип ошибок (неправильное использование ВК применительно к некоторой конкретной расчетной схеме) является достаточно редким явлением. Если одна и та же схема дает сильно отличные результаты после расчета по разным программам, то, скорее всего, следует думать о поиске ошибки в одной из программ, а не о дефектности расчетной модели.

В чем же тогда смысл требования «независимости»? Наверное, в попытке избежать ошибок, которые могут быть присущи однотипным расчетным моделям. Думается, что здесь следовало бы говорить о программных системах, основанных на различных подходах к формированию и описанию расчетной модели объекта. Но тогда не меньшую (скорее, большую) доказательную силу имело бы сопоставление результатов расчета по двум (нескольким) расчетным

моделям, независимо от того, реализованы ли они в различных и «независимо разработанных» программных комплексах или в одном.

### 11.1.2. Использование разных расчетных схем.

При проектировании современных ответственных объектов все чаще используются весьма сложные и чрезмерно детализированные расчетные схемы. Избыточная детализация системы в целом часто является реакцией расчетчика на потребность в уточненных данных по экстремальным результатам при отсутствии предварительной информации о месте появления такого результата. Тогда на всякий случай применяется детализированная расчетная схема, которая возможно позволит не пропустить необходимый результат.

Но нужно учитывать, что указанный результат может быть все равно упущен из-за трудности анализа и осмысления избыточной информации. Дело в том, что, начиная с некоторого уровня сложности системы, способность человека формулировать осмысленные и точные утверждения о поведении системы начинает резко падать. Здесь имеет место некоторый аналог принципа неопределенности Гейзенберга в отношении детальности и информативности результатов расчета, которые выступают в роли альтернирующих параметров.

Имея дело с задачами большой размерности, расчетчик вряд ли сумеет в одной расчетной модели отразить все ее особенности так, чтобы не просто получить некоторый набор результатов, а сделать это доступным для понимания и качественного анализа. Наиболее полное и многостороннее представление может быть получено в том случае, когда конструкция представлена целой серией моделей, каждая из которых посвящена другой характерной черте сооружения.

Так, например, телевизионная башня, представленная на рис. 11.1, рассчитывалась:

- как консольный стержень переменной жесткости для оценки ее динамических характеристик,
- как пространственная ферма с неразрезными поясами — для определения невыгодных комбинаций усилий и их расчетных значений усилий в стержнях,
- как оболочечная система (фрагментарно) — для определения напряженно-деформированного состояния узловых соединений,
- совместно с грунтовым основанием — для определения длительных осадок и кренов и т.д.

Таким образом, использование нескольких расчетных схем, которые, в какой-то мере взаимно дополняют друг друга и ориентированы на различные свойства системы, позволяет провести более убедительный анализ.

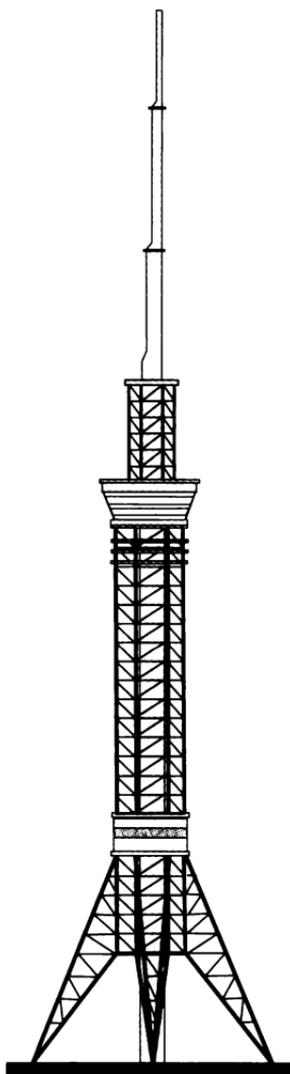


Рис. 11.1. Схема телебашни

При этом одновременно достигается и другой результат, парируются возможные ошибки, поскольку необходимость в объяснениях расхождения результатов расчета по разным схемам, довольно быстро локализует причины таких расхождений. Но отсюда также следует вывод о бесполезности (а возможно и вредности) использования конверторов исходных данных из одной программы в другую, если иметь в виду, что обе программы фактически оперируют с одной и той же расчетной моделью (и с одними и теми же возможными ошибками).

Мы говорим о возможном вреде только в том смысле, что выполнение расчета по двум программам, но с одной и той же расчетной моделью, провоцирует порождение опасной иллюзии двойного контроля и, якобы, двойной надежности результатов инженерных расчетов.

Другое дело, что области применения различных программных систем, как правило, пересекаются, но не совпадают. Это означает, что существуют модели, которые могут быть в принципе обработаны по одним программам, и не предусмотрены для обработки в других программах.

Так, например, в различных расчетных программах могут быть реализованы различные варианты теории оболочек. В этих случаях конверторы данных [Городецкий, 2005] могут использоваться, но не как инструмент верификации программного продукта или проверки корректности расчета, а как инструмент, сокращающий трудозатраты при переходе от одной из расчетных моделей к другой.

Следует отметить, что насыщение библиотек конечных элементов оказывается различным в разных программных комплексах, при этом внешне похожие элементы, изображение которых на расчетных схемах одинаковы, могут иметь сильно отличающееся «наполнение». Типичным примером может служить конечные элементы оболочек обладающие (или не обладающие) дополнительной степенью свободы вращения вокруг нормали (*drilling rotation*). Эти элементы для многих случаев показывают высокую степень точности, однако при их использовании в сочетании с другими элементами возможны и определенные осложнения, о чем говорилось ранее в главе 5.

### 11.1.3. Как проводится сопоставительный анализ

В упомянутом письме Главгосэкспертизы отмечается, что результаты расчета

*«могут значительно отличаться для сложных объектов при использовании различных ВК и при использовании различных расчетных моделей».*

Целиком соглашаясь со вторым утверждением, хотим возразить по поводу первого. Существенное различие результатов для одной и той же расчетной модели при ее проверке разными программными кодами говорит лишь о наличии ошибок в одном из них, и поскольку предполагается использование сертифицированных и апробированных программ, то здесь имеется явное противоречие.

Расчетное обоснование проектных решений это многоэтапный процесс, в котором, как минимум, следует различать две основные части: определение напряженно-деформированного состояния (НДС) и проверку принятых сечений (или армирования).

Следует иметь некоторую меру, с использованием которой принимается решение об удовлетворительном (не удовлетворительном) результате сопоставления. Ведь в инженерно-технических расчетах полного совпадения результатов не бывает. Общепринятая норма схожести в виде пятипроцентного расхождения также должна быть конкретизирована, и необходимо уточнить к каким результатам (перемещения, усилия и т.п.) и к каким значениям (экстремальные, средние или другие) она должна относиться. Ведь трудно себе представить, что с пятипроцентной точностью будут совпадать результаты, чьи значения близки к нулю.

Кроме того, массив результирующей информации у скольнибудь нетривиальной расчетной задачи настолько велик, что следовало бы

позаботиться об автоматизации процесса сопоставления результатов полученный в различных вариантах расчета. Здесь может помочь опция вывода результатов расчета в программу EXCEL, с помощью которой можно организовать сопоставление. Но именно на этом этапе и понадобятся те правила игры, о которых говорилось ранее.

#### **11.1.4. О возможном нормировании правил определения НДС**

Требования и рекомендации по выбору расчетных моделей обычно обосновываются специальными исследованиями, результаты этих исследований закрепляются традицией и практикой проектирования, а иногда (достаточно редко, впрочем) отражаются в нормах проектирования. Этими же нормами могут быть определены и возможные конструктивные решения, обеспечивающие реализацию принятых расчетных предпосылок. К сожалению, эти положения не очень часто выполняются на практике. Требования норм, как правило, связаны с определенной расчетной моделью, но ее описание в нормативном документе не приводится и создается ложное впечатление универсальности нормативного требования. Если при этом нормативное требование построено на использовании достаточно грубой расчетной модели, то зачастую создается следующая парадоксальная ситуация — уточнение расчетной модели приводит к менее экономичным решениям, чем те, которые основаны на грубой модели нормативного документа.

По-видимому, правильным выходом из рассматриваемой ситуации является установление некоторых правил обоснования расчетных моделей. Первый шаг в этом направлении сделан разработчиками Еврокода [EN 1990, 2001], в который включено специальное приложение с указанием правил обоснования значений тех или иных параметров, входящих в расчетные зависимости норм. В этом же документе четко оговаривается, что в случае использования расчетных моделей, которые не имеют надежного теоретического обоснования или же не подтверждены практикой строительства, требуется экспериментальное подтверждение их пригодности. Кроме того, в других частях Еврокода даются рекомендации относительно применения линейного или нелинейного расчета, в зависимости от соотношения некоторых параметров конструкции.

Представляется, что, как минимум, должны быть опубликованы хотя бы грубые описания тех расчетных моделей, на которые ориентировались составители нормативных документов. В настоящее время такие сведения найти весьма затруднительно.

Некоторые нормативные документы рекомендуют использовать нелинейный расчет. Вообще, учесть эффекты геометрической и физической нелинейности для большинства используемых расчетных схем современных зданий и сооружений в принципе не очень сложно. Попытка преодоления условности линейного расчета путем выполнения расчета в «физически нелинейной постановке» будет оправдана лишь в том случае, когда такой расчет является корректным (например, пластическое поведение материала не заменяется нелинейно-упругим<sup>2</sup>), но отсутствие четких сведений о том, каков же подход реализован в программной системе и каковы ограничения на его применение и здесь создает определенные препятствия.

Однако сложности начинаются после выполнения нелинейных расчетов. Дело в том, что если не выполняется принцип суперпозиции, то неизвестно что нужно делать с результатами нелинейных расчетов, выполненных для различных случаев нагружения системы. Выделить одно определяющее нагружение из множества возможных в большинстве случаев не удастся, а систем, работающих только на один вариант нагружения, практически не бывает.

Таким образом, приходится мириться с тем, что большинство массовых расчетов будет выполняться по схемам, для которых адекватность реальной работе сооружения достаточно сомнительна, и необходимая «балансировка» будет достигаться путем использования некоторых усредненных поправочных коэффициентов (таких, как коэффициент условий работы  $\gamma_c$ ), значения которых обосновываются экспериментально. В этих условиях еще большему сомнению следует подвергнуть увлечение использованием переусложненных расчетных схем.

---

<sup>2</sup> Полезно заметить, что в формулировках п. 1.8. СНиП II-23-81\* и п. 1.15. СНиП 2.03.01-84\* говорится именно о неупругих (т.е. необратимых) деформациях

## 11.2. Расчет на прогрессирующее разрушение

### 11.2.1. Прогрессирующее разрушение, как научно-техническая проблема

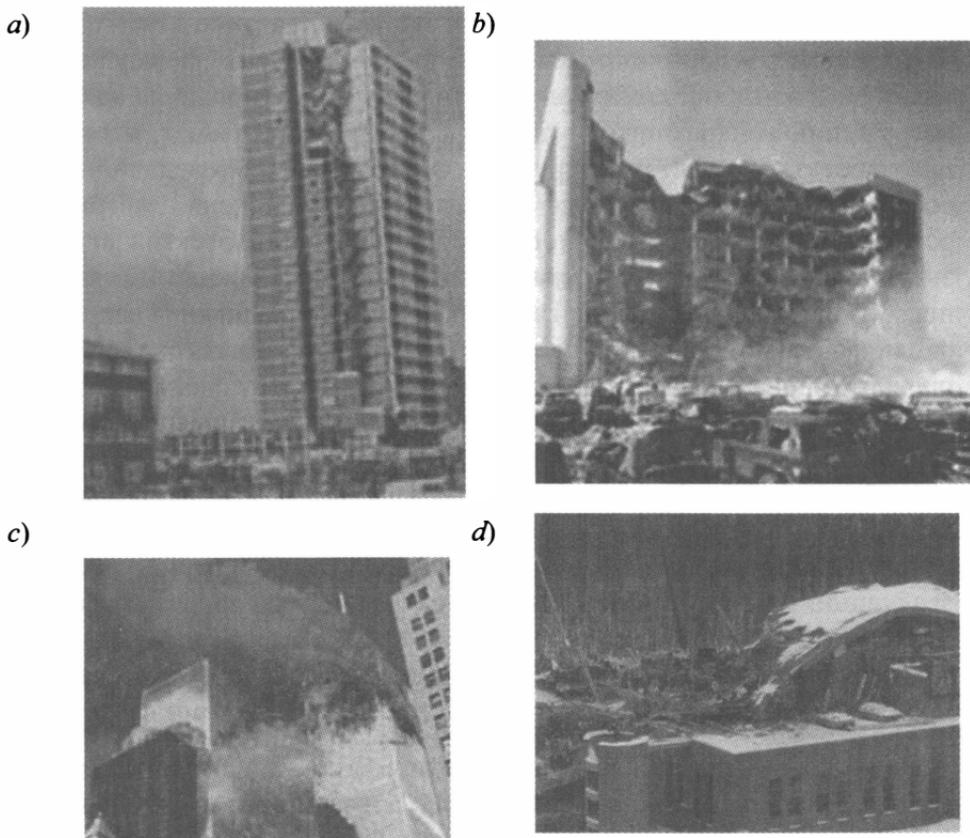
Термин «прогрессирующее обрушение» и формулировка проблемы защиты от него панельных зданий появился в 1968 году в докладе комиссии [Богданова, 1991], расследовавшей причины известной аварии 22-этажного жилого дома Ronan Point в Лондоне (рис. 11.2,*a*). Это драматическое событие началось с взрыва газа в одной из квартир на 18-ом этаже, вызванного утечкой в газовой плите. Наружные панели здания были запроектированы, чтобы выдержать только давления ветра, и после разрушения на одном этаже была потеряна возможность передачи вертикальной нагрузки от верхних этажей. Обломки из перекрытий с 18 до 22 этажа упали на перекрытие 17 этажа, что породило цепочку отказов перекрытий, поскольку нагрузка обломков превысила грузоподъемность отдельного перекрытия. Результатом было то, что разрушился целый угол здания выше и ниже места взрыва.

В здании Ronan Point были выполнены все строительные нормы и правила, и было установлено отсутствие производственных дефектов. Но прогрессирующее обрушение было неизбежным, поскольку схема конструкции была аналогична карточному домику, то есть она не имела никакой возможности перераспределить нагрузку на отдельные подсистемы и тем самым локализовать отказ.

Новую волну активности вызвали обрушения, вызванные террористическими атаками на высотное здание в Оклахома Сити (рис. 11.2,*b*) и на башни Центра мирового торговли в Нью-Йорке (рис. 11.2,*c*), а у нас — разрушение покрытия над аквапарком в Москве (рис. 11.2,*d*). Некоторые публичные выступления, зачастую неквалифицированные, породили слухи, сомнения и нереальные требования. Даже в публикациях профессионалов встречаются ссылки на некоторые мифы, относящиеся к якобы абсолютной живучести сооружений старой проектировки, в которых могут находиться люди (см., например, [Ларионов, 2004]), или же, наоборот, к полному пренебрежению возможностью появления аварийной ситуации и необходимости абсолютной гарантии неразрушимости объектов.

Вместе с тем анализ, выполненный разными исследователями, практически во всех развитых странах четко выявил следующие положения:

- никакими экономически оправданными мерами невозможно полностью исключить возможность локальных разрушений несущих конструкций зданий;
- прогрессирующее обрушение ведет к наиболее тяжелым последствиям;
- зачастую, при сравнительно небольших местных разрушениях несущих конструкций зданий, обеспечение их устойчивости против прогрессирующего обрушения может быть достигнуто простыми и не дорогостоящими техническими средствами.



**Рис. 11.2.** Здания подвергнувшиеся прогрессирующему разрушению: *a* — Ronan Point; *b* — здание в Оклахома Сити; *c* — Центр мировой торговли в Нью-Йорке; *d* — покрытие аквапарка

Нормативные документы по проектированию несущих конструкций практически не говорят ничего в явной форме о

необходимости проведения проверки конструкций на живучесть, т.е. о необходимости отслеживать ситуацию после отказа какой-нибудь из частей или подсистем несущего каркаса [Перельмутер, 1995]. Правда, имеется указание ГОСТ 27751-88, где в пункте 1.10 сказано, что при расчете конструкций должна рассматриваться аварийная расчетная ситуация, возникающая непосредственно после отказа какого-либо элемента конструкции. Но формулировка ГОСТ недостаточно конкретна, поскольку вряд ли можно подразумевать, что проектировщик обязан обеспечить существование объекта после отказа любого элемента конструкции. Достаточно представить себе любое купольное покрытие с разрушенным опорным кольцом или мост с разрушившейся опорой, чтобы потребовать закрытия практически всех храмов и прекращения движения по всем мостам.

Очевидно, что требуется конкретизировать указание ГОСТ 27751-88, например, дополнив его требованием, чтобы формулировки отказных состояний содержались в нормах проектирования зданий и сооружений конкретного типа. По сути, так и поступают, например, при проектировании конструкций линий электропередачи, где в соответствующих правилах указывается перечень аварийных режимов. Аналогична идеология проектирования объектов атомной энергетики, где, в частности, принципиально важными является использование таких понятий, как проектная и запроектная авария.

Защита зданий в аварийных проектных ситуациях должна быть предусмотрена заранее и определяется соответствующими нормами проектирования, для несущих элементов она реализуется, в частности, в форме создания необходимых запасов несущей способности, обеспечивающих недопущение разрушений. Защита зданий в запроектных ситуациях ориентирована не на недопущение разрушений, а на обеспечение безопасности людей и возможности их эвакуации, на реализацию необходимого для этого запаса времени и т. п.

Оценка возможности прогрессирующего разрушения и выработка мер его предотвращения ставит перед проектировщиками следующие нетрадиционные задачи:

- определение списка стартовых аварийных воздействий, вызывающих локальное разрушение;
- выработку методики расчета сложных многоэлементных конструкций на внезапное разрушение одного или нескольких несущих элементов;
- установление критериев выхода из строя несущих элементов, перегруженных в результате аварийного воздействия;

- выработку конструктивных мер защиты и смягчения последствий аварийного воздействия.

К научному решению многих из этих проблем и, в особенности, к их нормативному оформлению чаще всего еще и не приступали, хотя здесь и имеются некоторые пионерные разработки.

### 11.2.2. Исходные события

Как показывает анализ чрезвычайных ситуаций наиболее частыми исходными событиями, приводящими к запроектным авариям, являются локальные аварийные воздействия на отдельные конструкции одного здания: взрывы, пожары, карстовые провалы, наезды транспортных средств, дефекты конструкций и материалов, аварии инженерных систем здания, некомпетентная реконструкция и т.п. Это случайные, в общем случае непредсказуемые воздействия, параметры которых очень трудно определить.

Наши общестроительные нормы не приводят данные о значениях аварийных воздействий, такие сведения отрывочно присутствуют в нормативных документах другого типа. Представляется, что было бы полезным иметь нормативный документ, в котором приведены правила определения нагрузок для таких массовых ситуаций аварийного характера, как удары при наездах автотранспортных средств, падения грузов, промышленные взрывы и т.п. Данные о некоторых из нагрузок такого рода содержатся в главе Еврокода-1 [EN 1990, 2001], многие из них традиционно учитываются при проектировании объектов атомной энергетики.

Было также предложено вместо реальных запроектных аварийных воздействий рассматривать их условные аналоги или уже вызванные ими локальные повреждения. В частности, Рекомендации Москомархитектуры [2002] приводят следующий список таких исходных событий:

- образование карстовой воронки диаметром 6 м, расположенной в любом месте под фундаментом;
- повреждение перекрытия общей площадью до 40 м<sup>2</sup>;
- разрушение двух пересекающихся стен на участке от их сопряжения (в том числе и от угла) до ближайшего проема или до следующего пересечения, но на длине не более 3м;
- разрушение любого из простенков наружной стены или внутренней стены между двумя дверными проемами;

- появление в пределах одного этажа горизонтальной нагрузки на вертикальные элементы (на стержнях сосредоточенная сила 3,5 т, на стенах и диафрагмах 1 т/м<sup>2</sup>).

Этот список косвенно указывает и на то, что небольшие строения, габариты которых сопоставимы с размерами «локальных» повреждений не имеет смысла проверять на возможность прогрессирующего разрушения. Поэтому целесообразно установить некоторые критерии для отбора объектов анализа и здесь целесообразно иметь классификацию зданий и сооружений по таким признакам:

- объекты класса 1, при проектировании которых возможность возникновения аварийных ситуаций не принимается во внимание;
- объекты класса 2, в которых все конструкции могут быть защищены от аварийных повреждений за счет за счет увеличения несущей способности или применения защитных устройств;
- объекты класса 3, некоторые конструктивные элементы которых невозможно защитить от аварийных повреждений, что потребует проверки на прогрессирующее разрушение.

Естественно, что эта классификация не может быть инвариантной по отношению к списку исходных событий, поэтому, скорее всего, она должна быть представлена в нормах проектирования зданий и сооружений определенного типа. Там же, возможно, следует указывать список исходных ситуаций, которые могут породить процесс прогрессирующего разрушения.

### 11.2.3. О динамических эффектах

Оценка динамических эффектов, возникающих при мгновенном разрушении конструктивных элементов имеет существенное значение для прогнозирования резервов прочности и описания процесса прогрессирующего разрушения, в котором имеются, как минимум, два четко выраженных динамических эффекта, возникающих вследствие мгновенного разрушения элементов и вследствие соударения падающих фрагментов на другие части здания.

В целях анализа первого из упомянутых динамических эффектов в последние годы было опубликовано несколько работ, результаты которых в той или иной мере вошли в нормативные документы. Мы не будем здесь останавливаться на этой проблеме, отослав читателя к специальной литературе, в которой приводится математическая

постановка соответствующей задачи механики (см., например, работы [Бондарев, Нгуиен Тханх Суан, 2010], [Чернов, 2010] и др.).

Перейдем к оценке динамического влияния падающих обломков. Простейший анализ этого явления может основываться на теории упругого удара.

