Лекции. Часть 1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Введение в устойчивость сооружений

Опыт эксплуатации сооружений показывает, что для их надежности одной прочности не достаточно, т.к. при увеличении нагрузки или случайном воздействии сооружение могут внезапно потерять свою устойчивость, затем разрушиться или стать непригодным для дальнейшей эксплуатации. Например, простейший элемент в виде прямолинейного длинного стержня под действием продольной сжимающей силы может резко изогнуться и потерять свою первоначальную прямолинейную форму. После этого стержень будет оставаться изогнутым или, если прочности будет недостаточно, внутренние силы приведут к его разрушению.

Устойчивость – это способность сооружения сохранять свое первоначальное положение или форму. Переход устойчивого сооружения в состояние неустойчивого равновесия называется ***потерей устойчивости***. Граница перехода в состояние неустойчивого равновесия называется ***критическим состоянием***. Сила, приводящая сооружение в критическое состояние, называется ***критической силой***. Ее будем обозначать $P_{кр}$.

Явление потери устойчивости возникает и в стержневых системах, и в пластинах, и в оболочках. Устойчивость как простых систем, так и сложных сооружений, состоящих из множества элементов, зависит от устойчивости отдельных элементов и их совместной работы в сооружения.

Ответ на вопрос “устойчиво или неустойчиво сооружение?” является очень важной задачей. Потому что для потери устойчивости сооружения, достигшего критического состояния, достаточно и незначительной причины. Если же процесс потери устойчивости начался, он идет очень быстро и приводит к резкому изменению первоначальной формы, или разрушению частей или всего сооружения. В практике строительства и эксплуатации различных сооружений (мостов, высотных зданий и др.) известно много случаев их разрушения из-за потери устойчивости. Как ни печально, такие бедствия случаются и сейчас.

Проблемами расчета на устойчивость занимается специальный раздел строительной механики − ***устойчивость сооружений***. В нем разрабатываются теоретические положения и методы расчета на устойчивость, решаются прикладные задачи определения критических нагрузок и форм потери устойчивости сооружения, влияния случайных нагрузок на его поведение.

Теория устойчивости сооружений делится на статическую и динамическую устойчивость. Здесь будем рассматривать лишь задачи статической устойчивости, учитывающей только статическое воздействие нагрузки.

Виды и типы потери устойчивости

Сооружение считается устойчивым, если после окончания внешнего воздействия возвращается в положение первоначального равновесия и принимает первоначальную форму. Когда материал сооружения работает в упругой зоне, происходит полное возвращение, а при переходе в пластическую область − частичное.

Различают два вида потери устойчивости – устойчивость положения и устойчивость формы.

Устойчивость положения – это способность сооружения сохранять свое положение. Например, при действии на подпорную стенку нагрузки q (рис. 4.1 а) относительно точки A создается опрокидывающий момент $M_{опр} = qh^2/2$, отчего подпорная стенка может потерять устойчивость (рис. 4.1 б). Опрокидыванию противостоит собственный вес подпорной стенки G, создающий удерживающий момент $M_{уд} = Gl$.

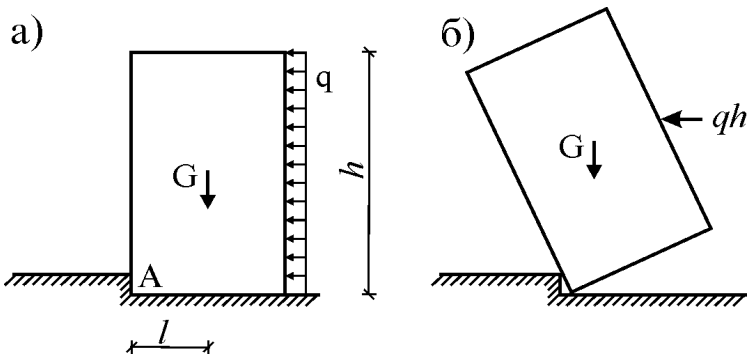


Рис. 4.1

Устойчивость системы зависит от соотношения этих моментов, так как она при:

1) $M_{опр} < M_{уд}$ – находится в положении устойчивого равновесия;

2) $M_{опр} > M_{уд}$ – находится в положении неустойчивого равновесия;

3) $M_{опр} = M_{уд}$ – находится в безразличном состоянии.