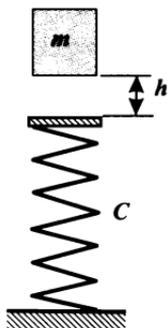


Рис. 11.3. Модель удара

Заметим, что при ударе перемещение падающей части сооружения равно  $[h+(P/C)]$ , где  $C$  — жесткость той части сооружения, на которую падают обломки,  $P$  — сила удара и  $h$  — высота падения (рис. 11.3), которая обычно равна высоте этажа, но может и отличаться от нее. Если пренебречь диссипацией энергии, т.е. считать, что верхняя часть сооружения с массой  $m$  достигает нижней части в свободном падении, то можно приравнять потерю гравитационной части энергии к энергии деформирования нижней части при максимальном упругом перемещении.

Отсюда получаем уравнение

$$mg[h+(P/C)] = P^2C/2, \quad (11.1)$$

из которого можно найти коэффициент динамичности для силы удара

$$\frac{P}{mg} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch}{mg}}. \quad (11.2)$$

Расчеты выполненные по этой методике [Bazant, Yong Zhou, 2002] для северной башни Центра мировой торговли, где  $C=71 \times 10^9$  Н/м, а  $m=58 \times 10^6$  кг, дали значение коэффициента динамичности равное 31. Это завышенная оценка, поскольку рассматривалось падение верхних этажей как единого жесткого целого.

#### 11.2.4. Оценка поведения элементов

Большие трудности возникают при решении вопроса о фактических условиях разрушения элементов конструкции. Использование нормативного подхода и отождествление предельного состояния по нормам проектирования с разрушением вряд ли корректно, поскольку формулировка нормативного подхода связана с использованием целого ряда предположений принимаемых в запас прочности (например, гипотеза о наихудшем качестве материала,

отождествление краевой текучести с разрушением и т.п.). Часть упомянутых предположений могут быть проигнорирована, как например сделано в рекомендациях Москомархитектуры [2002], где предлагается использовать вместо расчетного сопротивления материала его нормативное значение, однако некоторая неопределенность при оценке прочности все же остается.

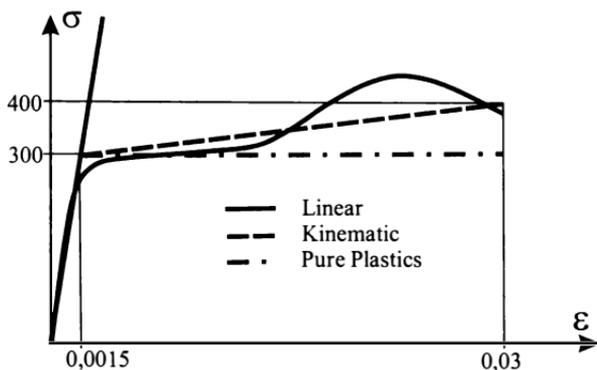


Рис. 11.4. Реальная и идеализованные диаграммы работы

В работе [Choi, Krauthammer, 2003] было выполнено сопоставление результатов расчета при трех различных гипотезах о причинах разрушения элементов многоэтажного здания со стальным каркасом (рис. 11.4), которые были представлены в виде идеализованных диаграмм работы материала:

- Linear — линейное поведение до напряжения  $4000 \text{ кг/см}^2$ ;
- Pure Plastics — идеальная текучесть на уровне напряжения  $3000 \text{ кг/см}^2$ ;
- Kinematic — линейное упрочнение от  $3000 \text{ кг/см}^2$  до  $4000 \text{ кг/см}^2$ , отказ при относительном удлинении 0,03.

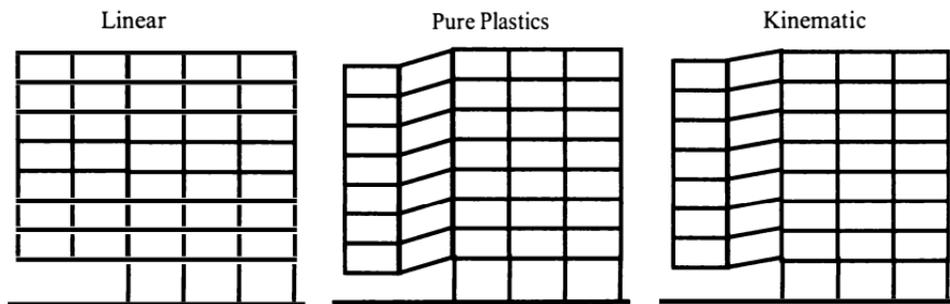


Рис. 11.6. Состояние системы при  $t=0,871$  сек

На рис. 11.5 показаны сопоставительные результаты расчетов многоэтажной рамы с выбитыми колоннами первого этажа. Расчет

выполнялся с помощью программы ANSYS методом интегрирования уравнений движения. Результаты расчетов мало отличаются один от другого.

Гораздо большую роль играет геометрически нелинейное поведение, поскольку поврежденный каркас приобретает значительные перемещения (в особенности при учете воздействий от пожара) — характерная картина представлена на рис. 11.6.



**Рис. 11.6.** Деформации поврежденного каркаса

Учет геометрической нелинейности может изменить оценку поведения системы на порядок если только схема конструкции и место локального повреждения таковы, что могут быть восприняты возникающие при провисании перекрытий усилия распора. По сравнению с учетом физической нелинейности здесь вскрываются значительно большие резервы, и здесь уместно процитировать рекомендацию международного стандарта [ISO/CD 19902] пункт 12.4.3.3 которого гласит:

*«...Чтобы продемонстрировать, что демонтаж поврежденного элемента не приведет к прогрессирующему обрушению может быть использован линейный упругий анализ.. Нелинейный анализ может использоваться, чтобы моделировать перераспределение результатов действия, когда превышены пределы несущей способности элементов».*

### **11.3. Схемная характеристика живучести**

Расчет на прогрессирующее разрушение обладает тем недостатком, что исследуемая «коллекция» исходных событий является в

достаточной мере размытой и всегда остается некоторая доля сомнения по поводу ее полноты. Вот что говорит по аналогичному поводу В.И.Феодосьев [1981]:

*«... известен полный драматизма полет "Аполлона-13" в апреле 1970 г., когда в служебном отсеке корабля, находившегося на расстоянии 330 тыс. км от Земли, произошел взрыв кислородного баллона электроэнергетической системы, вырабатывающей к тому же и кислород для жизнеобеспечения астронавтов... Проявляя и самообладание и мужество, устраняя на каждом шагу новые возникающие неполадки, астронавты сумели воспользоваться системой жизнеобеспечения лунного корабля и с крайне ограниченными запасами кислорода на четвертые сутки аварийного полета совершили благополучную посадку. ...То обстоятельство, что имевшие место серьезные отказы не вывели систему из-под контроля, говорит еще и о ее живучести.*

*В технике под живучестью понимается свойство системы подобно живым организмам компенсировать отказ одного элемента передачей его функций другим. Так, в частности, выход из строя бокового двигателя второй ступени "Аполлон-6" не повлек за собой потери управления. Эти функции взяли на себя другие двигатели. Функции многих систем основного отсека "Аполлона-13" взяли на себя системы лунного корабля. Но отказ отказу - рознь. Поэтому понятие живучести весьма относительно».*

В связи с относительностью понятия живучести применительно к различным возможным наборам исходных событий в работе [Перельмутер, 1995] было предложено оценивать схемную живучесть системы, основываясь лишь на структуре системы. Естественно, что характеристики такого рода позволяют лишь качественно сопоставлять различные варианты схем, однако и такое сопоставление может оказаться полезным.

Следуя [Феодосьев, 1981], живучесть рассматривается как свойство системы сохранять при катастрофических возмущениях способность к выполнению основных функций, не допуская каскадного развития возмущений и отказов, что в конце концов обеспечивает последующее восстановление системы. Имея в виду, главным образом, оценку структурных свойств несущих систем, будем понимать под возмущением выход из строя (исключение из системы) какого-нибудь из элементов, а под основной функцией, подлежащей

сохранению, сохранение геометрической неизменяемости всей системы или ее определенной части.

Рассматривая возмущения в виде полного выхода из строя элементов системы, отметим, что они чаще всего являются следствием аварийных воздействий или грубых ошибок персонала. Типичными примерами могут служить случаи, когда при монтаже "забывают" выполнить соединение (сварной шов или болтовой стык) или же в процессе эксплуатации удаляют "мешающие" связи. Такие возмущения плохо поддаются статистическому анализу, однако можно предполагать, что вероятность встретиться с ними растет с увеличением числа элементов в системе  $n$ , хотя и медленнее, чем линейно, поскольку вместе с усложнением системы обычно возрастает и тщательность контроля.

Представляется подходящей зависимость  $P = C \ln(n)$  для вероятности встретиться с возмущением рассматриваемого типа. При этом константа  $C$  должна быть достаточно малой, поскольку речь идет о редких событиях. Что же касается вероятности поражения конкретного элемента, то будем считать элементы в этом отношении равноценными и полагать ее равной  $P_e = 1/n$ , что в конце концов дает для любого элемента  $P = C \ln(n)/n$ .

Если обозначить через  $x_i$  логическую переменную, свидетельствующую о выходе из строя  $i$ -го элемента значением  $x_i = 1$  и о его работоспособности значением  $x_i = 0$ , то свойство неизменяемости системы можно определить как логическую функцию  $n$  логических переменных  $Y = Y(x_1, \dots, x_n)$ , принимающую значение  $Y = 1$  для неизменяемой и  $Y = 0$  — для изменяемой систем. В качестве меры живучести предлагается использовать величину

$$\begin{aligned} \eta_y = & (1 - 1/n)^{(n-1)} (1/n) \sum_{i=1}^n Y_i + (1 - 1/n)^{(n-2)} (1/n)^2 \sum_{j < i}^n \sum_{i=1}^n Y_{ij} + \\ & + (1 - 1/n)^{(n-3)} (1/n)^3 \sum_{j < i}^n \sum_{i < k}^n \sum_{k=1}^n Y_{ijk} + \dots \end{aligned} \quad (11.3)$$

где обозначено

$$Y_i = \{Y(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 1, x_s = 0 \ (i \neq s)\},$$

$$Y_{ij} = \{Y(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 1, x_j = 1, x_s = 0 \ (i, j \neq s)\},$$

$$Y_{ijk} = \{Y(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 1, x_j = 1, x_k = 1, x_s = 0 \ (i, j, k \neq s)\}.$$

Количество слагаемых в формуле (11.3) не превышает степень статической неопределенности  $r$  и при этом каждое последующее

слагаемое меньше предыдущего, поскольку коэффициенты перед суммами  $K_j = (1 - 1/n)^{(n-j)}(1/n)^j$  находятся в соотношении  $K_{j+1}/K_j = 1/(n - 1)$ .

Часто в роли показателя качества системы может выступить не свойство ее геометрической неизменяемости, а размер остающегося жестким остова, т.е. считается, что некоторые разрушения с превращением в механизм возможны, но это не должно носить глобального характера. Если избрать в качестве оценочной функции относительное количество узлов, входящих в остающийся жестким остов, то в (8.3) вместо  $Y_i, Y_{ij}, Y_{ijk}...$  следует вводить величины  $D_i, D_{ij}, D_{ijk}, \dots$ , характеризующие это относительное количество при условии выбытия одного, двух, трех и т.д. элементов системы. Указанный способ оценки определяет при этом, например, сложность и стоимость восстановления конструкции.

Использование оценок  $D$  вместо  $Y$  дает новую меру

$$\eta_d = (1 - 1/n)^{(n-1)}(1/n) \sum_{i=1}^n D_i + (1 - 1/n)^{(n-2)}(1/n)^2 \sum_{j<i}^n \sum_{i=1}^n D_{ij} + \\ + (1 - 1/n)^{(n-3)}(1/n)^3 \sum_{j<i}^n \sum_{i<k}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} + \dots \quad (11.4)$$

пригодную для оценки структурной живучести и статически определимых систем, для которых мера  $\eta_d$  была равна тождественно нулю. При этом число слагаемых в (11.4) уже будет большим, чем  $(r-1)$ , однако свойство их сильного затухания останется, что дает возможность ограничиться при реальных расчетах относительно небольшим числом членов ряда.

Идея секционирования схемы на несвязные подсистемы, когда такая изоляция прерывает лавинообразное развитие отказов, хорошо известна, ибо еще при строительстве сказочного Ноева ковчега самим Богом было указано:

*«Отделения сделай в ковчеге и осмоли его изнутри и снаружи ... и сделай его из дерев гоффер и нимотриклин».*

В технике такой подход давно применяется при строительстве линий электропередачи, в которых анкерные опоры являются тем стопором, через который не может перейти процесс последовательного обрушения промежуточных опор. Аналогична идея использования несвязных отсеков для обеспечения непотопляемости корабля. Здесь только можно добавить, что само секционирование может быть реализовано в двух вариантах: в форме непреодолимой преграды, которая не разрушается при

последовательных отказах (идея брандмауэра), или же в форме создания автономных подсистем, физически отделенных друг от друга (идея противопожарного разрыва). Может также использоваться идея локализации подконструкций с использованием разрушающегося элемента, который выступает в роли предохранителя (идея электрической пробки) снимающего с локализованной подсистемы возможные перегрузки.

Имеет также смысл ввести меры:

$$\xi_{yi} = \eta_y - (\eta_y | x_i=0), \quad \xi_{di} = \eta_d - (\eta_d | x_i=0) \quad (i=1, \dots, n), \quad (11.5)$$

где вычитаемые члены определяются по той же формуле (11.3) или (11.4), но при условии обязательного присутствия во всех рассматриваемых вариантах схем  $i$ -го элемента ( $x_i \equiv 0$ ). С помощью этих мер можно оценить вклад каждого элемента в структурную живучесть системы и произвести их ранжирование по важности [Феодосьев, 1981].

Рассмотрим в качестве примера шесть схем (три статически определимые и три однократно статически неопределимые), изображенные на рис. 11.7, *a* — 11.7, *f*.

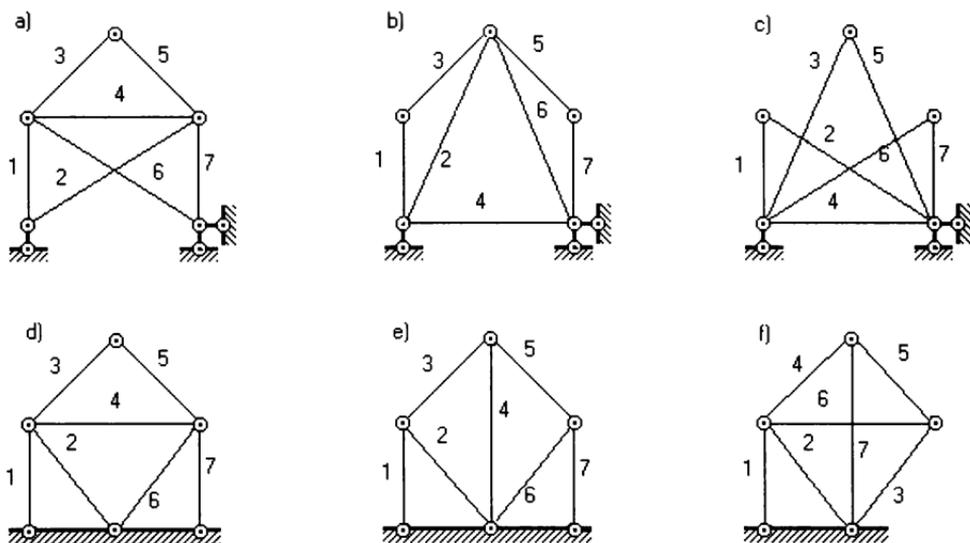


Рис. 11.7. Структуры семистерневых (*a* - *f*) ферм с различными показателями живучести

Все схемы имеют по три внеопорных узла и по семь элементов. Поскольку для всех схем число элементов одинаково, то вероятность возмущения  $P$  также будет одинакова и поэтому при сравнениях она не учитывалась.

Таблица 11.1

Безот- казные элементы	$E_0$	Суммарное число узлов в остовах для схем конструкций					
		$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
Отсут- ствуют	1	4	8	12	19	21	18
	2	2	8	18	26	26	16
	3	0	4	20	24	22	12
	4	0	1	15	10	10	5
	5	0	0	0	2	2	1
$x_1 \equiv 0$	1	4	6	10	16	18	18
	2	2	4	12	21	20	16
	3	0	1	10	17	15	12
	4	0	0	7	6	6	5
	5	0	0	0	1	1	1
$x_2 \equiv 0$	1	4	8	10	16	18	18
	2	2	8	12	21	20	16
	3	0	4	10	17	15	12
	4	0	1	7	6	6	5
	5	0	0	0	1	1	1
$x_3 \equiv 0$	1	2	6	10	17	18	15
	2	0	4	12	14	16	10
	3	0	1	10	10	9	5
	4	0	0	7	2	2	1
	5	0	0	0	0	0	0
$x_4 \equiv 0$	1	4	8	12	18	18	15
	2	2	8	18	18	18	10
	3	0	4	20	10	8	5
	4	0	1	3	2	2	1
	5	0	0	0	0	0	0

Таблица 11.2

Оценка	Численные значения для схем конструкции (рис.6.6):					
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$\eta_d$	0,082	0,178	0,295	0,453	0,491	0,397
$\xi_{d1}$	0	0,152	0,063	0,076	0,079	0
$\xi_{d2}$	0	0	0,063	0,076	0,079	0,057
$\xi_{d3}$	0,044	0,052	0,063	0,090	0,096	0,080
$\xi_{d4}$	0	0	0,001	0,084	0,084	0,080

Необходимые для подсчетов данные приведены в табл. 11.1, где для всех схем указано суммарное число неподвижных узлов  $E_0$  в остовах, т.е. значения сумм  $\Sigma D$ ,  $\Sigma \Sigma D$  и т.д. в зависимости от числа одновременно выбывающих элементов, определенные для всех

возможных вариантов выбытия элементов, которые не указаны в качестве абсолютно безотказных.

Оценки  $\eta$  и  $\xi$  вычислены по формулам (11.5) и результаты расчетов даны в табл.11.2. Из анализа результатов видна роль безусловно необходимых элементов, можно также заметить, что построение системы с использованием принципа автономизации функций элементов (схема "с") улучшает оценку.

Возможен и другой путь секционирования, когда вводятся дополнительные усиливающие элементы, роль которых сводится к остановке лавинообразного развития разрушений. Обе эти идеи иллюстрируются рис.11.8, где изображены варианты схем, имеющих по девять элементов и по три внепорных узла. Оценки структурной живучести этих схем:  $\eta_d(a) = 0,4997$ ;  $\eta_d(b) = 0,6464$ ;  $\eta_d(c) = 0,8526$ ;  $\eta_d(d) = 1,0751$ . Что касается сопоставления способов секционирования, то, по-видимому, они могут быть достаточно близкими по эффективности, подобно двум широко известным способам противопожарной защиты — устройству несгораемых преград или организации разрывов в застройке.

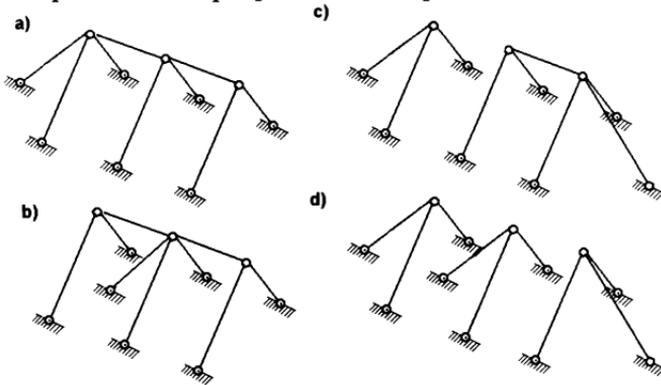


Рис. 11.8. Системы с различными способами секционирования

Возвращаясь к анализу роли безусловно необходимых элементов, отметим, что для систем, которые их не имеют, все члены первой суммы в (11.4) равны единицам. Если обобщить это свойство, предполагая, что и во всех других суммах не исчезнет ни одно слагаемое и каждая из таких сумм получит максимально возможное значение (быть может, и недостижимое ни в какой реальной системе), т. е. когда  $\sum Y_i = n$ , то можно считать такой случай некоторым эталоном живучести, для которого получим:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n; \quad \sum_{i < j} \sum_{j=1}^n Y_{ij} = n(n-1)/2; \quad \sum_{i < j} \sum_{j < k} \sum_{k=1}^n Y_{ijk} = n(n-1)(n-2)/6 \quad (11.6)$$

Тогда вместо (8.3) будем иметь

$$\eta_y = \sum_{i=1}^r \frac{(1-1/n)^{(n-1)} (1/n)^i n!}{i!(n-1)!} = \mathbf{Bi}(r; n; 1/n) - (1-1/n) \quad (11.7)$$

где  $\mathbf{Bi}(r; n, 1/n)$  — функция биномиального распределения.

#### 11.4. О расчетном сопровождении строительного процесса

Обычно в задачах строительного проектирования инженер редко задумывается о том, что сооружение возводится не одномоментно, а проходит в процессе своего возведения целый ряд этапов, на которых сама расчетная схема (модель) подвержена изменениям. На каждом из этапов возведения конструкции ее напряженно-деформированное состояние (НДС) индивидуально, тогда как в конце всего строительного процесса окончательное НДС представляет собой совокупность НДС, накопленных конструкцией на отдельных этапах ее возведения.

Этот процесс не всегда учитывается в проектной практике. Однако следует помнить, что существуют конструкции, когда влиянием процесса возведения на НДС конструкции к моменту начала ее эксплуатации пренебрегать просто нельзя, так как это может привести к качественным изменениям в результатах расчетов. Во всяком случае при сооружении мостов, практика выполнения инженерных расчетов с учетом последовательности возведения моста стала повсеместно нормой грамотного проектирования.

Это становится особенно существенным и важным в условиях применения сложных статически неопределимых систем, в которых в различных целях (например, в целях рационального использования материала или в некоторых технологических целях) применяется регулирование усилий за счет создания начального внутренне самоуравновешенного напряженного состояния.

Надо сказать, что на самой строительной площадке проектные технологические требования производства строительных работ далеко не всегда выполняются. Практически всегда имеются те или иные отклонения от проекта, которые во многом могут исказить условия работы конструкции, а значит и ее НДС. Не будем обсуждать здесь возможные причины отклонений от проекта, в каждом случае они могут быть разными, объективными или субъективными, навеянными чисто человеческим фактором, или какими-либо

обстоятельствами, которые обнаруживаются уже в процессе строительства на момент завершения проектных работ. Важно другое. Если отклонения от проекта по тем или иным причинам допущены, то следует понять, как они (эти отклонения) повлияют на распределение усилий в конструкции, и можно ли что-либо изменить в дальнейшей технологической цепочке по производству строительных работ, чтобы исключить или хотя бы минимизировать негативные последствия таких отклонений.

Дать какие-либо рекомендации в такой общей постановке задачи не представляется возможным, по-видимому в каждом отдельном случае решение будет индивидуальным. Единственным общим моментом в такого рода задачах является то обстоятельство, что работа проектной организации не завершается сдачей проекта заказчику, а продолжается вплоть до ввода сооружения в эксплуатацию. Причем работа эта сопровождается постоянно проводимыми инженерными расчетами.

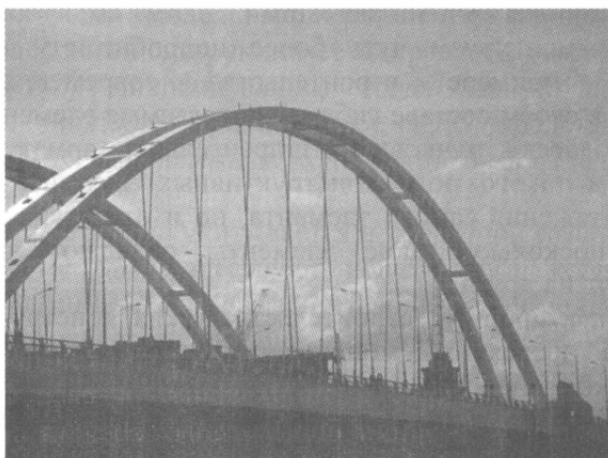
Мы прокомментируем чуть более подробно эту проблему на характерном примере строительства современных мостов, содержащих в своем составе гибкие напрягаемые элементы — ванты, кабельные подвески, пучковую и шпренгельную арматуру. Понятно, что усилия в такого рода конструктивных элементах зависят не только от натяжения самого элемента, но и от натяжения соседних элементов, поскольку такие элементы обладают значительным влиянием друг на друга.

Разумеется, в процессе строительства таких конструкций следует осуществлять постоянный мониторинг, на котором отслеживаются кинематические и силовые параметры системы, перечень которых формирует проектная организация. Эти данные со строительной площадки передаются в проектную организацию, которая не только выполняет инженерный анализ полученных данных, но и на основании такого анализа оперативно вмешивается в строительный процесс, внося соответствующие коррективы в проект производства работ. Рассмотрим, в качестве курьезного, но поучительного примера, инженерное сопровождение процесса возведения арочного моста в г. Астана, Казахстан (рис. 11.9 и рис. 11.10).

Конструкция моста представляет собой две пары арок пролетом 150 м и шириной около 40 м без ветровых связей. Гибкие вантовые подвески, поддерживающие проезжую часть, по проекту предполагалось натягивать в две стадии. На первой стадии каждая из подвесок натягивается на некоторое начальное усилие. Вторая стадия натяжения (дотяжка) преследовала цель обеспечить равенство усилий во всех подвесках по завершению строительства моста.



**Рис. 11.9.** Арочный мост в Астане – вид вдоль проезжей части.



**Рис. 11.10.** Арочный мост в Астане – вид сбоку.

По замыслу проектировщиков одинаковые усилия в подвесках приводят не только к минимизации изгибающих моментов в арке и затяжке, но и обеспечивают равенство распределения усилий в «наружных» и «внутренних» арках.

Предусмотренная проектом схема инженерного сопровождения предусматривала контроль усилий в натягиваемых подвесках и одновременный контроль сближений верхней и нижней точек крепления каждой подвески. Следует отметить, что последовательность натяжения и начальные усилия натяжения были специально подобраны так, чтобы выполнялись следующие ограничительные условия:

- усилие начального натяжения в каждой подвеске не должно быть меньше, чем 10% от разрывного усилия – требование технологического характера, связанное с условиями надежного закрепления прядей вант в анкерных устройствах;
- усилие начального натяжения не может превышать больше определённой величины, установленной компанией, производившей натяжение подвесок.

Оба эти требования были сформулированы компанией, которая являлась как поставщиком вант, так и производителем работ по их натяжению.

На практике выяснилось, что уже при натяжении первых четырёх из пятидесяти шести подвесок на нужную величину зависимость между сближением точек крепления вант и усилием натяжения резко отличается от расчетных данных. Выяснилось, что при натяжении одной пары подвесок (скажем, пары внутренних подвесок) на заданное по проекту усилие замеренное на основании геодезической съемки сближение верхних и нижних точек крепления вант меньше расчетного приблизительно на 30%. В то же время при последующем натяжении второй пары подвесок в этом же поперечном сечении моста (подвески наружных арок) соответствующие перемещения оказались близкими к расчетным данным. Иными словами реальная жёсткость конструкции отличалась в большую сторону от теоретической. Работы по дальнейшему натяжению были приостановлены до выяснения причин происходящего. Было рассмотрено несколько вариантов возможных причин повышения жёсткости: от учета сил трения на временных опорах (натяжение подвесок осуществлялось при поддержке балки жесткости на промежуточных временных опорах) до гипотетического эффекта стеснённого кручения в затяжке, включая и такую причину как недоверие к результатам измерений усилий и перемещений. Ни один из вариантов рассмотренных гипотез не дал убедительного ответа на поставленный вопрос. Тогда было принято решение натянуть ещё две пары подвесок для получения дополнительной информации, которая могла бы высветить причины расхождения теоретических данных с результатами измерений.

Натяжение второй четвёрки подвесок подтвердило наличие повышенной жёсткости конструкции, однако процент ошибки сократился. В результате было принято решение полностью аннулировать предусмотренную проектом последовательность натяжений подвесок, все работы производить по шагам, с пересчетом конструкции на каждом из шагов и коррекцией НДС по результатам

измерений. Порядок последующего натяжения подвесок пришлось изменить, а сами величины натяжений определялись на основе анализа усилий во всех подвесках, в том числе натянутых ранее. Целью всей этой многодельной процедуры была попытка минимизировать ошибки в усилиях натяжения по завершении первой стадии натяжения подвесок.

В ходе дальнейших работ отклонение теоретических и измеряемых данных постепенно падало, что позволило сделать вывод о том, что реальная конструкция арок и затяжек оказалась менее гибкой, но увеличение общей жёсткости по мере натяжения приводило к уменьшению погрешности.

Истина оказалась в другом. Пытаясь «ускорить» процесс монтажа и натяжения подвесок, подрядчик без согласования с проектировщиком «рационализировал» технологический процесс, предварительно смонтировав и натянув в каждой из подвесок по одной вантовой пряди. Понятно, что жёсткость конструкции в целом существенно возросла. Этим объяснялось всё, в том числе и тот факт, что после определённого шага теоретические и практические усилия и перемещения стали совпадать, поскольку натянутые пряди просто-напросто выключились из работы. В конечном итоге, процесс натяжения подвесок занял вдвое больше времени, поскольку сопровождался бесконечными остановками и перемерами. При этом замеренные окончательные усилия вместо положенных 40 тонн варьировались от 10 до 60, что, впрочем, было обусловлено и тем фактом, что некоторые подвески были ошибочно натянуты на большее усилие, а отсутствие оборудования для отпуска усилий в подвесках не позволило понизить замеренное усилие до требуемого.

В результате по завершении первого этапа натяжения вантовых подвесок усилия в них существенно отличались от предусмотренных проектом. Для коррекции ошибок первого этапа натяжения пришлось полностью пересмотреть всю имевшуюся последовательность второй перетяжки, вплоть до изменения итогового усилия в подвесках, которое перестало быть равным во всех подвесках, но осталось в допустимых пределах изменения, поскольку предусмотренные проектом запасы позволили это сделать.

Лишь испытания моста подтвердили тот факт, что истинная жёсткость конструкции полностью соответствовала проектной и мост был введён в эксплуатацию в установленные сроки.

Мы полагаем, что приведенного примера достаточно, чтобы проиллюстрировать мысль о необходимости расчетного сопровождения строительного процесса.

## 12. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

*Крошка сын  
к отцу пришел  
и спросила кроха:  
— Что такое  
х о р о ш о  
и что такое  
п л о х о ?  
У меня  
секретов нет, —  
слушайте, детишки, —  
папы этого  
ответ  
помещаю  
в книжке.  
В.В.Маяковский*

В предисловии мы указали, что сознательно не даем рекомендаций по приобретению какой-либо конкретно поименованной программы, и мы постарались сдержать свое слово. Но и полностью обойти эту проблему мы не можем, поэтому ниже приводятся некоторые соображения, с которыми необходимо считаться, планируя приобретение программы конечноэлементного анализа конструкций. Теперь, когда читатель дошел до этого места и, как мы надеемся, прочел книгу, а значит, имеет представление о мнении авторов по поводу «хороших и плохих» расчетных программ, это может быть уместным.

### 12.1. Наши рекомендации потенциальным пользователям

Конечноэлементный расчет исторически сперва использовался в качестве «средства аналитика». Но примеры удачного использования превратили его в основной инструмент проектировщика. Такой переход был подкреплен возможностью имитировать в компьютере «реальный мир». Границы «реального мира» определяются только

сложностью рассматриваемых сегодня объектов, при этом все время растут возможности выполнения квалифицированного анализа.

В конечноэлементном анализе основной целью является определение того, как элемент или система в целом откликнется на заданный комплекс внешних условий. Результаты расчета могут использоваться, чтобы проверить конструктивный замысел, они могут также использоваться для улучшения и оптимизации разработки. Конечно, все это основывается на предположениях, что конструкция правильно смоделирована, внешние условия определены корректно, что само программное обеспечение выполняет все расчеты безукоризненно и что результаты компьютерного расчета адекватно интерпретируются и используются.

Чаще всего практические расчеты выполняются с использованием программных систем промышленного типа, хотя известны примеры, когда применяются разовые разработки, специально создаваемые «под задачу». Такие разработки редко создаются полностью на пустом месте, чаще всего они основываются на использовании некоторого базового варианта промышленной программы, который дополняется силами авторов или же другими разработчиками применительно к специальным условиям использования. В случае удачи (и при наличии спроса) такого рода дополнения впоследствии включаются в очередную версию программной системы.

Что мы имеем в виду, когда говорим о программной системе промышленного типа? Чем она отличается от тех многочисленных, иногда хитроумно сделанных программных этюдов, о которых часто сообщается при защите диссертаций под рубрикой

*«...научные предложения соискателя реализованы в разработанной им программе ЛЮБИТЕЛЬ-5, рекомендуемой к широкому практическому внедрению в рамках отрасли или даже на межотраслевом (!?) уровне?»*

Прежде всего, это программа, для работы с которой не требуется присутствие разработчика. Для этого она, по крайней мере, должна быть документированной, и быть может, в первую очередь речь должна идти не просто о наличии некой бумажной инструкции, а об оперативном документировании, оповещениях об изменениях, системе электронных справок и т.п.

Во-вторых, эта программа должна решать не отдельную задачу, а определенный класс задач, границы которого должны быть четко очерчены. В рамках этого класса задач должна быть хорошо

продумана система проверки вводимых исходных данных, их диагностика и другие элементы «защиты от дурака»<sup>1</sup>.

Помимо прочего, очень важными характеристиками промышленной программы является устойчивость к сбоям оборудования, простота инсталляции и смены версий, возможность настройки на конкретного потребителя.

Наконец, нельзя считать современной промышленной программой разработку, которая регулярно не обновляется, для которой не налажена служба сопровождения, и которая не приспособливается к постоянно обновляющейся аппаратно-технической базе и операционным платформам.

Пользователь, который выбирает программную систему для покупки, должен ознакомиться с ней в такой степени, чтобы иметь возможность сказать самому себе:

- я понимаю эту программу, понимаю что с ее помощью делается и в пределах какой среды она работает;
- я понимаю, какие методы могут быть использованы для моделирования моего объекта и окружающей его внешней среды;
- я понимаю пределы, до которых выбранная мной программа может симитировать «реальный мир».

И особенно следует помнить о подтверждении достоверности результатов, которая обеспечивается как системой тестирования, использованной при создании программы, так и средствами анализа результатов расчета. В связи с последним замечанием нам вспоминается характерное высказывание Р.А.Резникова — отечественного патриарха в создании программных средств строительного проектирования. На одной из популярных в свое время школ-семинаров по методу конечных элементов Резников предварил свое выступление следующим парадоксальным заявлением:

*«Развитие мощных численных методов расчета по типу МКЭ привело к разнообразию и росту числа ошибок в результатах расчетов как в количественном, так и в качественном отношении, а современные технические средства автоматизации проектирования позволили эти ошибки тиражировать и широко внедрять в проектную практику,*

---

<sup>1</sup> Сейчас предпочитают не оскорблять слух возможного покупателя и говорят о встроенной *fool proof system*, считая английский вариант более благозвучным, хотя лично нам больше нравится украинский эквивалент «*дурнестійкість*».

*переноса их со страниц журнальных публикаций в реальные проекты сооружений»<sup>2</sup>.*

Любая современная программная система промышленного типа проходит, как минимум, два этапа тестирования. Так называемое альфа-тестирование выполняют сами разработчики с целью проверки работоспособности и правильности работы программы. При этом решаются специально подобранные задачи, не обязательно большого размера, но способные выявить ожидаемые неприятности. Многие сборники тестовых задач опубликованы и доступны в сети Интернет. Наиболее интересен второй этап, именуемый бета-тестированием. Он выполняется с привлечением достаточно широкой сети квалифицированных пользователей, с которыми связаны разработчики, и имеет целью проверку как правильности, так и удобства работы с программой при решении реальных задач<sup>3</sup>.

Бета-тестирование проводится перед началом поставки программного продукта на открытый рынок, и по результатам этого тестирования выполняется окончательная шлифовка программной системы. Для многих покупателей важно иметь информацию о том, кем именно (какими специалистами и/или организациями) выполнялось бета-тестирование и серьезные разработчики предоставляют эти сведения.

Опыт показывает, что никакая система тестирования не дает гарантии полного отсутствия ошибок в программе. Ошибки обнаруживаются и через много лет эксплуатации программного продукта. Но наличие внутри программной разработки нескольких путей решения одной и той же задачи парирует опасность влияния ранее не обнаруженных ошибок; такая многовариантность по функциональным возможностям является одним из наиболее существенных признаков зрелости программного продукта. Именно с этим обстоятельством была связана неоднократно высказывавшаяся на страницах этой книги мягкая (но настойчивая) рекомендация разработчикам — создавайте альтернативные пути для выполнения самых разнообразных функций программы.

Если трактовать решения тестовых задач, которые выполняются в процессе тестирования, как экспериментальные проверки программы, то следует помнить, что никакая серия экспериментов не может быть

---

<sup>2</sup> Цитируется нами по памяти.

<sup>3</sup> Имеется шутовое определение: альфа-тестирование дает возможность убедиться, что программа не работает в руках разработчика, бета-тестирование подтверждает, что она не работает и у пользователя тоже.

доказательством правильности проверяемой теории. Известно высказывание А. Эйнштейна:

*«Эксперимент ... никогда не говорит теории "Да". В наиболее благоприятных случаях он говорит "Может быть", чаще всего: "Нет"... Каждая теория рано или поздно услышит свое "нет"».*

Эти слова в полной мере относятся и к экспериментальной проверке правильности работы программного продукта.

Обеспечение надежности программ путем ее тестирования не может полностью удовлетворить возрастающие требования практики. Качественно новый уровень в решении этой проблемы может быть достигнут сочетанием методов тестирования, верификации и валидации программных систем. Следует четко понимать различие между верификацией и валидацией.

*Верификация* – это обоснование возможности использования ПС в заявленной области применения, выявление погрешности оценки параметров моделируемых объектов путем:

- сравнения результатов с экспериментальными данными, расчетными данными, полученными по другим программам, результатами аналитических тестов, теоретического анализа;
- оценки соответствия действительных возможностей программы декларациям разработчиков, правильности решения верификационных задач;
- оценка качества функционирования программы и соответствия результатов расчета тем моделям, которые положены в основу разработки.

*Валидация* – это оценка научных принципов и математических моделей, используемых, при разработке программной системы, включающая сравнения результатов расчета с наблюдениями, механическими испытаниями и экспериментами, а также определение и обоснование пределов применимости физико-математических схем моделирования.

Верификация и подтверждение правильности являются основными средствами гарантии качества программных систем. Роль верификации становится решающей, когда программа используется в ответственных областях деятельности, где отказ может иметь катастрофические последствия. Оценивая усилия по тестированию программы после ее написания, можно сказать, что интеллектуальные затраты на тестирование приближаются к затратам на создание программы и эти затраты будут увеличиваться. Поэтому вполне

закономерно сделать вывод о том, что тестирование и верификацию программ следует начинать на самых ранних этапах их разработки.

Что касается пользователя, то, естественно, его доверие к верифицированной программной системе возрастает (в отличие от чиновника, для которого доверие в первую очередь связывается с наличием сертификата).

Памятуя о возможных экспертизах и выбирая тот или иной программный продукт, пользователи обычно интересуются тем, является ли он сертифицированным<sup>4</sup>. При этом зачастую под понятием «сертифицировано» ожидается представление некоторой авторитетной гарантии правильности работы программы. Этому представлению способствуют и некоторые решения регламентирующих органов, указывающих на обязательность сертификации используемых в проектировании программных средств. К сожалению, надежда пользователя на такую гарантию ни на чем не основана, поскольку сертификат соответствия, который выдают уполномоченные на то отечественные органы, говорит лишь о том, что программа правильно отображает требования тех нормативных документов (например, СНиП), которые заявлены разработчиками, и при этом сертификат часто даже не указывает, что программа соответствует только некоторым их пунктам, но не нормативным документам в целом. Достаточно сомнительным является и ограничение срока действия сертификата. Действительно, что может измениться в программе за те полтора — два года, на которые выдан сертификат, если только за это время не менялись нормативные документы? Практически ничего<sup>5</sup>. Поэтому заимствованное из практики сертификации промышленных изделий ограничение сроков практически никакого отношения к информационным технологиям не имеет.

За рубежом распространена другая процедура общественного признания, которую называют Benchmark. Суть этой процедуры состоит в том, что авторитетные и независимые организации (чаще всего функционирующие при ассоциациях пользователей программных продуктов определенного назначения) проводят тщательную проверку программы с использованием широких коллекций тестовых задач. Такие коллекции обычно хорошо известны и постоянно обновляются [Program Verification ,,,, 1972], [MacNeal, Harder, 1985]. Правила прохождения процедуры,

---

<sup>4</sup> Здесь мы имеем в виду российских пользователей.

<sup>5</sup> Или все, если используемая копия программы оказалась испорченной.

результаты тестирования и тестовые задачи публикуются в специальных изданиях и доступны в Интернете.

Ценность таких коллекций состоит в том, что они позволяют провести комплексное и разностороннее тестирование; при этом важна полнота проверки, т.е. прохождение проверяемой программной системы через все задачи коллекции. Как остроумно заметил один известный физик [Хургин, 1979]:

*«...если часы пробили тринадцать раз, то это не только означает, что тринадцатый удар был неверным. Он порождает сомнения в верности каждого из первых двенадцати ударов».*

Инициатором проведения тестирования является разработчик. Заказывая Benchmark, он может попросить провести сопоставительные испытания своего программного продукта с определенными программами-аналогами (по точности, потребляемым ресурсам, удобству интерфейса, полноте и понятности документации и т.п.). Казалось бы, что здесь заложена определенная хитрость — можно указать заведомо слабого «соперника» и легко выиграть у него соревнование. Но дело в том, что и цены на свою программу разработчик будет назначать в сопоставлении с ценой программы-соперника. Таким путем стать чемпионом мира после районных соревнований никак не удастся. Поэтому появляется естественное стремление выбрать достойного соперника. При этом не удастся заметно отклониться от цены программы-соперника и в сторону занижения, чем предотвращается политика демпинга на рынке продажи программных продуктов.

Если разработчик не заказал специальное сопоставление, то программы-соперники определяются организацией, выполняющей тестирование. Эти организации обычно слишком дорожат своей репутацией, чтобы допускать сознательные отклонения от объективности оценок. Свой отчет они передают заказчику, с его разрешения результаты тестирования могут быть опубликованы, например в специальном журнале The BENCHMARK Magazine. Отчет о тестировании предъявляется покупателю программной системы по его требованию.

Сопоставление двух описанных систем говорит о том, что Benchmark — процедура гораздо более эффективная и гибкая, чем отечественная система сертифицирования, проводимая от имени органов государственного управления (но за деньги разработчика), и в гораздо большей степени формальная в своем замысле.

В России системы тестирования и аттестации программных средств зачастую имеют обязательный характер для использования в некоторых ведомствах (см., например [Положение об аттестации..., 1994]), но результаты такого ведомственного тестирования, за исключением самого факта выдачи ведомственной лицензии, чаще всего недоступны широкому кругу пользователей. Вместе с тем иметь, по возможности, наиболее полное представление о современном рынке промышленных программных средств весьма полезно не только для пользователей или потенциальных пользователей, но и для разработчиков, хотя составить сегодня полный список используемых программ конечноэлементного анализа практически невозможно — их число измеряется сотнями.

Имеется несколько наиболее широко используемых семейств таких программ, которые хорошо известны. Среди них безусловным лидером является комплекс **ANSYS**, имеющий более миллиона легальных пользователей. Созданный первоначально как прочностной, этот комплекс в дальнейшем расширил области применения и последовательно включил теплофизику, электромагнитные поля и гидрогазодинамику, став таким образом многодисциплинарным (разработчики представляют его как *multiphysics*-систему). Сравниться с ним по количеству легальных пользователей может группа конечноэлементных программ с маркой **NASTRAN**, принадлежащей **NASA**; не менее известны и такие системы, как **ABAQUS**, **COSMOS/M**, **GTSTRUDL**, **LUSAS**, **DIANA** и многие другие.