Если ввести коэффициент устойчивости положения

$$k = \frac{M_{уд}}{M_{опр}}, \qquad (4.1)$$

из этих соотношений следует, что:

1) при $k > 1$ − система устойчива;

2) при $k < 1$ − система неустойчива;

3) при $k = 1$ − система находится в безразличном состоянии.

Таким образом, для устойчивости системы необходимо выполнение условия $k>1$. Однако, чтобы добиться более надежной устойчивости системы, принимают завышенное значение коэффициента k. Например,

для устойчивости высотных радио- или телевизионных мачт по строительным нормам должно быть $k>2,5$.

Устойчивость формы – это способность сооружения сохранять свою первоначальную форму.

Пусть на прямой стержень с заделанным и свободным концами действует некоторая сжимающая продольная сила P, направленная вдоль оси стержня (рис. 4.2 а). Если верхний конец стержня немного отклонить в сторону, то при P меньшей некоторой величины $P_{кр}$ он вернется в исходное положение. Этот процесс можно сравнить с возвращением тяжелого шарика, расположенного выше дна углубления, в нижнее устойчивое положение (см. схему внизу рис. 4.2 а). Поэтому можно считать, что при $P<P_{кр}$ система является устойчивой.

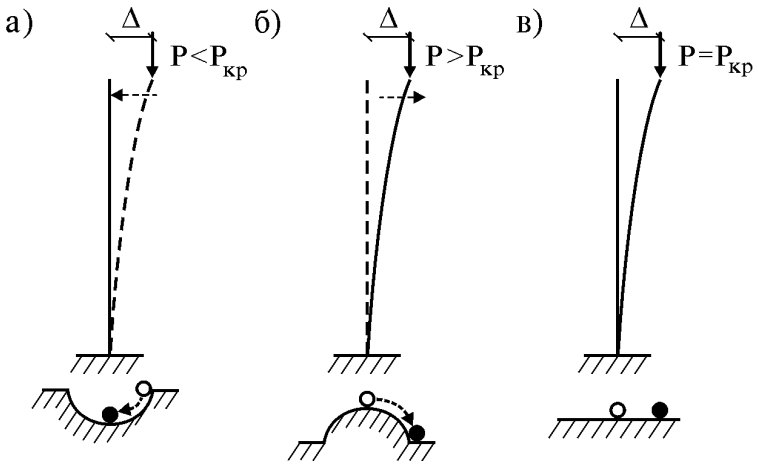


Рис. 4.2

Если же $P>P_{кр}$, перемещения отклоненного стержня начнут возрастать (рис. 4.2 б), и он уже не вернется в исходное положение. Этот процесс можно сравнить со скатыванием шарика с горки, как не способного к возвращению в первоначальное устойчивое положение (см. схему внизу рис. 4.2 б). Значит, при $P>P_{кр}$ система будет неустойчивой.

Если $P=P_{кр}$, отклоненный стержень будет оставаться в том же положении без движения (рис. 4.2 в). Это явление можно сравнить с шариком на горизонтальной плоскости, который при любом его смещении останется на новом месте без движения (см. схему внизу рис. 4.2 в). Поэтому можно говорить, что при $P=P_{кр}$ система находится в безразличном состоянии.

Как видно из примера, в зависимости от величины приложенной нагрузки система может быть устойчивой, неустойчивой или безразличной. Однако, если шарику, находящемуся в безразличном состоянии, при смещении сообщить некоторую скорость, то он покатится дальше. Значит, даже безразличное состояние можно считать неустойчивым. Поэтому систему можно считать устойчивой только тогда, когда она способна возвратиться в исходное положение при любом отклонении.