Для этих и других известных программных систем время от времени в сети Интернет на страницах электронного журнала *Desktop Engineering Magazine* появляются сопоставительные таблицы с данными о функциональных возможностях и с указанием продажной цены. Аналогичной работой занимается и известная исследовательская компания *WyzeTek Inc.*, которая на своем сайте ([www.deskeng.com](http://www.deskeng.com)) разместила большую сопоставительную таблицу с данными об инструментальных возможностях наиболее известных программных систем, ориентированных на конечноэлементные расчеты. Сравнивается функциональное наполнение пре- и постпроцессоров, а также решающего ядра, сопоставление ведется по обширному списку параметров (около 200 позиций), специально разработанному авторами книги [Adams, Askenazi, 1998].

Публиковались и более детальные аналитические сопоставления упомянутых разработок (см., например [Аведьян, Данилин, 2000]), однако еще ждет своего автора такое же детальное сопоставление возможностей и сравнительная оценка качества наиболее

распространенных отечественных программных систем массового применения, к числу которых сегодня принадлежат **Lira Windows**, **MicroFE** и **SCAD**. Естественно, что хотелось бы видеть такое сопоставление объективным и выполненным действительно независимым аналитиком. Однако проблема отбора независимых экспертов вряд ли разрешима в полной степени, поскольку подавляющее большинство специалистов обычно связаны с определенными коллективами разработчиков профессиональными или человеческими отношениями. Возможно, что в этой ситуации мог бы оказаться полезным предложенный в работе [Каримов, 1987] алгоритм оценивания коллективом экспертов, в составе которого имеются представители заинтересованных сторон.

С вопросами тестирования и экспертизы программных средств (по причинам, указанным выше, мы предпочитаем экспертизу как альтернативу сертификации) соприкасается и такая острая и еще ждущая своего разрешения проблема, как проблема стандартизации в информационных технологиях строительного проектирования. Во многих иных областях информационных технологий (достаточно характерный пример представляет собой разработка стандартов на языки программирования) необходимость стандартизации, причем стандартизации на международном уровне, была осознана уже давно<sup>6</sup>. Осознание необходимости стандартизации и последующая упорная работа уполномоченных на то комитетов по стандартизации явились мощным толчком к созданию действительно промышленных программных продуктов, и, в конечном итоге, стимулировали технический прогресс в этой области информационных технологий.

Конечно, стандартизация в сфере программного обеспечения строительного проектирования на международном уровне во многом затруднена существенными отличиями в нормативной базе строительного проектирования, различающейся в разных странах иногда и на концептуальном уровне. Тем не менее, есть очень много общего — законы механики одинаковы во всех частях света. Такие вещи, как рекомендуемые правила знаков, рекомендуемая терминология и обозначения, требования к пре- и постпроцессорным средствам программного обеспечения, интерфейс с развитыми базами данных и графическими системами типа **AutoCAD**, соответствие программного продукта национальным нормативным документам и многое другое могут и должны быть стандартизованы в целях наилучшего удовлетворения интересов пользователей. Если наиболее

<sup>6</sup> В качестве примера укажем на стандарт ISO/IEC 14882. Standard for the C++ Programming Language, принятый в августе 1998 г.

авторитетными специалистами в области автоматизации строительного проектирования стандарты такого рода будут разработаны и приняты, то тогда и сертификация, как подтверждение соответствия программного продукта узаконенному стандарту, будет иметь смысл.

Расставаясь в этом месте с дошедшим до финальных строк книги терпеливым читателем, подчеркнем, что на самом деле ни экспертиза, ни тем более сертификация не могут служить серьезной индульгенцией программному продукту. Максимум, что они могут и должны делать, это помочь пользователю сориентироваться в море соответствующих коммерческих предложений для принятия ответственного решения. Мы настаиваем, что в любом случае именно Вы, уважаемый читатель и пользователь расчетных программ, лучше и обоснованнее кого-либо способны разобраться с достоинствами и недостатками рекламируемого товара применительно к Вашим конкретным нуждам, не слишком полагаясь на красочные этикетки типа

*«Сертифицировано таким-то начальствующим авторитетом».*

Если уж говорить о рекомендуемом нами руководстве к действию при выборе программы, то нельзя сказать лучше, чем это уже было сказано в известной песенке из популярного кинофильма:

*Думайте сами,  
Решайте сами —  
Иметь или не иметь!*

\* \* \*

И, наконец, самое последнее замечание — само название раздела «Вместо заключения» мы хотели бы объяснить тем, что заключение невольно ассоциируется с завершением, а авторы не считают свою работу законченной вместе с последними словами книги. Надеемся на новые встречи.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Расчетные программы оперируют многими математическими процедурами и часто представляют пользователю возможность выбора метода решения той или иной математической проблемы (например, метода решения системы линейных уравнений). Чтобы грамотно распорядиться этими возможностями следует знать хотя бы в общих чертах особенности этих процедур и, что особенно важно, понимать их механическую интерпретацию. В настоящем приложении приводится описание одной из полезных процедур подобного рода.

## **А. Жордановы исключения и их роль в строительной механике**

Аппарат жордановых исключений является весьма полезным инструментом, который находит широкое применение в строительной механике. Так, например, с помощью жордановых исключений легко строится универсальная процедура формирования матрицы жесткости произвольного конечного элемента с частично устраненными связями в местах его присоединения к узлам, если известна матрица жесткости этого же элемента, но без устранения связей [Клемперт и др., 1974], [Париков, Сливкер, 1983]. Любопытно и неожиданно применение жордановых исключений в теории систем с односторонними связями [Гордеев, 1971].

Внимательный анализ показывает, что и популярная в теории и приложениях метода конечных элементов процедура статической конденсации на математическом уровне также может быть интерпретирована как последовательное применение нескольких шагов жордановых исключений. Кроме того, можно показать, что жордановы исключения тесно связаны с известным преобразованием Лежандра, используемым при построении и обосновании некоторых типов вариационных постановок задач. Вот почему жордановы

исключения заслуживают изучения специалистами по строительной механике.

В то же время в распространенных руководствах по строительной механике и в современных курсах линейной алгебры жордановы исключения даже и не упоминаются, оставаясь вне поля зрения как преподавателей, так и студентов. Все это дает основание для того, чтобы рассмотреть здесь и математический формализм жордановых исключений, и некоторые его применения.

## А.1 Общее описание

Если рассматривается система линейных зависимостей

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{A.1})$$

с  $n$  независимыми переменными  $x_1, \dots, x_n$ , то она может быть записана в виде таблицы

$$\begin{array}{l} y_1 = \\ \dots \\ y_r = \\ \dots \\ y_m = \end{array} \begin{array}{ccccc} x_1 & \dots & x_s & \dots & x_n \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} \end{array} \quad (\text{A.2})$$

*Шагом жорданова исключения* [Зуховицкий, Авдеева, 1967], произведенным над таблицей (А.2) с разрешающим элементом  $a_{rs} \neq 0$ , который находится в  $r$ -й разрешающей строке и в  $s$ -м разрешающем столбце, называют операцию решения  $r$ -го уравнения системы (А.1)

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n \quad (\text{A.3})$$

относительно независимой переменной  $x_s$  и подстановки полученного выражения для  $x_s$  во все остальные уравнения (А.1)<sup>1</sup>. Упомянутое условие  $a_{rs} \neq 0$  как раз и гарантирует возможность такого разрешения, причем из (А.3) следует, что

$$x_s = -\frac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1 - \frac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2 - \dots - \frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}x_{s-1} + \frac{1}{a_{rs}}y_r - \frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}x_{s+1} - \dots - \frac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n.$$

Подстановка полученного выражения во все уравнения системы (А.1) приводит к новым линейным соотношениям, в которых переменные  $y_r$  и  $x_s$  меняются местами так, что после выполнения шага

<sup>1</sup> В таблице (А.2) разрешающий элемент  $a_{rs}$  сознательно показан на затемненном фоне.

жордановых исключений новая таблица будет иметь вид

$$\begin{array}{l}
 y_1 = \\
 \dots \\
 x_s = \\
 \dots \\
 y_m =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 x_1 & \dots & y_r & \dots & x_n \\
 \hline
 b_{11} & \dots & b_{1s} & \dots & b_{1n} \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 b_{r1} & \dots & b_{rs} & \dots & b_{rn} \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 b_{m1} & \dots & b_{ms} & \dots & b_{mn} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad . \quad (A.4)$$

В показанной таблице элементы разрешающей строки и разрешающего столбца для лучшего восприятия глазом показаны на затемненном фоне.

Если внимательно проследить за изменениями коэффициентов таблицы, то окажется, что построение этих новых коэффициентов подчинено следующим простым правилам, по существу описывающим формальный алгоритм проведения одного шага жордановых преобразований:

- разрешающий элемент заменяется на элемент  $b_{rs} = 1/a_{rs}$ ;
- остальные элементы разрешающего столбца заменяются на элементы  $b_{is} = a_{is}/a_{rs} (i \neq r)$ ;
- остальные элементы разрешающей строки заменяются на элементы  $b_{rj} = -a_{rj}/a_{rs} (j \neq r)$ ;
- «обыкновенные» элементы, т. е. элементы, не принадлежащие разрешающему столбцу или разрешающей строке, вычисляются по формуле

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \quad (i \neq r, j \neq r) .$$

Пусть в системе (A.1)  $m = n$  и матрица коэффициентов  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , записанная в таблице (A.2) невырождена. В этих условиях можно показать, что всегда можно последовательно выполнить над (A.2)  $n$  шагов жордановых исключений и в результате получить таблицу

$$\begin{array}{l}
 x_1 = \\
 x_2 = \\
 \dots \\
 x_n =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
 \hline
 c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\
 \hline
 c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad . \quad (A.5)$$

в которой все зависимые переменные  $y_1, \dots, y_n$  превращены в независимые (перкинуты на верх таблицы), а все независимые переменные  $x_1, \dots, x_n$  превращены в зависимые (перекинуты в левую часть таблицы).

Если разрешающие элементы на некоторых из шагов жордановых преобразований выбраны не на главной диагонали матрицы, то начальный порядок переменных будет нарушен и для окончательного превращения таблицы в вид (А.5) потребуется перестановка некоторых строк и некоторых столбцов этой таблицы. Будем считать, что такая перестановка уже произведена так, что первоначальная упорядоченность переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  восстановлена. Понятно, что элементы преобразованной по (А.5) таблицы образуют обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1} = \llbracket c_{ij} \rrbracket$ .

Для решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = a_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{А.6})$$

при условии невырожденности матрицы  $\mathbf{A} = \llbracket a_{ij} \rrbracket$  перепишем эту систему в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{l} 0 = \\ 0 = \\ \dots \\ 0 = \end{array} \begin{array}{|ccccc|} \hline x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -a_n \\ \hline \end{array} \quad (\text{А.7})$$

Выполним  $n$  шагов жордановых исключений с разрешающими столбцами, отличными от столбца свободных членов. После каждого шага на верх таблицы попадает нуль и соответствующий столбец уже не нужен (все равно все его значения умножаются на нуль), поэтому его можно вычеркнуть. В результате останется только один столбец (на месте столбца свободных членов), в котором и будет записано решение системы уравнений.

Известный *метод Гаусса* отличается только тем, что после каждого шага жордановых исключений вычеркивается не только разрешающий столбец, но и разрешающая строка, а также отдельно выписывается выражение для соответствующего  $x_i$ . После того как на последнем шаге будет найдено значение одного из неизвестных, значения остальных вычисляются последовательной подстановкой уже полученных неизвестных в выражение для  $x_i$  (в порядке, обратном исключениям).

Что касается задач строительной механики, то наибольший интерес представляют жордановы исключения с разрешающими элементами, выбранными на главной диагонали матрицы, т.е при  $r = s$ . Именно такими жордановыми преобразованиями мы сейчас и займемся.

## А.2 Жордановы исключения с матрицей жесткости системы

Рассмотрим канонические уравнения метода перемещений, которые в соответствии с формулой (3.8) представим в виде

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости системы,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$  — вектор узловых перемещений,  $\mathbf{P}$  — вектор обобщенных узловых сил.

Запишем эту систему уравнений в форме таблицы, где каждая строка по своему механическому смыслу определяет суммарную реакцию  $R_i$  в дополнительной  $i$ -й связи основной системы метода перемещений

$$\begin{array}{l} R_1 = \\ R_2 = \\ \dots \\ R_n = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & u_2 & \dots & u_n & 1 \\ \hline k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & -P_1 \\ \hline k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & -P_2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & -P_n \\ \hline \end{array} . \quad (\text{A.8})$$

Здесь  $k_{ij} = k_{ji}$  — элементы симметричной матрицы жесткости,  $u_j$  — неизвестное обобщенное перемещение (для твердотельной конечноэлементной схемы это линейное перемещение узла или поворот узла),  $P_i$  — внешняя нагрузка по направлению  $i$ -й дополнительной связи. Все перемещения  $u_j$  здесь являются независимыми переменными, а решение задачи состоит в том, чтобы отыскать такие их значения, при которых реакции в дополнительных связях  $R_i$  обращаются в нуль. Это соответствует тому обстоятельству, что рассматриваемые связи имеются только в воображаемой основной системе метода перемещений, а в действительной системе они отсутствуют.

Шаг жордановых исключений над таблицей (А.8), например, с разрешающим элементом  $k_{11}$  приведет к таблице, которая соответствует определенной форме смешанного метода и имеет вид

$$\begin{array}{l} u_1 = \\ R_2 = \\ \dots \\ R_n = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline R_1 & u_2 & \dots & u_n & 1 \\ \hline \delta_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1n} & D_1 \\ \hline k'_{21} & k^*_{22} & \dots & k^*_{2n} & -P^*_2 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline k'_{n1} & k^*_{n2} & \dots & k^*_{nn} & -P^*_n \\ \hline \end{array} , \quad (\text{A.8})$$

где в соответствии с описанным ранее общим алгоритмом жордановых исключений полагается

$$\delta_{11} = \frac{1}{k_{11}}, \quad k'_{i1} = -\delta'_{i1} = \frac{k_{i1}}{k_{11}}, \quad D_1 = \frac{P_1}{k_{11}},$$

$$k^*_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{i1}k_{1j}}{k_{11}}, \quad P_i^* = P_i - \frac{k_{i1}P_1}{k_{11}} \quad (i \neq 1, j \neq 1). \quad (\text{A.9})$$

Если вспомнить, что реакция  $R_1$  должна равняться нулю и вычеркнуть первый столбец, и, кроме того, не интересоваться каково будет перемещение  $u_1$ , вследствие чего можно не рассматривать первую строку, то видоизмененная и усеченная по порядку на единицу за счет вычеркивания первого столбца и первой строки матрица реакций  $\mathbf{K}^* = [k^*_{ij}]$  будет соответствовать системе с удаленной первой связью, а величины  $P_2^* \dots P_n^*$  ее грузовому вектору.

Обратим внимание, что приведенные выше формулы для элементов  $k^*_{ij}$  усеченной матрицы жесткости полностью совпадают с формулами получающимися для этих же компонент, в результате проведения одного шага прямого хода факторизации матрицы по схеме Гаусса. Отсюда следует, что шаги прямого хода Гауссова исключения над матрицей жесткости соответствуют процедуре удаления лишней связи из основной системы метода перемещений.

Между прочим, элементы разрешающей строки и разрешающего столбца преобразованной по (A.8) матрицы также имеют четкий физический смысл. Действительно, первое уравнение системы (A.8) выражает собой геометрическое условие равенства суммарного перемещения по направлению первой связи величине  $u_1$ . Понятно, что  $\delta_{11}$  представляет собой это же перемещение, но вызванное единичной силой  $\bar{R}_1 = 1$ , тогда как  $\delta'_{i1}$  есть то же перемещение, но вызванное заданным единичным перемещением  $\bar{u}_i = 1$ . Аналогично, величина  $k'_{i1}$  представляет собой реакцию в  $i$ -ой связи, порожденной единичной силой  $\bar{R}_1 = 1$ . Как это видно из (A.9), жорданово исключение приводит к соотношению косой симметрии

$$k'_{i1} = -\delta'_{i1},$$

что есть не что иное, как известная в строительной механике теорема Гвоздева о взаимности реакций и перемещений [Рабинович, 1954].

Проиллюстрируем сказанное простым примером. На рис. А.1 показана система, которую мы будем рассчитывать с использованием четырех неизвестных смещений  $u_1, u_2, u_3$  и  $u_4$ .

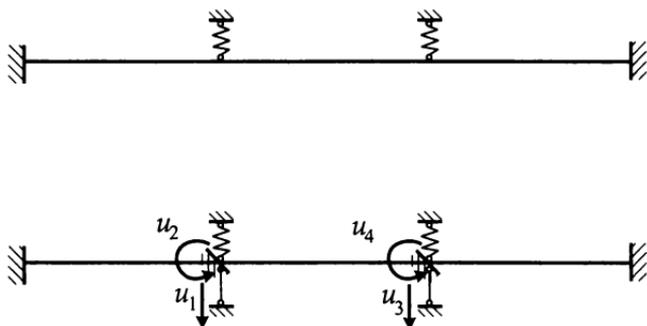


Рис. А.1. Схема к примеру расчета

Положим для определенности в некоторой согласованной системе единиц  $L = 1, EJ = 1, c = 12$ , где обозначено:  $L$  – длина одного пролета балки,  $EJ$  – ее изгибная жесткость,  $c$  – жесткость каждой из пружин. Рассчитывая эту систему обычными методами строительной механики на единичные смещения дополнительно введенных связей можно найти реакции в этих дополнительных связях. Соответствующие единичные состояния системы и отвечающие им реакции в связях показаны на рис. А.2.

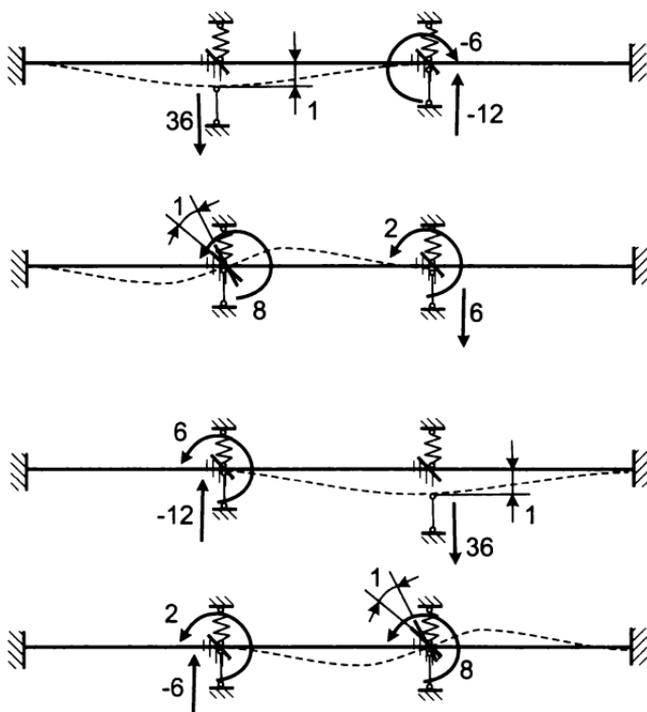


Рис. А.2 Реакции в связях основной системы метода перемещений от заданных единичных перемещений этих связей

Если записать эти реакции в соответствующую таблицу, то можно получить матрицу жесткости, имеющую вид

$$\begin{array}{l}
 R_1 = \\
 R_2 = \\
 R_3 = \\
 R_4 =
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
 \hline
 & 36 & 0 & -12 & -6 \\
 & 0 & 8 & 6 & 2 \\
 & -12 & 6 & 36 & 0 \\
 & -6 & 2 & 0 & 8 \\
 \hline
 \end{array}
 . \quad (A.10)$$

Если теперь последовательно выполнить четыре шага жордановых исключений с разрешающими элементами, взятыми на главной диагонали, то получим:

после первого шага

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \\
 R_2 = \\
 R_3 = \\
 R_4 =
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 R_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
 \hline
 & 1/36 & 0 & 1/3 & 1/6 \\
 & 0 & 8 & 6 & 2 \\
 & -1/3 & 6 & 32 & -2 \\
 & -1/6 & 2 & -2 & 7 \\
 \hline
 \end{array}
 , \quad (A.11)$$

после второго шага

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \\
 u_2 = \\
 R_3 = \\
 R_4 =
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 R_1 & R_2 & u_3 & u_4 \\
 \hline
 & 1/36 & 0 & 1/3 & 1/6 \\
 & 0 & 1/8 & -3/4 & -1/4 \\
 & -1/3 & 3/4 & 55/2 & -7/2 \\
 & -1/6 & 1/4 & -7/2 & 13/2 \\
 \hline
 \end{array}
 , \quad (A.12)$$

после третьего шага

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \\
 u_2 = \\
 u_3 = \\
 R_4 =
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 R_1 & R_2 & R_3 & u_4 \\
 \hline
 & 7/220 & -1/110 & 2/165 & 23/110 \\
 & -1/110 & 8/55 & -3/110 & -19/55 \\
 & 2/165 & -3/110 & 2/55 & 7/55 \\
 & -23/110 & 19/55 & -7/55 & 333/55 \\
 \hline
 \end{array}
 , \quad (A.13)$$

и, наконец, после четвертого шага

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \\
 u_2 = \\
 u_3 = \\
 u_4 =
 \end{array}
 \begin{array}{|cccc|}
 \hline
 R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\
 \hline
 & 26/666 & -14/666 & 11/666 & 23/666 \\
 & -14/666 & 110/666 & -23/666 & -38/666 \\
 & 11/666 & -23/666 & 26/666 & 14/666 \\
 & 23/666 & -38/666 & 14/666 & 110/666 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad (A.14)$$

Нетрудно убедиться, что на каждом из шагов жорданова исключения здесь записана матрица смешанного метода, отвечающая механической системе с очередной удаленной связью. Окончательная

матрица по (А.14) представляет собой матрицу податливости системы, у которой удалены все четыре дополнительные связи. Контролем правильности вычислений служит условие: произведение исходной матрицы жесткости по (А.10) и матрицы податливости по (А.14) должно равняться единичной матрице.