Отклоненный шарик устойчивой системы (рис. 4.2 а), возвращаясь в исходное положение, совершает некоторую работу. Поэтому первоначальная энергия системы уменьшается. В неустойчивой системе (рис. 4.2 б), наоборот, энергия системы возрастает. В безразличной системе (рис. 4.2 в) энергия не меняется. Значит, энергия устойчивой системы минимальна, неустойчивой системы − максимальна, безразличной системы − постоянна.

Теперь рассмотрим шарик, лежащий на маленьком углублении выпуклой поверхности (рис. 4.3 а). При незначительных отклонениях шарика он вернется в начальное положение, т.е. является устойчивым. Такая устойчивость называется ***устойчивостью «в малом»***. Если же шарик получит бóльшее отклонение, то скатится вниз, т.е. потеряет устойчивость. В отличие от этого, шарик на рис. 4.2 а будет устойчивым и при значительных отклонениях. Такая устойчивость называется ***устойчивостью «в большом»***. Если система устойчива в большом, она будет устойчивой и в малом. Но обратное утверждение не имеет места.

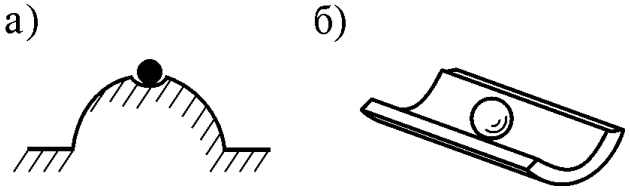


Рис. 4.3

До сих пор мы рассматривали системы с одной степенью свободы. Определение устойчивости систем с несколькими степенями свободы значительно сложнее, так как они в одном или нескольких направлениях могут быть устойчивыми, а в других − неустойчивыми или находиться в безразличном состоянии. Например шарик, лежащий на дне горизонтального желоба (рис. 4.3 б) в поперечном направлении находится в устойчивом, а в продольном − в безразличном состоянии. Или, если у стержня, рассмотренного на рис. 4.2 а, момент инерции сечения в плоскости рисунка будет меньше момента инерции в поперечном направлении, то он скорее всего потеряет устойчивость в направлении меньшей жесткости. Поэтому такой стержень в одном направлении будет находиться в положении устойчивого, а в другом − неустойчивого равновесия.

Устойчивое и неустойчивое равновесие (движение) системы является одним из самых сложных понятий механики, поэтому часто интерпретируется по-разному. Но, несмотря на это, устойчивость можно разделить на два основных рода.

Потеря устойчивости первого рода связана с нарушением равновесия между внешними и внутренними силами и характеризуется появлением новой формы деформации, возникающей почти мгновенно. Она может быть трех типов:

– потеря устойчивости центрального сжатия;

– потеря устойчивости симметричной формы деформации;

– потеря устойчивости плоской формы деформации.

Например, центрально-сжатый стержень на рис. 4.2 а теряет устойчивость за счет появления новой, изгибной деформации. Симметричная рама на рис. 4.4 а под действием силы P получает симметричные деформации. Но при увеличении этой силы и достижении силы P критического значения $P_{кр}$ рама резко теряет свою устойчивость и переходит к несимметричной форме деформированного состояния (рис. 4.4 б). Двутавровая балка, изображенная на рис. 4.4 в, под действием вертикальной силы P изгибается в вертикальной плоскости. Но если эта сила достигнет некоторого критического значения $P_{кр}$, балка начнет выгибаться вбок и закручиваться, теряя первоначальную форму и состояние плоской деформации.

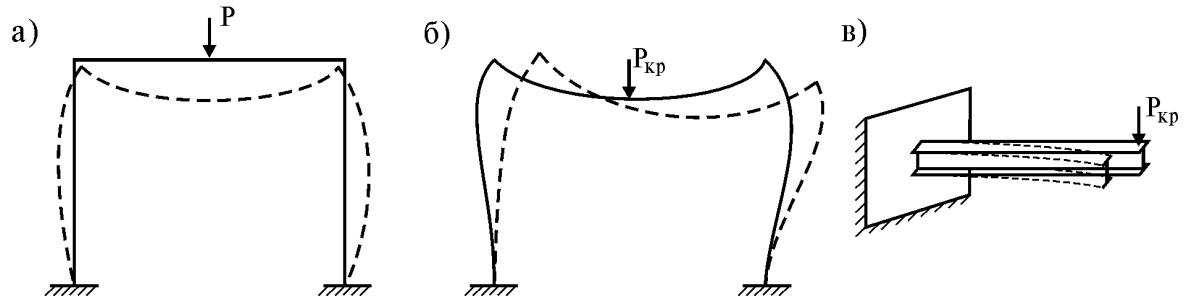


Рис. 4.4

Если потеря устойчивости произойдет в пластической области работы материала, то новая форма равновесия в деформированном состоянии будет иметь остаточные деформации.

Потеря устойчивости второго рода характеризуется потерей несущей способности всего сооружения и наблюдается как резкое возрастание предыдущих деформаций. В этом случае равновесие между нагрузкой и внутренними усилиями нарушается даже без появления новых видов деформаций.

Например, внешняя сила P, действующая на вертикальный стержень с некоторым смещением от его продольной оси (рис. 4.5 а), с самого начала вызывает не только продольную деформацию, но и изгиб. С увеличением силы P внутренние усилия, деформации и перемещения стержня будут возрастать почти пропорционально этой силе. Однако далее влияние продольной силы начинает резко увеличиваться, и в некоторый момент времени деформации и перемещения начнут увеличиваться и без возрастания нагрузки.

Потеря устойчивости второго рода может происходить как со сменой первоначальной формы деформации, так и без нее. Например, может произойти потеря несущей способности двухшарнирной арки (рис. 4.5 б) даже в упругой стадии, без смены формы деформации. Далее равновесие возможно лишь с уменьшением силы P.

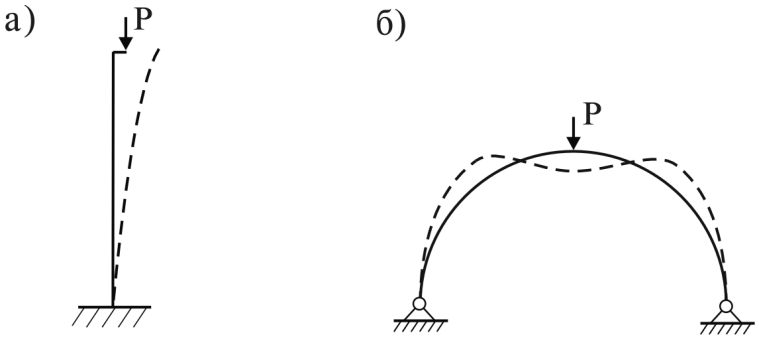


Рис. 4.5

Следует отметить, что оба рода потери устойчивости возможны как при эластических деформациях, так и в упруго-пластической зоне работы материала.

Классической задачей устойчивости сооружений является расчет сооружений на устойчивость первого рода. При этом обычно рассматриваются консервативные системы, т.е. системы, обладающие двумя свойствами:

− величина и направление действующих сил зависит от положения системы;

− работа, совершаемая силами, зависит от их начального и конечного положения, но не зависит от пути их следования.

Потерю устойчивости во многих случаях можно рассматривать как раздвоение формы равновесия, называемое ***бифуркацией***. Например, прямолинейный стержень при достижении продольной силы критического значения $P_{кр}$ может принять и криволинейную форму. Поэтому при $P=P_{кр}$ происходит упомянутое раздвоение формы равновесия.

Для установления равновесия системы используются два подхода:

1) принцип возможных перемещений, по которому: *если система находится в равновесии, то сумма работ всех внешних и внутренних сил на любых бесконечно малых перемещениях равна нулю*;

2) свойство потенциальной энергии системы, по которому: *если система находится в равновесии, ее потенциальная энергия (т.е. энергия внешних и внутренних сил) имеет экстремальное значени*е.

Однако эти признаки не дают ответа на вопрос, является ли равновесие устойчивым или неустойчивым. На этот вопрос отвечает ***принцип Лагранжа-Дирихле***: *равновесие системы устойчиво, если ее полная потенциальная энергия имеет минимум по сравнению со всеми достаточно близкими положениями системы*.