Повторив все рассуждения применительно к матрице коэффициентов канонических уравнений метода сил, мы легко убедимся, что там каждый шаг соответствует восстановлению той лишней связи, которая была удалена при создании основной системы метода сил. Кстати говоря, прямую механическую интерпретацию алгоритма Гаусса (а значит, что и жордановых исключений) применительно к методу сил можно найти в [Гантмахер, 1967].

### **А.3 Матрица жесткости конечного элемента при нежестком присоединении элемента к узлам**

Построение матрицы жесткости отдельного конечного элемента — необходимый этап расчета при формировании общей матрицы жесткости системы  $\mathbf{K}$ , описывающей поведение конструкции с дискретной расчетной схемой. Стандартно матрица жесткости отдельного конечного элемента формируется в предположении жесткого сопряжения узловых точек элемента с узлами дискретной расчетной схемы, что обеспечивает совпадение перемещений узлов и узловых точек конечных элементов. Однако, такая ситуация не всегда имеет место. Например, для стержневых элементов возможны случаи шарнирного присоединения стержней к узлам или такого их присоединения, когда один из концов стержня имеет возможность смещаться по некоторому направлению независимо от перемещения узла в целом.

В общем случае под нежестким способом присоединения элемента к узлу будем понимать такую схему их соединения, которая возникает при снятии каких-либо связей между узлом и элементом. Для общности рассмотрим также ситуацию, когда взамен устранимой жесткой связи вводится линейно работающая упругая связь с коэффициентом жесткости  $s$ .

На первый взгляд может показаться, что такая ситуация характерна исключительно для стержневых систем. Однако это не так. Достаточно сослаться, например, на известную задачу о расчете шарнирно-сочлененных плитных конструкций, возникающую при проектировании аэродромных покрытий, или на задачу расчета

многоволновых оболочек при нежестком сопряжении отдельных волн.

В принципе в программе для расчета дискретной системы можно предусмотреть использование различных формул для компонент матрицы жесткости и грузовых векторов конечных элементов при различных способах присоединения элементов к узлам. Например, для стержневой системы стержни с различными условиями опирания часто рассматривают как разные типы конечных элементов. Однако, такой подход нарушает технологичность изготовления программного продукта, так как плодит необходимость заведения в программе множества самых разнообразных формул как для компонент матрицы жесткости, так и для компонент грузовых векторов.

В этой связи представляет интерес задача построения общего алгоритма, позволяющего получить матрицу жесткости и грузовые вектора произвольного конечного элемента при нежестком способе присоединения элемента к узлам в предположении, что матрица жесткости и грузовые вектора этого же элемента в случае его жесткого сопряжения известны. Приведем здесь такой алгоритм, предложенный в работе [Париков, Сливкер, 1983] и основанный на *модифицированных жордановых преобразованиях*.

Итак, пусть некоторый конечный элемент присоединен к одному из своих узлов по одной из своих степеней свободы (для определенности будем считать, что по  $l$ -ой степени свободы) не жестко, а упруго: между узлом и соответствующей узловой точкой конечного элемента имеется упругая связь с жесткостью  $c$ . Пусть, далее,  $q_1, \dots, q_n$  совокупность перемещений всех узловых точек конечного элемента ( $n$  — полное число степеней свободы рассматриваемого конечного элемента), а  $u_1, \dots, u_n$  перемещения узлов системы, к которым присоединен этот элемент. В рассматриваемом случае компоненты векторов  $\mathbf{u} = \llbracket u_1, \dots, u_n \rrbracket^T$  и  $\mathbf{q} = \llbracket q_1, \dots, q_n \rrbracket^T$  связаны следующими кинематическими соотношениями

$$u_l \neq q_l, \quad u_i = q_i \quad (i = 1, \dots, n; i \neq l).$$

Обобщенное усилие  $T_l$ , отвечающее перемещению  $q_l$  узловой точки конечного элемента (реактивное усилие, передающееся от узла к упругой пружине), определится как произведение жесткости  $c$  пружины на разность перемещений  $u_l - q_l$ , то есть

$$T_l = c(u_l - q_l). \quad (\text{A.15})$$

Пусть  $\mathbf{R} = \llbracket r_{ij} \rrbracket$  и  $\mathbf{R}_p = \llbracket r_{pi} \rrbracket$  — соответственно матрица жесткости и грузовой вектор для рассматриваемого конечного элемента при жестком присоединении его к узлам. Вектор обобщенных внутренних

сил  $\mathbf{T}$ , возникающих в узловых точках конечного элемента, отвечающий вектору обобщенных перемещений  $\mathbf{q}$ , определится по формуле

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{q} + \mathbf{R}_p. \quad (\text{A.16})$$

Определяя из  $l$ -ого уравнения системы (A.16) усилие  $T_l$  и приравнявая его выражению по (A.15), находим

$$r_{ll}q_l + \sum_{i=1; i \neq l}^n r_{li}u_i + r_{pl} = c(u_l - q_l),$$

откуда получаем

$$q_l = \frac{cu_l - r_{pl} - \sum_{i=1; i \neq l}^n r_{li}u_i}{r_{ll} + c}.$$

Потенциальную энергию  $E$ , накапливаемую в конечном элементе и в упругой пружине, можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}q_iq_j + \sum_{i=1}^n r_{pi}q_i + \frac{1}{2}c(u_l - q_l)^2.$$

Если теперь подставить сюда выражения для перемещений  $q_j$  через перемещения  $u_j$ , и учесть при этом симметрию матрицы  $\mathbf{R}$ , то потенциал  $E$  с точностью до слагаемого, не зависящего от компонент вектора перемещений, переписется в виде

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}^* u_i u_j + \sum_{i=1}^n r_{pi}^* u_i,$$

где введены обозначения

$$r_{ij}^* = r_{ij} - \frac{r_{il}r_{lj}}{r_{ll} + c}, \quad r_{pi}^* = r_{pi} - \frac{r_{il}r_{pl}}{r_{ll} + c}. \quad (\text{A.17})$$

В матричной форме эти соотношения принимают вид

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}^* \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_p^*, \quad \mathbf{R}^* = \left[ \left[ r_{ij}^* \right] \right], \quad \mathbf{R}_p^* = \left[ \left[ r_{pi}^* \right] \right].$$

Ясно, что матрица  $\mathbf{R}^*$  и вектор  $\mathbf{R}_p^*$  являются искомыми матрицей жесткости и грузовым вектором для элемента с нежестким способом присоединения его к соответствующему узлу расчетной схемы.

Заметим, что в случае полного устранения связи ( $c = 0$ ) формулы (A.17) несколько упрощаются и совпадают с формулами, используемыми при обычных жордановых исключениях. Это дает

основание называть формулы (А.17) формулами *модифицированных жордановых преобразований*.

Существенно также, что введенные здесь модифицированные жордановы преобразования отличаются от обычных также и тем, что для них формулы (А.17) применяются ко всей матрице, в том числе и к разрешающей строке и разрешающему столбцу. Это справедливо и в случае  $c = 0$ , что, как это несложно заметить, приводит к простому обнулению разрешающей строки и разрешающего столбца.

Рассмотрим множество всевозможных конечных элементов, получаемых из некоторого стандартного конечного элемента (с жестким присоединением к узлам) изменением способа присоединения его к узлам. Каждый элемент  $S$  этого множества определяется парой: матрицей жесткости  $\mathbf{R}$  и грузовым вектором  $\mathbf{R}_p$ , так что

$$S = \{\mathbf{R}, \mathbf{R}_p\}.$$

Модифицированное жорданово преобразование (А.17) переводит элемент  $S$  этого множества в новый элемент  $S^* = \{\mathbf{R}^*, \mathbf{R}_p^*\}$ , определяя некоторый оператор, который будем называть *J-оператором*. Символически действие *J-оператора* записывается в виде

$$J[l, c]S = S^*.$$

Указанные в квадратных скобках параметры  $l$  и  $c$  подчеркивают, что *J-оператор* зависит от двух аргументов: от номера  $l$  устраняемой связи и от величины коэффициента жесткости  $c$  вводимой упругой связи.

Обратимся теперь к рассмотрению свойств *J-оператора*.

1. *J-оператор* нелинеен, так как в общем случае

$$J(S^{(1)} + S^{(2)}) \neq JS^{(1)} + JS^{(2)}.$$

2. Для существования *J-оператора* необходимо и достаточно, чтобы

$$r_{ll} + c \neq 0.$$

Это свойство непосредственно следует из формул (А.17).

3. При  $l_1 = l_2 = l$  имеет место формула произведения *J-операторов*

$$J[l, c_2] J[l, c_1] = J[l, \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}]. \quad (\text{А.18})$$

В самом деле, пусть  $J[l, c_1]S = S^{(1)}$ ,  $J[l, c_2]S^{(1)} = S^{(2)}$ . Тогда в соответствии с формулами (А.17) имеем

$$\begin{aligned}
 r_{ij}^{(1)} &= r_{ij} - \frac{r_{il}r_{lj}}{r_{ll} + c_1}, & r_{ij}^{(2)} &= r_{ij}^{(1)} - \frac{r_{il}^{(1)}r_{lj}^{(1)}}{r_{ll}^{(1)} + c_2} = \\
 &= r_{ij} - \frac{r_{il}r_{lj}}{r_{ll} + c_1} - \frac{\left(r_{il} - \frac{r_{il}r_{ll}}{r_{ll} + c_1}\right)\left(r_{lj} - \frac{r_{ll}r_{lj}}{r_{ll} + c_1}\right)}{r_{ll} - \frac{r_{ll}r_{ll}}{r_{ll} + c_1} + c_2} = r_{ij} - \frac{r_{il}r_{lj}}{r_{ll} + \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}}, \quad (A.19)
 \end{aligned}$$

и аналогично

$$r_{pi}^{(2)} = r_{pi} - \frac{r_{il}r_{pl}}{r_{ll} + \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}}. \quad (A.20)$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}\left[l, \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}\right]S = S^{(2)},$$

и значит справедлива формула (A.18).

4.  $J$ -оператор коммутативен, т.е.

$$\mathcal{L}[l_1, c_1] \mathcal{L}[l_2, c_2] = \mathcal{L}[l_2, c_2] \mathcal{L}[l_1, c_1].$$

Действительно, при  $l_1 \neq l_2$  коммутативность очевидна, а при  $l_1 = l_2 = l$  она следует из формулы произведения  $J$ -операторов (A.18), так как в ее правую часть коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  входят симметрично.

5. При условии, что  $c \neq 0$   $J$ -оператор обратим, причем формула обращения имеет весьма простой вид

$$\mathcal{J}^{-1}[l, c] = \mathcal{L}[l, -c]. \quad (A.21)$$

В самом деле, полагая  $c_1 = c$  и  $c_2 = -c$  и воспользовавшись формулами (A.19) и (A.20), получим

$$r_{ij}^{(2)} = r_{ij} - \frac{r_{il}r_{lj}(c - c)}{r_{ll}(c - c) - c^2} = r_{ij}, \quad r_{pi}^{(2)} = r_{pi} - \frac{r_{il}r_{pl}(c - c)}{r_{ll}(c - c) - c^2} = r_{pi},$$

Следовательно

$$\mathcal{L}[l, -c] \mathcal{L}[l, c] = I,$$

где  $I$  – тождественный оператор.

При  $c = 0$   $J$ -оператор не допускает обращения, поскольку

$$\mathcal{L}[l, 0]S = S^0 = \{\mathbf{R}^0, \mathbf{R}_p^0\}, \quad \text{где } r_{ll}^0 = 0,$$

поэтому повторная операция  $\mathcal{L}[l, 0]S^0$  по свойству 2 не определена.

Отмеченные формальные свойства  $J$ -оператора допускают простое истолкование на механическом уровне, если заметить, что

последовательное действие двух  $J$ -операторов (при  $l_1 = l_2 = l$ ) эквивалентно переходу к конечному элементу с соединением в последовательную цепочку двух пружин, устанавливаемых взамен  $l$ -ой абсолютно жесткой связи. Заметим, также, что формула произведения (A.18) полезна, например, при необходимости проведения многократных расчетов с варьированием жесткостных характеристик пружин (в нелинейных задачах, в задачах оптимизации), так как, если

$$S^{(1)} = \mathcal{J}[l, c_1]S, \quad S^{(2)} = \mathcal{J}[l, c_2]S,$$

то

$$S^{(2)} = J \left[ l, \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} \right] S^{(1)}. \quad (\text{A.22})$$

Действительно, из (A.18) легко получить

$$J \left[ l, \frac{c_1 c_2}{c_1 - c_2} \right] \mathcal{J}[l, c_1] = \mathcal{J}[l, c_2].$$

Формула (A.22) позволяет непосредственно с помощью одного модифицированного жорданова преобразования получить характеристики  $S^{(2)}$  конечного элемента, имеющего взамен  $l$ -ой жесткой связи пружину с коэффициентом жесткости  $c_2$ , если известны характеристики  $S^{(1)}$  элемента, имеющего там же пружину с жесткостью  $c_1$ .

Жордановы преобразования могут быть также эффективно использованы при исключении из матриц жесткости конечных элементов тех компонент, которые отвечают *внутренним* степеням свободы<sup>2</sup>. Исключение из матриц жесткости компонент, отвечающих *внутренним* степеням свободы, часто называют *процедурой статической конденсации*. Несложно заметить, что формулы пересчета компонент уплотненных (сконденсированных) матриц жесткости и грузового вектора полностью совпадают с формулами обобщенных жордановых преобразований.

#### A.4 Двойное жорданово исключение

Рассмотрим случай симметричной матрицы  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  порядка  $n$ , ограничившись жордановыми исключениями с разрешающими

<sup>2</sup> По поводу *внутренних* и *внешних* степеней свободы конечного элемента см. сноску<sup>1</sup> в главе 4.

элементами, лежащими на главной диагонали. Выбор разрешающего элемента на главной диагонали определяется тем обстоятельством, что это условие не разрушает симметрию матрицы (разумеется, с точностью до знаков некоторых элементов), что позволяет ограничиться хранением только верхней треугольной части матрицы. Предположим, что матрица  $A$  невырождена, но не является положительно определенной. Может так случиться, что некоторый, интересующий нас в процессе жордановых исключений диагональный элемент, скажем элемент  $a_{rr}$ , равен нулю. В строительной механике такая ситуация вполне возможна, ибо она в точности соответствует системе уравнений смешанного метода расчета дискретной системы – см., например, уравнения (3.75) или (3.77). Не боясь быть неправильно понятыми, скажем, что непосредственное проведение жорданова исключения «исключено» с нулевым по значению разрешающим элементом.

Чтобы не отказываться от полезного свойства симметрии, выберем некоторый индекс  $s$ , такой, что  $a_{rs} \neq 0$ , и попытаемся одновременно перекинуть на верх таблицы независимые элементы  $y_r$  и  $y_s$ , а в левый столбец соответственно  $x_r$  и  $x_s$ . Пусть при этом исходная матрица, записанная в форме таблицы, имеет следующий вид

$$\begin{array}{l}
 y_1 = \\
 \dots \\
 y_r = \\
 \dots \\
 y_s = \\
 \dots \\
 y_n =
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 x_1 & \dots & x_r & \dots & x_s & \dots & x_n \\
 a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{r1} & \dots & a_{rr} = 0 & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{s1} & \dots & a_{sr} & \dots & a_{ss} & \dots & a_{sn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn}
 \end{array}
 \quad . \quad (A.23)$$

Проведем сначала жорданово исключение с разрешающим элементом  $a_{rs}$ . Тогда таблица (A.23) преобразуется в таблицу (A.24)

$$\begin{array}{l}
 y_1 = \\
 \dots \\
 x_s = \\
 \dots \\
 y_s = \\
 \dots \\
 y_n =
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 x_1 & \dots & x_r & \dots & y_r & \dots & x_n \\
 b_{11} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1s} & \dots & b_{1n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_{r1} & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rs} & \dots & b_{rn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_{s1} & \dots & b_{sr} & \dots & b_{ss} & \dots & b_{sn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 b_{n1} & \dots & b_{nr} & \dots & b_{ns} & \dots & b_{nn}
 \end{array}
 \quad , \quad (A.24)$$

причем на основании общих правил проведения жорданова исключения новый элемент  $b_{sr}$  сохранит свое первоначальное значение, поскольку

$$b_{sr} = a_{sr} - \frac{a_{ss} a_{rr}}{a_{rs}} = a_{sr}.$$

Но по условию  $a_{sr} = a_{rs} \neq 0$ , что позволяет провести над таблицей (А.24) очередное жорданово исключение, теперь уже с разрешающим элементом  $a_{sr}$ . Если после этого поменять местами строки и столбцы с номерами  $r$  и  $s$ , то окончательно получим таблицу, в которой и симметрия восстановлена, и переменные  $y_r$  и  $y_s$  перекинуты на верх таблицы.

# ЛИТЕРАТУРА

1. **Аведьян А.Б., Данилин А.Н.** Прочность не для прочнистов // САПР и графика.— 2000.— №1.— С. 75–83; 2000.— №2.— С. 38–40; 2000.— №3.— С. 39–46; 2000.— №4.— С. 62–69.
2. **Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В.** Планирование экспериментов при поиске оптимальных условий.— М.: Наука, 1976.
3. **Айзенберг Я.М.** Спитакское землетрясение 7 декабря 1988 года. Некоторые уроки и выводы // Сейсмостойкое строительство.— 1999.— №1.— С. 6–9.
4. **Айронс Б.** Критерий округления в решениях прямым методом жесткостей // Ракетная техника и космонавтика, 1967, №7.— С. 107–113.
5. **Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А.** Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ.— Ч. 1.— М.: Стройиздат, 1976.
6. **Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н.** Строительная механика. Тонкостенные пространственные конструкции.— М.: Стройиздат, 1983.
7. **Александров А.В., Травуш В.И., Матвеев А.В.** О расчете стержневых конструкций на устойчивость // Промышленное и гражданское строительство, 2002, №3.— С. 16–19.
8. **Алексеев С.А.** Качество статически определимого прикрепления узлов и твердых тел // Расчет пространственных конструкций.— Вып. 17.— М.: Стройиздат, 1977.— С. 131–140.
9. **Алексеенко Б.Г.** О границах применения МКЭ при расчете стержневых систем, функционирующих в агрессивных средах // II Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика 99».— Минск: НП ООО «Стринко», 1999.— С. 89–93.
10. **Ален И. Голуб** Правила программирования С и С++.— М.: «Бином», 1996.
11. **Аргирис Дж.** Вычислительные машины и механика // Теоретическая и прикладная механика. Труды XIV Международного конгресса IUTAM.— М.: Мир, 1979.— С. 15–99.
12. **Аргирис Дж.** Современные достижения в методах расчета с применением матриц.— М.: Стройиздат, 1968.
13. **Артеменко В.В., Гордеев В.Н.** Программа вычисления расчетных сочетаний усилий при сложной логической взаимосвязи между нагрузками // Вычислительная и организационная техника в строительном проектировании.— 1967.— № 2.— С. 10–14.
14. **Баенхаев А.В.** О развитии специфических смешанных схем метода конечных элементов // Метод конечных элементов и расчет сооружений. Тр.ЛПИ.— №405.— Л.: 1985.— С. 41–48.

15. **Банах Л.Я., Перминов М.Д.** Исследование сложных динамических систем с использованием слабых связей между подсистемами // *Машиноведение*.— 1972.— № 4.— С. 35–41.
16. **Барвашов В.А.** К расчету осадок грунтовых оснований, представленных различными моделями // *Основания, фундаменты и механика грунтов*.— 1977.— № 4.— С. 25–27.
17. **Барвашов В.А., Федоровский В.Г.** Трехпараметрическая модель грунтового основания и свайного поля, учитывающая необратимые структурные деформации грунта // *Основания, фундаменты и механика грунтов*.— 1978.— № 4.— С. 17–20.
18. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов.— М., Стройиздат, 1982.
19. **Безухов Н.И.** Теория упругости и пластичности.— М.: Гостехтеориздат, 1953.
20. **Бейкер Д., Грейв-Моррис П.** Аппроксимация Паде.— М.: Мир, 1986.
21. **Белл Дж.Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел.— В 2-х ч.— М.: Наука, 1984.
22. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.
23. **Бельский Г.Е., Ривкин А.М.** К определению свободных длин в элементах стержневых конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*.— 1974.— №6.— С. 21–23.
24. **Берже М.** Геометрия.— Т. 1.— М.: Мир, 1984.
25. **Бирбраер А.Н.** Расчет конструкций на сейсмостойкость.— С.-Пб.: Наука.— 1998.
26. **Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.** Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. — М.: Наука, 1983.
27. **Бовин В.А.** Разностно-вариационные методы строительной механики.— К.: Госстройиздат УССР, 1963.
28. **Богданова Е.Н.** Анализ причин обрушения зданий и сооружений/ Обзор.— М.: ВНИИТПИ, 1991.
29. **Болдычев В.П.** Двойная аппроксимация угла поворота при расчете пластин средней толщины // *Известия ВНИИГ. Сборник научных трудов*, Т. 133.— Л.: Энергия, 1979.— С. 68-74.
30. **Болдычев В.П.** О связи различных схем метода конечных элементов при решении вырождающихся задач // *Метод конечных элементов и расчет сооружений*. Тр. ЛПИ.— №405.— Л.: 1985.— С. 32-41.
31. **Болотин В.В.** О понятии устойчивости в строительной механике // *Проблемы устойчивости в строительной механике*.— М.: Стройиздат, 1965.— С. 6–27.
32. **Болотин В.В.** Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
33. **Бондарев Ю.В., Нгуен Тханх Суан.** Расчет стержневых систем при внезапном удалении отдельных элементов. // *Строительная механика и расчет сооружений*.— 2010.— №4.— С. 43–48.
34. **Бонди Г.** Гипотезы и мифы в физической теории. — М.: Мир, 1972.