Этот принцип в математической форме записывается так:

$$\delta U = 0\,, \qquad (4.2)$$

где U − полная потенциальная энергия системы. Смысл этой формулы – приращение (вариация) δ полной энергии U устойчивой системы должна равняться нулю.

Задачи и методы расчета на устойчивость

При достижении внешней нагрузки критического значения, точки системы зачастую получают значительные перемещения, форма сооружения меняется, и оно переходит в новое положение равновесия или разрушается. В таких случаях определять форму потери устойчивости сооружения (т.е. как это происходит) обычно не требуется. Поэтому ***основной задачей теории устойчивости*** является определение наименьшей критической нагрузки. В такой постановке определение форм потери устойчивости становится чисто академической задачей.

Если на систему одновременно действуют несколько внешних сил P_i *(i=1, ..., n)* (рис. 4.6 а), приходится определять критические значения всех этих сил, т.е. решать задачу со многими неизвестными (так называемую многопараметрическую задачу). Эту задачу можно упростить, если все силы P_i выразить через одну из них и тем самым привести задачу к однопараметрической. Например, если силу P_1 обозначить через P и ввести некоторые коэффициенты $\alpha_i = P_i / P$, получим

$$P_1=P;\ P_2=\alpha_2 P;\ \ldots\ P_i=\alpha_i P;\ \ldots\ P_n=\alpha_n P. \qquad (4.3)$$

Тогда вместо поиска критических значений нескольких сил достаточно искать только одну критическую силу P (рис. 4.6 б).

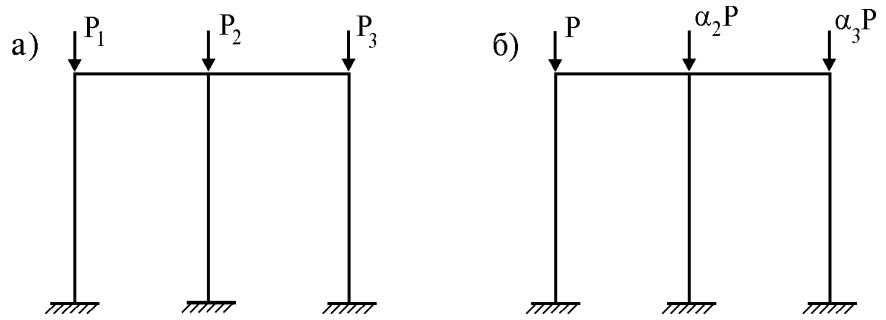


Рис. 4.6

Имеется целый ряд методов расчета на устойчивость. В отличие от расчета на прочность, они основаны на изучении деформированного состояния системы. В таких случаях говорят, что расчет ведется по деформированной схеме.

В общем случае все методы расчета на устойчивость делятся на три группы: статические, энергетические и динамические.

Статический метод

Статический метод основан на составлении уравнений статики, и по имени его автора часто называется методом Эйлера. В основе метода лежит ***критерий Эйлера*** (***статический критерий устойчивости***): критической силой является наименьшая сила, способная вызвать потерю устойчивости сооружения.

Критерий Эйлера имеет одну важную особенность. Дело в том, что смена форм равновесия − это некоторое движение системы, где должно присутствовать время. А в критерии Эйлера время отсутствует.

Для реализации статического метода надо рассматривать новое положение системы после разветвления (бифуркации) формы равновесия.

Расчет по статическому методу состоит из трех этапов:

– системе задаются малые перемещения;

– составляются уравнения равновесия внешних и внутренних сил;

– из этих уравнений определяется критическая нагрузка.

Для систем с конечным числом степеней свободы статический метод приводит к решению алгебраических уравнений, а для систем с бесконечным числом степеней свободы − к решению дифференциальных уравнений. После определения критической силы, при необходимости, из уравнений равновесия можно определить и формы потери устойчивости.

Имеются разные варианты реализации статического метода. Например, при расчете на устойчивость продольно-сжатого стержня можно решать дифференциальное уравнение продольного изгиба или использовать метод начальных параметров. При расчете сложных статически неопределимых систем можно использовать метод сил, метод перемещений, смешанный метод или приближенные методы.

Энергетический метод

Энергетический метод основан на исследовании полной потенциальной энергии системы, которая в положении устойчивого равновесия должна иметь минимальную величину.

Если полная потенциальная энергия зависит от нескольких параметров (перемещений y_i), то условие (4.2) распадается на несколько условий: $\frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$. Поэтому в системе с несколькими степенями свободы в безразличном состоянии должны выполняться условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} = 0$, в устойчивой системе − условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} < 0$, в неустойчивой − условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} > 0$.

Полная потенциальная энергия системы U определяется как сумма двух работ − работы внешних сил W и работы внутренних сил V:

$$U = W - V. \qquad (4.4)$$

Здесь работа внутренних сил V, направленная на восстановление равновесия системы, взята со знаком «–». С учетом этого, по формуле (4.2) (по принципу Лагранжа-Дирихле) получаем

$$\delta W = \delta U. \qquad (4.5)$$

Это выражение формулируется как ***энергетический критерий устойчивости***: *критической является сила, при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы внутренних сил.*

Расчет по энергическому методу, основанный на этом критерии, состоит из трех этапов:

– системе задаются малые перемещения;

– определяются приращения работ внешних и внутренних сил;

– из условия их равенства определяется критическая нагрузка.

Тогда критическая нагрузка определяется как нагрузка, при действии которой систему можно отклонить от положения равновесия, не увеличивая ее полную энергию.

Следует отметить, что при использовании энергетического метода необходимо задавать предполагаемую форму потери устойчивости системы, поэтому он, как правило, дает приближенное решение.

Энергетический метод позволяет решать задачи не решаемые статическим методом. Однако реализовать его бывает значительно сложнее.

Динамический метод

Динамический метод (метод малых колебаний) основан на задании системе некоторого отклонения и изучении ее колебаний. Даже тогда, когда действуют только статические нагрузки, внешние нагрузки в этом методе следует рассматривать как динамические.

Известно, что динамическая система может вести себя по-разному. В динамике сооружений мы установили, что если устойчивой системе дать малые отклонения и предоставить самой себе, то она будет совершать гармонические колебания с некоторой частотой (частотой собственных колебаний ω) и ограниченными амплитудами колебаний. Если же отклонить систему, находящуюся в безразличном состоянии, она останется в том же положении без колебаний. Поэтому у такой системы частота колебаний равна нулю, а амплитуда постоянна. Если же отклонить неустойчивую динамическую систему, она будет продолжать свое движение как апериодическая система. Как известно из динамики, при апериодическом движении системы $\omega^2<0$.

Итак, в устойчивой системе частота собственных колебаний $\omega>0$, в безразличной системе $\omega=0$, в неустойчивой системе $\omega^2<0$.

В результате такого анализа получен ***динамический критерий устойчивости***: *критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равна нулю*.

Расчет по динамическому методу также состоит из трех этапов:

– системе задаются малые перемещения;

– записывается уравнение движения системы;

– из условия равенства нулю частоты собственных колебаний

определяется критическая сила.

Динамический метод расчета на устойчивость считается наиболее общим и универсальным методом. Он позволяет решать даже те задачи, с которыми не могут справиться статический и энергетический методы.

Таким образом, рассмотренные методы принципиально отличаются друг от друга. Однако у них имеются и общие части: в них устанавливается зависимость деформаций, внутренних усилий и перемещений от неизвестной внешней нагрузки; рассматривается момент потери устойчивости − безразличное состояние системы; составляются уравнения, соответствующие реализуемому методу; из этих уравнений определяется неизвестная нагрузка; используя один из критериев устойчивости, устанавливается критическое значение искомой нагрузки.

В качестве примера рассмотрим решение одной простой задачи.

Пример . На рис. 4.7 а представлен стержень длиной *2l*, с одного конца опертый на жесткую, с другого конца на упругую опору жесткости *k*. Вдоль оси стержня действует продольная сжимающая сила *P*. Провести расчет стержня на устойчивость и определить $P_{кр}$ тремя методами, считая стержень не изгибаемым.