35. **Бородачев Н.М.** О возможности замены сложных моделей упругого основания более простыми // Строительная механика и расчет сооружений.— 1975.— № 4.— С. 37–39.
36. **Бусыгин В.Г., Розин Л.А.** Метод сил на основе псевдообращения // Прочность и устойчивость сооружений и их оснований: Труды ЛПИ.— №354.— Л., 1976.
37. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности.— М.: Мир, 1987.
38. **Виноградов А.И.** О некоторых свойствах систем с заданными очертаниями осей // Исследования по теории сооружений.— Вып. 7.— М.: Стройиздат, 1957.— С. 365–371.
39. **Власов В.З.** Тонкостенные упругие стержни: Избранные труды.— Том. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1963, С. 1–467.
40. **Власов В.З., Леонтьев Н.Н.** Балки, плиты, оболочки на упругом основании.— М.: Физматгиз, 1960.
41. **Вовкушевский А.В.** О вычислении напряжений при решении задач теории упругости методом конечных элементов // Известия ВНИИГ.— Т. 133.— Л.: Энергия, 1979.— С. 18–22.
42. **Вовкушевский А.В., Шойхет Б.А.** Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов.— М.: Энергия, 1981.
43. **Вольмир А.С.** Гибкие пластинки и оболочки.— М.: Гостехиздат, 1956.
44. **Вольмир А.С.** Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.
45. **Воробьев Н.Н.** Применение теории игр в технических науках // IV Internationaler Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften.— Weimar, 1967.— Bd.1.— S. 411–422.
46. **Габричидзе Г.К.** В какой мере нормы сейсмостойкого проектирования обеспечивают декларируемые принципы // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2001, № 1.— С. 40–42.
47. **Гайян Р.** Приведение матриц жесткости и массы // Ракетная техника и космонавтика.— 1965.— №2.
48. **Галасова К.П., Сливкер В.И.** О приведении внешних нагрузок к узлам конечных элементов треугольной формы // Строительная механика и расчет сооружений.— 1988.— №6.— С. 64–68.
49. **Гальченко Л.А.** О характере функции прогибов бесконечной балки, полученных при использовании различных моделей основания // Тр./Днепропетровский ин-т инж. транспорта.— 1980.— Вып. 210/27.— С. 132–138.
50. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.— М.: Физматгиз, 1967.
51. **Гейзен Р.Е.** Конструктивно полубезмоментные пластины и оболочки. Задача изгиба пластин. // Изв. АН АрмССР, Механика.— 1974.— Т. XXVII.— №2.— С. 58–68.
52. **Гельфандейн А.Н., Шелест Л.А.** Натурные исследования осадок связных грунтов основания, нагруженного штампом // Основания, фундаменты и механика грунтов.— 1974.— № 2.

53. **Геммерлинг А.В.** Определение расчетных длин колонн многоэтажных зданий // Строительная механика и расчет сооружений.— 1974.— №2.— С. 64–66.
54. **Гениев Г.А., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Никулин А.И., Пятикрестовский К.П.** Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях.— М.: Изд-во АСВ, 2004.
55. **Герсеванов Н.М.** Применение математической логики к расчету сооружений.— М.: ОНТИ, 1923.
56. **Гильман Г.Б., Борисенко В.С.** Расчет пространственных систем с изменяющейся в процессе нагружения расчетной схемой // ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства. Вып III.— К.: КиевЗНИИЭП, 1973.— С.27–37.
57. **Гольденблат И.И., Бажанов В.Л.** Физические и расчетные модели сооружений // Строительная механика и расчет сооружений.— 1970.— №2.— С. 23-27.
58. **Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Поляков С.В., Ульянов С.В.** Модели сейсмостойкости конструкций.— М.: Наука, 1979.
59. **Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.** Расчет конструкций на упругом основании.— М.: Стройиздат, 1984.
60. **Гордеев В.Н.** О конечности методов решения одной задачи квадратичного программирования // Кибернетика, 1971.— №1.— С. 85-88
61. **Гордеев В.Н., Артеменко В.В., Минькович Е.И.** Выбор неблагоприятного сочетания нагрузок как решение задачи многокритериальной оптимизации. // Численные методы расчета и оптимизации строительных конструкций: Труды ЦНИИСК им. Кучеренко.— М.: ЦНИИСК, 1989.— С. 26–32.
62. **Гордеев В.Н., Перельмутер А.В.** Расчет упругих систем с односторонними связями, как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений.— Вып.15.— М.: Стройиздат, 1967.— С. 208–212.
63. **Гордеева С.П.** К расчету стержневых систем на резонанс с помощью ЭВМ // Исследования по механике стержневых систем и сплошных сред: Тр / ЛИСИ.— Вып. 49.— 1966.— С. 305–314.
64. **Горев В.В., Уваров Б.Ю., Филиппов В.В. и др.** Металлические конструкции.— В 3 томах. Т.1: Элементы стальных конструкций /— М.: Высшая школа, 1977.
65. **Городецкий А.С., Евзеров И.Д.** Компьютерные модели конструкций.— К.: Факт, 2005.
66. **Городецкий А.С., Назаров Ю.П., Жук Ю.Н.** Повышение качества расчетов строительных конструкций на основе совместного использования программных комплексов STARK ES и ЛИРА // Информационный вестник ГУ МО Мособлгосэкспертизы, 2005, №1(8).— С. 42-49
67. **Городецкий А.С., Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Интеллектуальная расчетная программная система. Прогноз новых возможностей. //

- Системы автоматизированного проектирования объектов строительства (САПР-ОС).— К.: Будивэльнык, 1989.— С. 43-56.
68. **ГОСТ 27751-88.** Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету.— М.: Изд-во стандартов, 1988.
  69. **Гребенюк Г.И., Яньков Е.В.** Аппроксимация параметров состояния стержневых систем дробно-рациональными функциями // Изв. вузов. Строительство и архитектура.— 1989.— №4.— С. 16-19.
  70. **Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.** Проблемы нелинейного деформирования.— М.: Наука, 1988.
  71. **Данилин А.Н., Зуев Н.Н., Снеговский Д.В., Шалашилин В.И.** Об использовании метода конечных элементов при решении геометрически нелинейных задач // САПР и графика.— 2000.— № 2.— С. 60-64.
  72. **ДБН В.1.1-12: 2006.** Строительство в сейсмических районах Украины / Минстрой Украины.— К.: Укразхбудинформ, 2008.
  73. **Деклу Ж.** Метод конечных элементов.— М.: Мир, 1976.
  74. **Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г.** Принцип Сен-Венана и его использование в теории плит и оболочек // Расчет пространственных конструкций.— Вып. 1.— М.: Машстройиздат, 1950.— С. 329-342.
  75. **Диксон Дж.** Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений.— М.: Мир, 1969.
  76. **Динамический расчет зданий и сооружений.** (Справочник проектировщика).— М.: Стройиздат, 1984.
  77. **Динкевич С.З.** Некоторые вопросы расчета стропильных ферм покрытий // Проектирование металлических конструкций.— 1969.— Вып. 9(17): Инф.-реф. сб.— Серия VII.— С. 51-70.
  78. **Динкевич С.З.** Расчет циклических конструкций. Спектральный метод.— М.: Стройиздат, 1977.
  79. **Дроздов Ю.П.** Надежность гибких железобетонных колонн // Бетон и железобетон.— 1971.— №4.— С. 16-20
  80. **Евзеров И.Д.** Оценки погрешности по перемещениям при использовании несовместных конечных элементов. In: Численные методы механики сплошной среды, том. 14, 5: 24-31
  81. **Елсукова К.П., Сливкер В.И.** Некоторые особенности МКЭ при расчете конструкций на упругом основании // Метод конечных элементов и строительная механика, Тр./ЛПИ.— № 349.— 1976.— С. 69-80.
  82. **Ермаков С.М.** (ред.) Математическая теория планирования эксперимента /— М.: Наука, 1983.
  83. **Жеков К.** Современные аналитические возможности Ansys // САПР и графика. 1998.— №9.— С. 50-54; № 10, С. 50-52.
  84. **Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании.— М.: Стройиздат, 1947.
  85. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.
  86. **Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.** Линейное и выпуклое программирование.— М.: Наука, 1967.

87. **Ивлев Д.Д.** Теория идеальной пластичности.— М.: Наука, 1966.
88. **Ильичев В.А.** К определению параметров колебаний двухмассовой системы, опирающейся на упругое инерционное полупространство // Динамика сооружений: Тр./ ЦНИИСК им. Кучеренко.— М.: Стройиздат, 1970.— С. 57–68.
89. **Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки / ЦНИИСК им. Кучеренко.**— М.: Стройиздат, 1970.
90. **Инструкция по расчету перекрытий на импульсные нагрузки / ЦНИИСК.**— М.: Стройиздат, 1966.
91. **Инструкция по расчету перекрытий промышленных зданий, воспринимающих динамические нагрузки / ЦНИИСК им. Кучеренко.**— М.: Стройиздат, 1967.
92. **Казакевич М.И., Кулябко В.В.** Актуальные проблемы динамики сооружений // Металеві конструкції.— Т. 1.— №1.— 1998.— С. 65–74.
93. **Калинина Л.Г., Перельмутер А.В.** К вопросу об оптимальном проектировании конструкций // Пространственные конструкции в Красноярском крае.— Красноярск, 1985.— С. 100–108.
94. **Каримов И.А.** О групповой экспертной оценке показателей, измеряемых в шкалах отношений // Техническая кибернетика,— 1987.— №6.— С. 13–21.
95. **Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.** Вычислительный комплекс SCAD.— М.: Издательство АСВ, 2004.
96. **Карпиловский В.С.** Исследование и конструирование некоторых типов конечных элементов для задач строительной механики.— Дисс. канд. техн. наук,— К.: КАДИ, 1982.
97. **Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И.** Идеализация сложных динамических систем с примерами из электротехники.— М.: Наука, 1976.
98. **Клаф Р., Пензиен Дж.** Динамика сооружений.— М.: Стройиздат, 1979.
99. **Клемперт Ю.З., Париков В.И., Сливкер В.И.** О процедуре вычисления матрицы жесткости призматического стержня // Расчет пространственных конструкций, вып. XVI.— М.: Стройиздат, 1974.— С. 179–189.
100. **Колосова Г.С.** Расчет методом конечных элементов фундаментных плит на неограниченном двухпараметрическом основании // Метод конечных элементов и расчет сооружений: Тр./ЛПИ.— № 405.— Л.: 1985.— С. 48–51.
101. **Колоушек В.** Динамика строительных конструкций.— М., Стройиздат, 1965.
102. **Корноухов Н.В.** Прочность и устойчивость стержневых систем.— М.: Госстройиздат, 1949.
103. **Космодемьянский А.А.** Теоретическая механика и современная техника.— М.: Просвещение, 1969.

104. **Кочин Н.Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
105. **Кюнце Г.П., Крелле В.** Нелинейное программирование.— М.: Советское радио, 1965.
106. **Ларионов В.В.** Публичная техническая политика в строительстве // Промышленное и гражданское строительство, 2004, №5.— С. 11-12.
107. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения.— М.—Л.: Физматгиз, 1963.
108. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики. Том I. М.: Гостехтеориздат, 1954.
109. **Лоусон Ч., Хенсон А.** Численные решения задач наименьших квадратов.— М.: Наука, 1986.
110. **Лу Гринзоу.** Философия программирования для Windows 95/NT. — С.Петербург: Символ, 1997.
111. **Лукаевич С.** Локальные нагрузки в пластинах и оболочках.— М.: Мир, 1982.
112. **Лукаш П.А.** Основы нелинейной строительной механики.— М.: Стройиздат, 1978.
113. **Лурье А.И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
114. **Малов В.Ю., Почтман Ю.М.** Нечеткая оценка свойств узловых соединений в моделях оптимального проектирования // Изв. вузов. Строительство и архитектура.— 1987.— №10.— С. 13–16.
115. **Манвелов Л.И., Бартошевич Э.С.** О выборе расчетной модели упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений.— 1961.— № 4.
116. **Марчук Г.И., Шайдунов В.В.** Повышение точности решений разностных схем.— М.: Наука, 1979.
117. **Мастаченко В.Н.** Об оценке адекватности расчетных и реальных моделей строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений.— 1971.— №4.— С. 3-7.
118. **МГСН 4.04-94.** Многофункциональные здания и комплексы / Правительство Москвы.— М.: 1994.
119. **Меркин Д.Р.** Введение в механику гибкой нити.— М.: Наука, 1980.
120. **Минькович Е.И., Сливкер В.И.** Об одном способе задания положения стержня в пространстве. // Метод конечных элементов и строительная механика. Тр. ППИ — №434 — П. 1990.— С. 84-94.
121. **Моррис У.** Наука об управлении: Байесовский подход.— М.: мир, 1971.
122. **Назаров Д.** Обзор современных программ конечно-элементного анализа // САПР и графика.— 2000.— №2.— С. 52-55.
123. **Налимов В.В.** Теория эксперимента.— М.: Наука, 1971.
124. **Нельсон Р.Б.** Упрощенное вычисление производных собственного вектора // Ракетная техника и космонавтика.— 1976.— Т.14.— №9.— С. 59–64.
125. **Николаенко Н.А., Назаров Ю.П.** Динамика и сейсмостойкость сооружений.— М.: Стройиздат, 1988.

126. **Новожилов В.В.** Математические модели и точность инженерных расчетов // Судостроение.— 1979.— №7.— С. 5-12.
127. **Новожилов В.В.** Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
128. **НП-001-97.** Общие положения обеспечения безопасности атомных станций. ОПБ-88/97.— М.: 1997.
129. **НП-031-01.** Нормы проектирования сейсмостойких атомных станций / Госатомнадзор России.— М.: 2001.
130. **Нудельман Я.Л.** Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем.— М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949.
131. **Ньюмарк Н., Розенблюэт Э.** Основы сейсмостойкого строительства.— М.: Стройиздат, 1980.
132. **Овсянко В.М.** Следящая сила и вокруг нее: Компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов.— Минск: Полымя, 1999.
133. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.
134. **Олман Д.Дж.** Треугольные конечные элементы для расчета изгибаемых пластин при постоянных и линейно распределенных моментах // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т.1.— Л.: Судостроение, 1974.— С. 80-101.
135. **Осташевский А.Я.** Статический расчет систем с недостающими связями // Основы теории мгновенно-жестких систем.— Л.: ЛенЗНИИЭП, 1973.— С. 20-28.
136. **Пановко Я.Г.** Введение в теорию механических колебаний.— М.: Наука, 1980.
137. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы.— М.: Наука, 1985.
138. **Пановко Я.Г., Губанова И.И.** Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки.— М.: Наука, 1987.
139. **Папкович П.Ф.** Теория упругости.— Л.: Оборонгиз, 1979.
140. **Папкович П.Ф.** Труды по строительной механике корабля.— Том 4. Устойчивость стержней, перекрытий и пластин.— Л.: Судпромгиз, 1963.
141. **Париков В.И., Сливкер В.И.** Матрица жесткости конечного элемента при нежестком присоединении элемента к узлам // Известия ВНИИГ.— Т.164.— Л., 1983.— С. 20-28.
142. **Пастернак П.Л.** Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели.— М. Л.: Госстройиздат, 1954.
143. **Патон Е.О., Горбунов Б.Н.** Стальные мосты.— Том 1. Фермы балочной системы.— К.: Гос. науч.-тех. изд-во Украины, 1935.
144. **Перельмутер А.В.** Основы расчета вантово-стержневых систем.— М.: Стройиздат, 1969.
145. **Перельмутер А.В.** Элементы теории систем с односторонними связями.— М.: ЦИНИСА Госстроя СССР, 1969.

146. **Перельмутер А.В.** О влиянии изменения жесткостей на перераспределение усилий в статически неопределимой системе // Строительная механика и расчет сооружений.— 1974.— № 5.— С.64–67.
147. **Перельмутер А.В.** О сходимости уточнения рабочей системы // Строительная механика и расчет сооружений.— 1978.— №5.— С.76–77.
148. **Перельмутер А.В.** Предельное равновесие идеальной упруго-пластической системы в условиях неопределенности // Строительная механика и расчет сооружений.— 1972.— № 5.— С. 23–25.
149. **Перельмутер А.В.** Об оценке живучести несущих конструкций // Металлические конструкции. Работы школы профессора Н.С.Стрелецкого. — М.: МГСУ, 1995. — С. 62–68.
150. **Перельмутер А.В.** Управление поведением несущих конструкций.— К.: УФИМБ, 1998.
151. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Особенности алгоритмизации метода перемещений при учете дополнительных связей. // Метод конечных элементов и строительная механика.: Тр. ЛПИ.— №349.— Л.:1976.— С. 28-36.
152. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** Расчет упругой системы, опертой на гидродомкраты // Строительная механика и расчет сооружений.— 1979.— № 6.— С. 65–69.
153. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** О реализации сложных кинематических условий при расчете дискретных систем методом перемещений. // Метод конечных элементов и строительная механика: Тр. ЛПИ.— № 363.— Л.: 1979.— С. 26-39.
154. **Перельмутер А.В., Сливкер В.И.** О характеристической кривой упругой системы // Исследования по теории сооружений.— Вып. XXV.— М.: Стройиздат, 1987.— С. 92-102.
155. **Петров А.А., Базилевский С.В.** Об учете пространственной корреляции пульсаций скорости при определении динамической составляющей ветровой нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений.— 1977.— № 5.— С. 67–71.
156. **Петров А.А., Базилевский С.В.** Влияние взаимной корреляции между обобщенными координатами при случайных колебаниях линейных систем // Строительная механика и расчет сооружений.— 1979.— № 4.— С. 52–56
157. **Петров В.В.** К расчету пологих оболочек при конечных прогибах // Известия вузов. Строительство.— 1959.— № 1.— С. 15-18.
158. **Подольский Д.М.** Выбор расчетных моделей по экспериментальным данным // Строительная механика и расчет сооружений.— 1973.— №5.— С. 71-75.
159. **Подольский Д.М.** Расчет конструктивных систем с неопределенными жесткостными параметрами // Надежность и долговечность машин и сооружений.— 1984.— Вып.6.— С. 78–86.

160. **Положение об аттестации программных средств**, используемых при обосновании или обеспечении безопасности ядерно- и/или радиационно опасных объектов и производств (РД-03-17-94).— Госатомнадзор России, 1994.
161. **Пособие по проектированию стальных конструкций** (к СНиП II-23-81\*. Стальные конструкции) / ЦНИИСК им. Кучеренко.— М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989.
162. **Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика**.— М.: Наука, 1991.
163. **Почтман Ю.М., Фридман М.М.** Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях.— Днепропетровск: Наука и образование, 1997.
164. **Правила устройства электроустановок** / Минэнерго СССР.— 6-е изд.— М.: Энергоатомиздат, 1987.
165. **Проценко А.М.** Теория упруго-идеальнопластических систем.— М.: Наука, 1982.
166. **Рабинович И.М.** Случаи неопределенности и бесконечности, встречающиеся при решении статически неопределимых задач. // Изв. Моск. Высшего технического училища.— 1929.— №1.
167. **Рабинович И.М.** Курс строительной механики.—Часть 1.— М.-Л.: Гос. Изд-во строит. лит., 1950.
168. **Рабинович И.М.** Курс строительной механики. Том 2. — М.: Стройиздат, 1954.
169. **Рабинович И.М.** Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи // Инженерный сборник.— Т.У1.— М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
170. **Рабинович И.М., Сеницын А.П., Лужин О.В., Теренин В.М.** Расчет сооружений на импульсные воздействия.— М.: Стройиздат, 1970.
171. **Резников Р.А.** Решение задач строительной механики на ЭЦМ.— М.: Стройиздат, 1971.
172. **Рекомендации по защите жилых зданий с несущими кирпичными стенами при чрезвычайных ситуациях** / Москомархитектура.— М.: ГУП «НИАЦ», 2002.
173. **Рекомендации по защите жилых каркасных зданий при чрезвычайных ситуациях** / Москомархитектура.— М.: ГУП «НИАЦ», 2002.
174. **Ржаницын А.Р.** Устойчивость равновесия упругих систем.— М.: Гостехтеориздат, 1955.
175. **Ржаницын А.Р.** О некоторых свойствах области устойчивости состояния равновесия // Строительная механика и расчет сооружений.— 1964.— №1.— С. 1–8.
176. **Ржаницын А.Р.** К вопросу о приведенных длинах стержней // Строительная механика и расчет сооружений.— 1975.— №5.— С. 74–76.
177. **Ржаницын А.Р.** Строительная механика.— М.: Высшая школа, 1982.

178. **Робинсон Дж., Хаггенмахер Г.В. Контини Р.** Статический расчет конструкций методом сил и методом перемещений как проблема собственных значений // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т. 2.— Л.: Судостроение, 1974.— С. 91–102.
179. **Розин Л.А.** Стержневые системы как системы конечных элементов.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1975.
180. **Розин Л.А.** Задачи теории упругости и численные методы их решения.— СПб.:Издательство СПбГТУ, 1998.
181. **Рудых О.Л., Соколов Г.П., Пахомов В.Л.** Введение в нелинейную строительную механику. Учебное пособие.— М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1998.
182. **Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра.**— М.: Стройиздат, 1978.
183. **Сахаров А.С., Альтенбрах И.** (ред.) Метод конечных элементов в механике твердых тел /— К.: Выща школа, 1982.
184. **Свойский Ф.М.** Несовместные конечные элементы для расчета листовых пространственных конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности.— Горький: Изд-во Горьковского университета, 1986.— С. 59-70.
185. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.
186. **Семенов В.А., Семенов П.Ю.** Конечные элементы повышенной точности для расчета сложных пространственных систем // Докл. XVI Международной конф. «Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Метод граничных и конечных элементов», 23-26 июня 1998 г. Санкт-Петербург.— СПб: СПбГАСУ, 1998.— Т. 1.— С. 68-69.
187. **Сливкер А.В.** Оптимальные аппроксимации перемещений в методе конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений.— 1987, №2.— С. 27-30.
188. **Сливкер А.В.** Расчет балок средней толщины с использованием связанных аппроксимаций для прогиба и угла поворота // Известия ВНИИГ. Сборник научных трудов, Т. 191. — Л.: Энергия, 1986.— С. 96-103.
189. **Сливкер В.И.** К вопросу о назначении характеристик двухпараметрового упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений.— 1981.— № 1.— С. 36–39.
190. **Сливкер В.И.** Метод Ритца в задачах теории упругости, основанный на последовательной минимизации двух функционалов // Известия АН СССР; МТТ.— №2.— 1982.— С. 57-65.
191. **Сливкер В.И.** О вычислении энергии деформации системы в программных комплексах для прочностных расчетов конструкций // Строительная механика и расчет сооружений.— 1991.— №3.— С. 52-56.
192. **Сливкер В.И.** Строительная механика. Вариационные основы.— М.: Издательство АСВ, 2005.

193. **Смирнов А.Ф.** Устойчивость и колебания сооружений.— М.: Трансжелдориздат, 1958.
194. **СНиП 2.01.07-85.** Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР.— М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986.
195. **СНиП П-23-81\*.** Стальные конструкции / Госстрой СССР.— М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990.
196. **СНиП П-6-74.** Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР.— М.: Стройиздат, 1976.
197. **СНиП П-7-81\*.** Строительство в сейсмических районах / Минстрой России.— М.: ГП ЦПП, 1996.
198. **Сорокин Е.С.** Динамические характеристики строительных материалов и конструкций // Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича.— М.: Стройиздат, 1972.— С. 38–61.
199. **Сорокин Е.С.** Основные предпосылки расчета сооружений на импульсивные нагрузки // Научные труды МИИТ: Вопросы прикладной механики.— Вып. 260.— М.: Стройиздат, 1968.
200. **Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений.** Расчетно-теоретический.— Кн. 2.— М.: Стройиздат, 1973.
201. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения.— М.: Мир, 1980.— 454с.
202. **Стренг Г., Фикс Дж.** Теория метода конечных элементов.— М.: Мир, 1977.
203. **Стриклин Дж., Хайслер В.** Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и/или геометрией // Ракетная техника и космонавтика.— 1973.— № 3.— С. 46-56.
204. **Тимошенко С.П.** Устойчивость упругих систем.— М.: Гостехтеориздат, 1955.
205. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки.— М.: Наука, 1963.
206. **Томсон Дж.М.Т.** Неустойчивость и катастрофы в науке и технике.— М.: Мир, 1985.
207. **Трофимов В.И., Бегун Т.Е.** Структурные конструкции (исследование, расчет и проектирование).— М.: Стройиздат, 1972.
208. **Уздин А.М.** Задание сейсмического воздействия. Взгляд инженера-строителя // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений.— 2005.— №1.— С. 27-32.
209. **Уздин А.М., Сандович Т.А., Аль-Насер-Мохамад Самих Амин.** Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений.— СПб.: Изд. ВНИИГ, 1993.
210. **Уфлянд Я.С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости.— Л.: Наука, 1967.
211. **Федоровский В.Г., Безволев С.Г.** Прогноз осадок фундаментов мелкого заложения и выбор модели основания для расчета плит // Основания, фундаменты и механика грунтов.— № 4.— 2000.— С. 10–18.

212. **Феодосьев В.И.** Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов.— М.: Наука, 1975.
213. **Феодосьев В.И.** Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.— 5-е изд., испр. и доп.— М.: Наука, 1996.
214. **Феодосьев В.И.** Основы техники ракетного полета.— М.: Наука, 1981.— С. 75-89
215. **Фиалко С.Ю.** Некоторые особенности анализа частот и форм собственных колебаний при расчете сооружений на сейсмические воздействия // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури.— 2002, випуск 8.— С. 193—201
216. **Филин А.П., Тананайко О.Д., Чернева И.М., Шварц М.А.** Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем /— Л.: Стройиздат, 1983.
217. **Филоненко-Бородич М.М.** Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку: Тр./МЭМИИТ, 1945.— Вып.53.
218. **Форсайт Дж., Малькольм Н., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.
219. **Форсайт Дж., Молер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.— М: Мир, 1969.
220. **Фу К.С., Исидзука М., Яо Дж.Т.П.** Применение нечетких множеств для оценки устойчивости строительных конструкций при землетрясениях // Нечеткие множества и теория возможностей: Последние достижения.— М.: Радио и связь, 1986.—С. 312-332.
221. **Хог Э., Чой К., Комков В.** Анализ чувствительности при проектировании конструкций.— М.: Мир, 1988.
222. **Хряков А.Д.** Геометрическая дискретизация плоских систем // Строительная механика и расчет сооружений.— 1986.— №3.— С. 47-50.
223. **Хургин Я.И.** Как объять необъятное.— М.: Знание, 1979.
224. **Цейтлин А.И.** К теории частотно-независимого внутреннего сопротивления при колебаниях упругих систем // Динамика сооружений: Труды ЦНИИСК им. Кучеренко, Вып. 56— М.: 1975.— С.5-23.
225. **Цейтлин А.И., Бернштейн А.С., Гусева Н.И., Попов Н.А.** Новая редакция раздела "Ветровые нагрузки" главы СНиП "Нагрузки и воздействия" // Строительная механика и расчет сооружений.— 1987.— № 6.— С. 28-33.
226. **Цейтлин А.И., Гусева Н.И.** Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия.— М.: Стройиздат, 1979.
227. **Черкесов Г.Н.** Методы и модели оценки живучести сложных систем.— М.: Знание, 1987.
228. **Черная Е.Г.** Зависимости эмпирического типа для максимальных прогибов и усилий в сетках из тросов и балок // Основы теории мгновенно-жестких систем.— Л: ЛенЗНИИЭП, 1973.— С. 48-53.
229. **Чернева И.М.** Расчетные схемы подземных сооружений на базе модели винклерова основания // Проблемы прочности материалов и конструкций на транспорте.— М.: Транспорт, 1990.— С.222-232

230. **Чернов Ю.Т.** К расчету систем с выключающимися связями. // Строительная механика и расчет сооружений.— 2010.— №4.— С. 53–57.
231. **Чирас А.А.** Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем.— Вильнюс: Мокслас, 1982.
232. **Шашкин А.Г., Шашкин К.Г.** Взаимодействие здания и основания. Методика расчета и практическое применение при проектировании // [www.geogec.narod.ru](http://www.geogec.narod.ru).
233. **Шварцман Б.С.** Экстраполяционный метод нахождения численных решений с заданной точностью // Строительная механика и расчет сооружений. Сб. тр. СПбГТУ, 1992.— С. 157-162.
234. **Шулькин Ю.Б.** Кинематический анализ стержневых конструкций, используемых на транспорте.— Л.: ЛИИЖТ, 1978.
235. **Шулькин Ю.Б.** Кинематический анализ стержневых конструкций. // Расчет пространственных конструкций. Вып.17.— М.: Стройиздат, 1977.— С. 4-31.
236. **Шулькин Ю.Б.** Теория упругих стержневых конструкций.— М.: Наука, 1984.
237. **Эшби У.** Несколько замечаний // Общая теория систем.— М.: Мир, 1966.— С. 171-178.
238. **Юсупов А.К., Давлетханова А.Д.** Расчет плоских рам на статистически неоднородном упругом основании // Строительная механика и расчет сооружений.— 1983.— №6.— С. 14–18.
239. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.— М.: Мир, 1974.
240. **Ясинский Ф.С.** Избранные работы по устойчивости сжатых стержней,— М.-Л.: Гостехтеориздат, 1952.
241. **Adams V., Askenazi A.** Building Better Products with Finite Element Analysis.— N.-Y.: OnWord Press, 1998.
242. **Adini A., Clough R.W.** Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method: Report submitted to the National Science Foundation, Grant G7337, 1960.
243. **AISC:** Manual of Steel Construction, Load & Resistance Factor Design.— 2nd Edition.— Chicago, Ill: American Institute of Steel Construction, 1994.
244. **Allman D.J.** A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis // Computer and Structures.— 1984.— V. 19.— № 1-2.— P.1-8.
245. **Babushka I., Oden J.T.** Benchmark Computation: What is its Purpose and Meaning? // IACM Bulletin, 1992, vol. 7, No 4.— P. 6-9.
246. **Babuska I.** Benchmark Computation / TICAM Forum Notes, No. 2.— Austin: University of Texas, 1996.
247. **Babuska I., Oden J.T.** Benchmark Computation: Further Comments // IACM Bulletin. — 1995, Vol. 10, No. 1.— P. 6—9.
248. **Babuska I., Oden J.T.** Benchmark Computation: What is its Purpose and Meaning // IACM Bulletin, 1992, Vol. 7, No. 4.

249. **Bayer J.** Estimation of Uncertainties of Theoretical Natural Frequencies and Mode Shapes of Structures // *Engineering Mechanics*.— 1996.— Vol. 3.— No 5.— P. 323–330.
250. **Bazant Z.P., Yong Zhou.** Why did the World Trade Center collapse ?— Simple Analysis // *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 128, No1, 2002.— P. 2-5
251. **Becker A.A.** Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks.— Glasgow: NAFEMS, 2001.
252. **Belytschko T.** A response to Babushka-Oden recommendations on benchmarks // *USACM Newsletter*, 1993, vol. 6, No 1.
253. **Belytschko T.** A response to Babuska-Oden recommendations on benchmark // *USACM Newsletter*.— 1993, Vol. 7, No. 4. — P. 4—5.
254. **Bereš E.** High accuracy interpolation of stresses // *Acta techn./Acad. sci. hung.*— V.91.— 1980.—3-4.— P. 257-263.
255. **Bogner F.K., Fox R.L., Schmit L.A.** The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolations formulas // *Proc. of the Conference of Matrix methods in Struct. Mech.*— 1966.— P. 397- 443.
256. **Building Regulations.** Disproportional collapse // *The Structural Engineer*, 1993, vol.71, No23
257. **Butzel L.M., Merchant H.C.** The Use and Evaluation of Shock Spectra in the Dynamic Analysis of Structures // *Proceedings of ASME, Applied Mechanics*.— 1973.— №2.— P. 115–121
258. **Choi H.J., Krauthammer T.** Investigation of Progressive Collapse Phenomena in a Multi Story Building // 11th International Symposium on the Interaction of the Effects of *Munitions with Structures, Mannheim, Germany, 5-9 May 2003*
259. **Combining Modal Responses and Spatial Components in Seismic Response Analysis** // *Regulatory Guide, U.S. Nuclear Regulatory Commission Office of Standard Development, Section 1.92, February 1976.*
260. **Cowper G.R., Kosko E., Lindberg G.M., Olson M.D.** Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element // *AIAA Journal*.— 1969.— №7 — P. 1957-1965.
261. **Davenport A.G.** The response of slender, line-like structures to a gusty wind // *Proc. Inst. Civil Eng.*— Vol.23.— 1962.— P. 389–408.
262. **Der Kiureghian, Armen.** A Response Spectrum Method for Random Vibrations.—Report №.VCB/EERC-80/15.— *Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkley, June, 1980.*
263. **EN 1990.** Eurocode: Basic of Structural Design. — Brussels: CEN, 2001.
264. **EN 1998-1.** Eurocode 8: Design os structures for earthquake resistanse/ Part 1: General rules, sismic actions and rules for buildings.— Brussels: CEN, 2005.
265. **ENV 1993-1-1.** Eurocode 1: Design of steel structures. General rules and rules for building.— Brussels, CEN, 1995
266. **ENV 1991-2-4.** Eurocode 1: Basis of Design on Structures.— Part 2–4: Wind Actions.— Brussels: CEN, 1995.

267. **ENV 1991-2-3.** Eurocode 1: Basis of Design and Action on Structures.— Part 2–3: Wind Actions.— Brussels: CEN/TC250/SC1, 1995.
268. **ENV 1991-2-7:1998.** Eurocode 1: Basis of design and actions on structures. Accidental actions due to impact and explosions.— Brussels: CEN, 1988.
269. **ENV 1998.** Eurocode-8: Design provisions for earthquake of structures.— Brussels: CEN, 1994.
270. **Fan Yuan-xun, Wang Szing.** On the application of an interpolation matrix for computation of stresses in finite elements // Numer. Meth. Geomech.: Proc. 3rd Int. Conf., Aachen, 1979.— V. 4.— Rotterdam, 1980.— P. 1273-1280.
271. **Fox R.L., Kapoor M.P.** Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors // AIAA Journal.— Vol.6.— Dec., 1968.— P. 2426–2429.
272. **Gilmour J.R., Virdi K.S.** Numerical modelling of the progressive collapse of framed structures as a result of impact or explosion // Proceeding of 2nd International Symposium in Civil Engineering.— Budapest: 1998.— P. 101-158.
273. **Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I.** Problems of Nonlinear Deformation. Dordrecht et al.; Kluwer, 1991.
274. **Hitching D.** (edited) A Finite Element Dynamics Primer /— Glasgow: NAFEMS, 1992.
275. **Huber P.J.** Robust estimation of a location parameter // Ann. Mathematical Statistics.— 1964.— vol.—35.— P. 73–101.
276. **Irons B.M.** The superpatch theorem and other proposition relating to the patch tests // Proceedings of the 5th Canadian Congress of Applied Mechanics, Fredericton, 1975.— P. 651-652.
277. **ISO/DIS 19902.** Fixed Steel Offshore Structures.— Geneva: ISO TC 67, 2004.
278. **ISO/DIS 3010.** Bases for design of structures — Seismic actions on structures.— International Organization for Standardization, 2000.
279. **Itoh, M., Yoshida N., Utagawa N., Kondo I.**, Simulation of blast demolition of reinforced concrete buildings // Proceedings of the Third World Congress on Computational Mechanics 1994, pp.152-53.
280. **Jeff Alger.** C++ for real programmers = Рус. пер: Джефф Элджер, C++.— С.Петербург-Москва: «Питер» (Б-ка программиста), 1999.
281. **Kacprzyk J.** Zbiory rozmyte w analizie systemowej.— Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1986.
282. **Koiter W.T.** On the Stability of Elastic Equilibrium: Diss. Thesis. TH Delft.— Amsterdam, 1945.
283. **Kulpa Z., Roslaniec K.** Solutionsets for systems of linear interval equations // Proc. of the XIV Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, 26–28 May 1999, Rzeszów, Poland.— Rzeszów: Rzeszów University of Technology, 1999.— P. 195–196.
284. **Lind N.** Optimization, cost benefit analysis, specification // Proc. 3rd Int. Conf. on Applications of Statistics in Soil and Structural Engineering (ICASP 3), Sydney.— Vol.3, 1979.— p.373 - 384.

285. **Loubignac G., Cantin G., Touzot G.** Continuous Stress Fields in Finite Element Analysis // *AIAA Journal*.— 1977.— Vol.15.— No 11.— P. 1645-1647.
286. **Lysmer J., Kuhlemeyer R.L.** Finite Dynamic Model for Infinite Medis // *Journal Eng. Mechanics Division: Proc. ASCE*.— 1969.— vol. 95.— No EM4.— P. 859-877.
287. **MacLeod I.A.** A Strategy for the use of computers in structural engineering, *The Structural Engineering*, 1995, Vol.73, No.21, pp.13-21.
288. **MacNeal R.H., Harder R.C.** A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy. Finite elements in Analysis and Design.— North-Holland, 1985.
289. **Mallikarjuna Rao K., Shrinivasa U.** A set of pathological tests to validate new finite elements // *Sādhanā*, 2001, vol. 26, part 6/— P. 549-590.
290. **Menzies J.B.** Improving structural safety through feedback // *The Structural Engineer*, 1993, vol.71, No 21
291. **Mitsui K., Kanemitsu T.** Construction process analysis for truss structure by genetic algorithm // *Proceedings of the IASS 40<sup>th</sup> Anniversary Congress, Madrid, 20-24 September 1999 «Shell and Spatial Structures: From recent Past to the next Millennium»*.— Vol. 1.— Section B.— Madrid: CADEX.— 1999.— P. 31-36.
292. **NUREG-0800.** Standard Review Plan for the Review of Safety Analysis Reports for Nuclear Power Plants / US Nuclear Regulatory Commission, 1987.
293. **Oden J.T., Reddy J.N.** Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*— 1973.— V. 6.— №1.— P. 55-61.
294. **Peano A.** Hierarchies of conforming finite element for plane elasticity and plate bending // *Computer and Mathematics*.— 1974.— №3-4.— P. 211-224.
295. **Pian T., Tong P.** Basis of finite element methods for solid continua // *Int. J. Num. Meth. Eng.*— 1969.— №1.— P. 3-28.
296. **Program Verification and Qualification Library.**— ASME Pressure Vessel and Piping Division, Committee on Computer Technology, 1972.
297. **PS 1992.** Regles Parasismiques.— Paris: EUROLLES, 1996.
298. **Rodgers L.C.** Derivaties of Eigenvalues and Eigenvectors // *AIAA Journal*.— Vol.8.— May, 1970.— P. 943-944.
299. **Schiermeier J.E., Housner J.M., Ranson J.B., Aminpour M.A., Stroud W.J.** The Application of Interface Element to Dissimilar Meshes in Global/Local Analysis // *MSC 1996 World Users' Conference Proceedings*.
300. **Seisme Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary of Stanard for Analysis of Safety-Related Nuclear Structures** // *ASCE Standard*.— Sept., 1986.
301. **Semenov V.A., Semenov P.Yu.** Hybrid finite elements for analysis of shell structures // *Proceedings International Congress ICSS-98, June 22-26, 1998*.— Moscow: 1998. Vol. 1.— P. 244-251.
302. **Shewchuk J.R.** Delaunay refinement Mesh Generation: PhD Thesis / Carnegie Mellon University, 1997.

303. **Spence P.W., Kenchington C.J.** The Role of Damping in Finite Element Analysis.— Glasgow: NAFEMS, 1993.
304. **Srinivasan R.S., Bobby W.** Buckling and Postbuckling Behavior of Shallow Shells // AIAA Journal.— 1976.— Vol.; 14.— No. 3.— P. 289-290.
305. **StressCheck.** The Stress Analysis Tool for Everyday Use. USER'S GUIDE.— St. Louis, USA: Engineering Software Research & Development, Inc., 1998.
306. **Thompson J.M.T., Hunt G.W.** A General Theory of Elastic Stability.— London: John Wiley, 1973.
307. **Tong P.** Exact solution of certain problems by finite element method // AIAA Journal.— 1969.— №1.— P. 178-180.
308. **Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.** Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures // Journal of the Aeronautical Sciences.— 1956.— Vol. 23.— No 9.— P. 805-823.
309. **UBC 1997.** Uniform Building Code. Vol. 2: Structural Engineering Design Provisions.— Whittier, Ca: International Conference of Building Officials, 2000.
310. **Wilson E.** Three Dimensional Dynamic Analysis of Structures.— Berkeley: A Publication of Computer and Structures, Inc., 1997.
311. **Wilson E.I.** Soil-Structure interactions /www.csibercli.com/Tech\_Info/16.pdf
312. **Wilson E.L. Habibullah A.** Static and Dynamic Analysis of Multi-Story Buildings Including P-Delta Effects, Earthquake Spectra // Earthquake Engineering Research Institute, Vol. 3, No.3, May 1987.
313. **Yegupov V.K., Yegupov K.V., Starodub V.I., Mazur P.P., Kostrlitskiy.** Simulation and automation of calculations of buildings (structures) on seismic effects // Computer & Structures .— Vol.63.— 1997, No.6.— P. 1065–1083
314. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The finite element method. Vol.2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford Auckland Boston Johannesburg Melbourne New Delhi.

# Именной указатель

- Авдеева Л.И. 108, 670, 689  
Аведьян А.Б. 666, 685  
Адамс (Adams V.) 666, 698  
Адини А. (A. Adini) 252, 273, 698  
Адлер Ю.П. 86, 685  
Айзенберг Я.М. 685  
Айронс Б. (B.M. Irons) 187, 303, 307, 685, 700  
Александров А.В. 219, 220, 298, 515, 539, 685  
Алексеев С.А. 231, 685  
Алексеев Б.Г. 186, 685  
Аль-Насер-Мохамад Самих Амин 696  
Альтенбах И. 695  
Аминпур (Aminpour M.A.) 701  
Аргирос Дж. 90, 685  
Армен (Armen) 172, 699  
Артеменко В.В. 478, 685, 688  
Ашкенази (Askenazi A.) 666, 698  
Бабушка (Babushka I.) 308, 698  
Баенхаев А.В. 218, 685  
Базант З. (Z.P. Bazant) 645, 699  
Базилевский С.В. 632, 693  
Бажанов В.Л. 85, 688  
Байер (Bayer J.) 346, 699  
Банах Л.Я. 563, 686  
Барвашов В.А. 434, 436, 686  
Барлоу 237  
Бартошевич Э.С. 423, 691  
Бате К. 567, 568, 686  
Бегун Т.Е. 14, 696  
Безволев С.Г. 428, 696  
Безухов Н.И. 686  
Бейкер Д. 381, 686  
Бек 489  
Беккер (Becker A.A.) 76, 699  
Беличко (Belytscko T.) 308, 699  
Белл Дж.Ф. 15, 686  
Беллман Р. 103, 106, 686  
Бельский Г.Е. 506, 686  
Берес (Beres E.) 237, 699  
Берже М. 483, 686  
Бернулли Я. (J. Bernoulli) 18, 27, 253, 260, 277, 278, 279, 280, 309, 559  
Бернштейн А.С. 697  
Бессель 421, 438, 439  
Био М. 597  
Бирбраер А.Н. 171, 349, 452, 686  
Блехман И.И. 16, 24, 196, 201, 350, 559, 686  
Бобби (Bobby W.) 316, 702  
Бовин В.А. 501, 686  
Богнер (Bogner F.K.) 182, 183, 699  
Богданова Е.Н. 640, 686  
Болдычев В.П. 218, 219, 686  
Болотин В.В. 487, 543, 544, 686  
Бондарев Ю.В. 645, 686  
Бонди Г. 342, 686  
Борисенко В.С. 688  
Бородачев Н.М. 434, 687  
Босс В. 633  
Бубнов И.Г. 515  
Бусьгин В.Г. 97, 687  
Бутзел (Butzel I.M.) 173, 699  
Васидзу 218, 687  
Вилсон Е. 452, 549, 567, 568, 569, 591, 592, 686, 702  
Винклер 420, 421  
Виноградов А.И. 103, 687  
Вирди (Viridi K.S.) 700  
Власов В.З. 309, 421, 456, 468, 471, 687  
Вовкушевский А.В. 145, 149, 194, 239, 240, 687  
Войновский-Кригер С. (Woinovsky-Kriger) 205, 220, 247, 696  
Вольмир А.С. 130, 313, 687  
Вонг (Wang Szing) 237, 700  
Воробьев Н.Н. 383, 384, 687  
Габричидзе Г.К. 687  
Гайян Р. 561, 562, 687  
Галактионов Ю.И. 10, 690  
Галасова К.П. 214, 687  
Галеркин Б.Г. 8, 17  
Гальченко Л.А. 555, 687  
Гантмахер Ф.Р. 566, 677, 687  
Гашпар З. (Z. Gaspar) 513  
Гаусс К.Ф. (K.F. Gauss) 119, 328, 672, 674  
Гвоздев А.А. 674  
Гейзен Р.Е. 61, 687  
Гейзенберг 79, 635  
Гельфандбейн А.Н. 423, 687  
Геммерлинг А.В. 506, 688  
Гениев Г.А. 688  
Гере Дж. 29  
Герсеванов Н.М. 13, 420, 688  
Гилмор (Gilmour J.R.) 700  
Гилдман Г.Б. 688  
Гольденблат И.И. 13, 85, 688  
Голуб Аллен И. 306, 685  
Горбовец А.В. 297, 324  
Горбунов Б.Н. 387, 692  
Горбунов-Посадов М.И. 420, 429, 688  
Гордеев В.Н. 478, 483, 669, 685, 688  
Гордеева С.П. 580, 581, 582, 583, 584, 688

- Горев В.В. 506, 507, 688  
 Городецкий А.С. 78, 296, 634, 636, 688  
 Гранин Д. 1  
 Грановский Ю.В. 685  
 Гребенюк Г.И. 381, 689  
 Грейв-Моррис П. 381, 686  
 Григолюк Э.И. 313, 689, 700  
 Гринзоу Лу 119, 128, 691  
 Губанова И.И. 29, 161, 536, 692  
 Гук Р. (R. Hook) 30, 31, 75, 78  
 Гусева Н.И. 552, 697  
 Давенпорт (Davenport A.G.) 630, 699  
 Давиденко Д. 313  
 Давлетханова А.Д. 343, 698  
 Даламбер 571  
 Данилин А.Н. 313, 666, 685, 689  
 Деклу Ж. 235, 236, 689  
 Джанелидзе Г.Ю. 226, 227, 689  
 Диксон Дж. 326, 689  
 Динкевич С.З. 496, 689  
 Дирак 420  
 Дроздов Ю.П. 342, 689  
 Евзеров И.Д. 194, 688, 689  
 Егупов В.К. 702  
 Егупов К.В. 702  
 Елсукова К.П. 423, 425, 453, 689  
 Ермаков С.М. 377, 689  
 Жеков К. 23, 689  
 Жемочкин Б.Н. 177, 420, 689  
 Жук Ю.Н. 688  
 Заруцкий В.А. 318  
 Зенкевич О. (O. Zienkiewicz) 197, 237, 238, 335, 689, 702  
 Зуев Н.Н. 689  
 Зуховицкий С.И. 108, 670, 689  
 Ивлев Д.Д. 145, 690  
 Ильичев В.А. 554, 690  
 Йонг Жоу (Yong Zhou) 645, 699  
 Йошида (Yoshida N.) 700  
 Исидзука М. 697  
 Итох (Itoh M.) 700  
 Казакевич М.И. 553, 690  
 Калинина Л.Г. 381, 690  
 Канемитсу (Kanemitsu T.) 390, 701  
 Кантин (Cantin G.) 700  
 Капур Н. (N.P. Kapoor) 356, 357, 700  
 Каримов И.А. 667, 690  
 Карман Т. (Th. Karman) 130  
 Карпиловский В.С. 194, 690  
 Картвелишвили Н.А. 10, 690  
 Кастильяно 216, 414  
 Каупер (Cowper G.R.) 182, 699  
 Качпржык (Kacprzyk J.) 9, 700  
 Кенчингтон (Kenchington C.J.) 590, 702  
 Кирхгофф (G. Kirchhoff) 60, 179, 211, 218, 248, 290  
 Кирш 206  
 Киурегиан (Der Kiureghian) 172, 699  
 Клаф Р. (R.W. Clough) 170, 252, 273, 561, 690, 698, 702  
 Клемперт Ю.З. 669, 690  
 Ключева Н.В. 688  
 Книга А.И. 536  
 Койтер В. (W.T. Koiter) 318, 547, 700  
 Колосова Г.С. 427, 690  
 Колоушек В. (V. Koloushek) 570, 690  
 Колчунов В.И. 688  
 Комков В. (V. Komkov) 697  
 Кондо (Kondo I.) 700  
 Контини Р. 695  
 Корноухов Н.В. 189, 190, 191, 192, 494, 509, 538, 549, 690  
 Королев С.П. 341  
 Коско (Kosko E.) 182, 699  
 Космодемьянский А.А. 31, 690  
 Кострицкий 702  
 Котельников 559  
 Кочин Н.Е. 525, 526, 691  
 Коши 310  
 Краутхаммер (Krauthammer T.) 646, 699  
 Крелле В. 144, 691  
 Криксунов Э.З. 690  
 Кронекер 356, 416  
 Крылов А.Н. 186, 317  
 Кулябко В.В. 553, 690  
 Кулла (Kulpa Z.) 372, 700  
 Кун 144  
 Кухлемейер (Kuhlemeyer R.I.) 452, 701  
 Кюнце Г.П. 144, 691  
 Лагранж Ж. (J.L. Lagrange) 111, 117, 194, 235, 261, 280, 415, 498  
 Ламе 174  
 Лаплас 437  
 Ларионов В.В. 691  
 Лащеников Б.Я. 685  
 Лебедев Н.Н. 438, 691  
 Лем С. 223, 551  
 Леонтьев Н.Н. 421, 687  
 Линд (Lind N.) 32, 700  
 Линдберг (Lindberg G.M.) 182, 699  
 Лисмер (Lysmer J.) 452, 701  
 Лойцянский Л.Г. 535, 691  
 Лоусон Ч. 103, 105, 691  
 Лубиньяк (Loubignac G.) 237, 238, 239, 701  
 Лужин О.В. 694  
 Лукасевич С. 247, 265, 691  
 Лукаш П.А. 75, 691  
 Лурье А.И. 526, 535, 691

- Ляв А. (A.E.H. Love) 60, 179, 248, 290  
Мазур П.П. 702  
Макдональд 421, 432  
МакЛеод (MacLeod I.A.) 82, 701  
МакНил (MacNeal R.H.) 664, 701  
Маликова Т.А. 688  
Малов В.Ю. 345, 691  
Малькольм Н. 697  
Маляренко А.А. 690  
Манвелов Л.И. 423, 691  
Маркова Е.В. 685  
Мартин (Martin H.C.) 702  
Марчук Г.Н. 202, 691  
Маслов Д.А. 44  
Мастаченко В.Н. 85, 691  
Матвеев А.В. 685  
Маяковский В.В. 659  
Мензиес (Menzies J.B.) 701  
Меркин Д.Р. 130, 691  
Мерчант (Merchant H.C.) 173, 699  
Мизес Р. (R. Mises) 162  
Миндлин 218  
Минькович Е.И. 56, 688, 691  
Митсуи (Mitsui K.) 390, 701  
Мор 388  
Моррис У. 21, 691  
Моулер К. 294, 697  
Мышкис А.Д. 686  
Назаров Д. 313, 691  
Назаров Ю.П. 27, 607, 688, 691  
Налимов 379  
Нельсон 357, 361  
Нгуен Тханх Суан 645, 686  
Николаенко Н.А. 27, 607, 688, 691  
Никулин А.И. 688  
Новожилов В.В. 75, 79, 129, 403, 692  
Нудельман Я.Л. 499, 692  
Ньмарк Н. 568, 608, 692  
Овсянко В.М. 489, 490, 692  
Оден J. (J.T. Oden) 139, 140, 241, 242, 308, 692, 698, 701  
Олман Д.Дж. 220, 264, 692, 698  
Олсон (Olson M.D.) 182, 699  
Осташевский А.А. 139, 692  
Паде 381  
Пановко Я.Г. 14, 29, 161, 226, 227, 259, 260, 287, 536, 590, 686, 689, 692  
Папкович П.Ф. 227, 493, 692  
Париков В.И. 60, 669, 678, 690, 692  
Пастернак П.Л. 421, 432, 433, 692  
Патон Е.О. 387, 692  
Пахомов В.Л. 695  
Пашковский М.В. 536  
Пеано (Peano A.) 213, 701  
Пензиен Дж. 170, 561, 690  
Перельмутер А.В. 54, 62, 103, 117, 118, 120, 128, 145, 146, 152, 334, 348, 381, 383, 405, 407, 417, 642, 648, 688, 690, 692, 693  
Перельмутер М.А. 690  
Перминов М.Д. 563, 686  
Петров А.А. 632, 693  
Петров В.В. 693  
Пиан Т. (T.H.H. Pian) 216? 701  
Пифагор 336  
Подольский Д.М. 85, 366, 369, 693  
Поляков С.В. 688  
Попов Н.А. 697  
Почтман Ю.М. 9, 345, 691, 694  
Проктор Г.Э. 420  
Проценко А.М. 382, 694  
Пуанкаре А. (H. Poincaré) 196  
Пуассон М. (M. Poisson) 174, 205, 247, 279, 287, 343  
Пузыревский 186  
Пятикрестовский К.П. 688  
Рабинович И.М. 73, 105, 146, 617, 674, 694  
Рансон (Ranson J.B.) 701  
Резников Р.А. 40, 167, 575, 661, 694  
Редди (J.N. Reddy) 241, 242, 701  
Рейсснер Э. (E. Reissner) 179, 211, 216, 218, 248  
Рейтман М.И. 89  
Релей 497, 518  
Реут 489  
Ржаницын А.Р. 92, 93, 94, 95, 388, 500, 506, 507, 518, 519, 694  
Ривкин А.М. 686  
Ритц В. (W. Ritz) 17  
Ричардсон 202, 203, 204, 205, 206  
Робинсон Дж. 101, 695  
Роджерс Л. (L.C. Rodgers) 357, 701  
Родриг (Rodrigues) 526  
Розенблом 171, 621, 628  
Розенблюэт Э. 608, 692  
Розин Л.А. 89, 97, 173, 175, 185, 218, 687, 695  
Росланец (Roslaniec K.) 372, 700  
Рудых О.Л. 75, 695  
Сандович Т.А. 696  
Сапонджян 287  
Сахаров А.С. 202, 206, 218, 219, 315, 695  
Свойский Ф.М. 258, 695  
Сегерлинд Л. 241, 695  
Семенов В.А. 216, 217, 219, 264, 276, 695, 701  
Семенов П.Ю. 216, 217, 219, 264, 276, 695, 701  
Сен-Венан 226, 229, 287

- Синицын А.П. 177, 689, 694  
Сливкер А.В. 219, 695  
Сливкер В.И. 54, 56, 60, 62, 117, 118, 120, 128, 214, 242, 243, 334, 337, 417, 423, 425, 434, 453, 669, 678, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 695  
Смирнов А.Ф. 508, 509, 511, 512, 696  
Снеговский Д.В. 689  
Соколов Г.П. 695  
Соломин В.И. 688  
Сорокин Е.С. 570, 571, 620, 696  
Спенс (Spence P.W.) 590, 702  
Стародуб В.И. 702  
Стренг Г. (G. Strang) 206, 226, 237, 287, 336, 500, 696  
Стриклин Дж. 310, 696  
Таккер 144  
Тананайко О.Д. 453, 697  
Тейлор Р. (R. Taylor) 335, 702  
Теренин В.М. 694  
Тернер (Turner M.J.) 309, 702  
Тимошенко С.П. 29, 179, 205, 218, 219, 220, 247, 253, 260, 277, 278, 279, 280, 284, 515, 559, 696  
Томпсон Дж. (Thompson J.M.T.) 487, 546, 548, 696, 702  
Тонг П. (P. Tong) 185, 216, 701, 702  
Топп (Торр L.J.) 702  
Травуш В.И. 685  
Трофимов В.И. 14, 696  
Тузо (Touzot G.) 701  
Уваров Б.Ю. 688  
Уздин А.М. 454, 600, 602, 615, 696  
Ульянов С.В. 688  
Усаковский 369  
Утагава (Utagawa N.) 700  
Уфлянд Я.С. 696  
Фан Юан-хун (Fan Yuan-xun) 237, 700  
Федоровский В.Г. 428, 436, 686, 696  
Феодосьев В.И. 10, 29, 30, 78, 211, 226, 488, 489, 490, 543, 648, 651, 697  
Фиалко С.Ю. 331, 696  
Фикс Дж. (G. Fix) 206, 226, 237, 287, 336, 696  
Филин А.П. 91, 97, 697  
Филиппов В.В. 688  
Филоненко-Бородич М.М. 421, 424, 697  
Фокс Р. (R. Fox) 182, 183, 356, 357, 699  
Форсайт Дж. 294, 631, 697  
Фридман М.М. 9, 694  
Фу К.С. 9, 697  
Фурье 226  
Хабибулах (Habibullah A.) 549, 702  
Хаггенмахер Г.В. 101, 695  
Хайслер В. 310, 696  
Хант Дж. (J.W. Hunt) 548, 702  
Хардер (Harder R.C.) 664, 701  
Хауснер (Housner J.M.) 701  
Хенсон А. 102, 105, 691  
Хитчинг (Hitching D.) 700  
Хог Е. (E.J. Haug) 353, 697  
Холецкий 119  
Хряков А.Д. 216, 697  
Хубер (Huber P.J.) 366, 700  
Хургин Я.И. 330, 665, 697  
Цейтлин А.И. 552, 697  
Черкесов Г.Н. 697  
Черная Е.Г. 381, 697  
Чернева И.М. 149, 696, 697  
Чернов Ю.Т. 645, 698  
Чирас А.А. 382, 698  
Чой К. (K.K. Choi) 646, 697  
Шайдулов В.В. 202, 691  
Шалашилин В.И. 313, 689, 700  
Шапошников Н.Н. 60, 685  
Шашкин А.Г. 445, 698  
Шашкин К.Г. 445, 698  
Шварц М.А. 697  
Шварцман Б.С. 206, 698  
Шевчук (Schewchuk J.R.) 215, 701  
Шелест Л.А. 423, 687  
Ширмейер (Schiermeier J.E.) 230, 701  
Шмит (Schmit L.A.) 182, 183, 699  
Шойхет Б.А. 145, 149, 194, 687  
Шринивасан (Srinivasan R.S.) 316, 702  
Шулькин Ю.Б. 53, 54, 121, 385, 698  
Эйлер Л. (L. Euler) 18, 27, 253, 278, 279, 309, 311, 559  
Эйнштейн А. 663  
Элджер (Alger Jeff) 252, 700  
Эрмит (C. Hermite) 185, 273  
Эрнст 154  
Эшби У. 25, 698  
Юсупов А.К. 343, 698  
Янг Л. 260, 698  
Яньков Е.В. 381, 689  
Яо Дж.Т.П. 697  
Ясинский Ф.С. 503, 698

# Предметный указатель

## асSEMBЛИРОВАНИЕ

– конечных элементов 114

альфа тестирование 662

анализ апостериорный 18

бесконечно жесткая вставка 55

бета тестирование 662

валидация 332

## вектор

– зависимых перемещений 114

– свободных перемещений 114

верификация 332

## воздействие

– внешнее 6

– внутреннее 6

– кинематическое 6

– силовое 6

выпуклость области устойчивости 493

гибкость 506

гладкость конечно элементной сетки 215

глобально/локальный анализ 181

группа 34

двойственность 99

демпфирование излучением 591

дескриптор 38

динамическая конденсация 561

дислокации 109

## дисперсия

– адекватности 86

– воспроизводимости 86

документирование результатов расчета 324

закон наследования монтажных состояний 396

звезда элементов узла 239

жордановы исключения 670

– двойные 682

– модифицированные 680

## идеализация

– материала 4

– нагрузок 5

– связей 6

изоклина 315

изопахика 315

изостата 315

изохрома 315

карта значений 321

конвертор 41

## коэффициент

– внутреннего трения 619

– восстановления (отскока) 619

– динамичности спектральный 598

– запаса устойчивости 492

– затухания 557

– импульсивности 618

– корреляции 603

– неупругого сопротивления 555, 571

– поглощения 586

– поглощения энергии 619

– понижения жесткости (энергетический) 512

– постели 420

– потеря 619

– пульсаций 626

– свободной длины 501

– синфазности 577

– участвия 600

– формы 602

– чувствительности 351

## конечный элемент

– жидкостный 417

– с твердотельными узлами 182

логарифмический декремент колебаний 584

маркер 34

мастер 46

масштабирование 187

## матрица

– внешней жесткости 92

– внешней податливости 92

– внутренней жесткости 92

– внутренней податливости 92

– геометрической жесткости 140

– инцидентов 91

– податливости основной системы метода сил 98

– псевдожесткости 98

– псевдоподатливости 94

матрица-проектор 102

## метод

– Гаусса 672

– двух функционалов 242

– сил 96

– смешанный 121

– сопряженных ароксимаций 241

## множество решений

– граничное 372

– объединенное 372

– параметрическое 373

## моделирование

– геометрическое 3

– сопряжения

– оболочечных элементов 268

– стержня с объемным элементом 268

– стержня с пластиной 355

## модель

- вантового элемента линейризованная 158
- Винклера 555
- Гордеевой 580
- основания двухпараметровая 421
- мажорантная 16
- минорантная 16
- Пастернака 556
- сжато-изогнутого элемента линеризованная 165
- основания CCC (трехпараметровая) 436
- тонкостенного стержня бистержневая 455
- упругого полупространства 420
- моносвязь 62
- нагрузка
  - возрастающая 493
  - стабильная 493
- начальные неправильности 545
- нелинейность
  - генетическая 75, 392
  - геометрическая 75
  - конструктивная 75
  - физическая 75
- неопределенность 7
- нормальная форма МКЭ 90
- нуль-элемент 121
- осреднение напряжений 235
- оценка Розенблюма 171
- парадокс Сапонджяна 287
- параметр затухания 170
- параметризация 44
- параметры
  - контролируемые 390
  - управляющие 390
- петч-тест 307
- подконструкция 34
- поле напряжений
  - непрерывное 233
  - статически полудопустимое 243
- полисвязь 62
- полубесконечные конечные элементы 425
- потеря устойчивости равновесия
  - принужденная 515
  - стесненная 516
- преднапряжение 407
- принцип Сен-Венана 226
- пропорциональное демпфирование 566
- пространство
  - кинематически допустимых перемещений 112
  - полисвязей 112
- процедура Гайяна 561
- процедура статического уплотнения 169
- процессы
  - быстрые 560
  - медленные 560
  - нормальные 560
- разброс исходных данных 342
- расчет по деформированной схеме 129
- режим вариации моделей 375
- сверхсовместность 262
- связь
  - нуль-податливая 120
  - односторонняя жесткая 148
  - односторонняя упругая 148
- сдвиг фаз 554
- сеточный генератор 181
- система
  - квазимоноциклическая 190
  - моноциклическая 190
  - полициклическая 190
  - с неполным числом масс 561
  - с односторонними связями 142
- скорость сходимости 200
- сопряженные переменные 352
- спектр
  - отклика 612
  - пульсаций скорости ветра 628
  - реакций 597
  - сигнала 559
  - ускорений 597
- степень кинематической неопределенности 92
- суперэлементы 305
- тест Горбовца 297
- узел
  - ведомый 67
  - ведущий 67
- физическая дискретизация 177
- фильтр отображения 33
- форма потери устойчивости
  - высшая 498
  - скрытая 496
  - явная 496
- формула Эрнста 154
- фрагмент 34
- фрагментация 223
- функционал Лагранжа 111
- характеристическая кривая 334
- характерное перемещение 332
- чувствительность
  - перемещений 351
  - собственных значений 355
  - усилий 354
- шаговая процедура 309
- экстраполяция Ричардсона 202
- элемент

- безусловно необходимый 107
- вязкого трения 589
- игольчатый 179
- конструктивный 192
- нейтральный 513
- нелинейно-вязкого трения 590
- повышенного порядка точности 183
- с твердотельными узлами 183
- сухого трения 589
- толкающий 509
- удерживающий 509
- условно необходимый 106
- эффект ложного сдвига 218

**Учебное издание**

**Анатолий Викторович Перельмутер**

**Владимир Исаевич Сливкер**

**РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ**

**СООРУЖЕНИЙ**

**И ВОЗМОЖНОСТЬ**

**ИХ АНАЛИЗА**

Дизайн и верстка: *И.Ф. Лайкина*

Подписано в печать 15.02.2011 г.

Формат 70\*100/16. Бумага офсетная

Объем 46 печатных листов. Тираж 2000 экз.

Заказ № 159

Издательство **СКАД СОФТ**

105082, Москва, Рубцовская набережная, д. 4, корп. 1, помещение VII

тел/факс: +7-(499)-267-40-76, 940-88-27, 940-88-29

e-mail: [scad@scadsoft.ru](mailto:scad@scadsoft.ru), <http://www.scadsoft.ru>

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)

129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26

Тел/факс +7-(499)-183-56-83, [iasv@mgsu.ru](mailto:iasv@mgsu.ru), <http://www.iasv.ru>

Электронный адрес издательства ДМК Пресс:

[books@dmk-press.ru](mailto:books@dmk-press.ru)

Web-сайт издательства: [www.dmk-press.ru](http://www.dmk-press.ru)

Отпечатано в ОАО «Типография «Новости»

105005, Москва, ул. Энгельса, д. 46