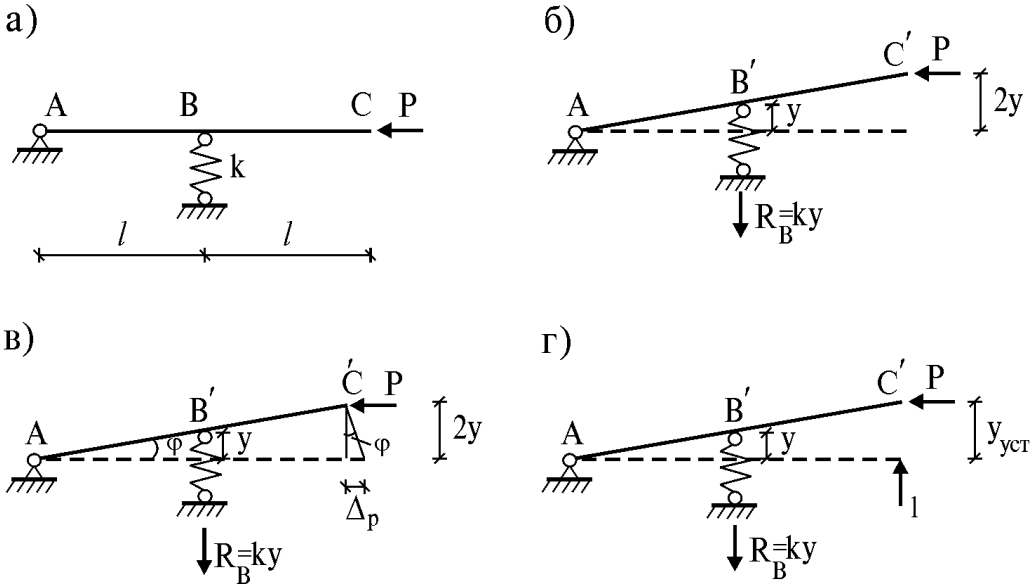


Рис. 4.7

Решение.

1. Использование статического метода (метода Эйлера)

Так как опора *A* неподвижная, а сам стержень не изгибается, то система может получать малые перемещения как показано на рис. 4.7. б. Тогда перемещения всех точек стержня можно выразить через одно перемещение − перемещение *y* опоры *B* (в частности, перемещение точки *C* будет *2y*).

Поэтому данная система является системой с одной степенью свободы, и для ее расчета достаточно составления только одного

уравнения равновесия между внешними и внутренними силами:

$$\Sigma M_A = P \cdot 2y - R_B\, l = 0.$$

В упругой опоре В от перемещения y возникает реакция $R_B = k\, y$. Подставив его в уравнение равновесия, получаем

$$\left(2P - kl\right) y = 0\,.$$

Это уравнение выполняется в двух случаях:

1) $y = 0$; это условие соответствует первоначальному устойчивому состоянию системы и не дает решения задачи;

2) $2P - kl = 0$; отсюда получаем $P = kl\,/\,2$. Этот случай соответствует моменту бифуркации (раздвоению) решения − перехода системы из безразличного состояния в новое положение равновесия. Действительно, при $P < kl\,/\,2$ система устойчива, а при $P > kl\,/\,2$ − неустойчива. Следовательно, по критерию Эйлера сила $P = kl\,/\,2$ является критической:

$$P_{кр} = kl/2\,.$$

2. Использование энергетического метода

При использовании статического метода малые по сравнению с y перемещения (малые второго порядка) не учитывались. В энергетическом методе их необходимо учитывать. Например, по рис. 4.7 в устанавливаем, что сила P получает малое перемещение в горизонтальном направлении

$$\Delta_P = 2y \cdot tg\varphi = 2y \cdot \frac{y}{l} = 2\frac{y^2}{l}\,.$$

За счет этого возникают приращения работ внешних и внутренних сил:

$$\delta W = P \cdot \Delta_P = 2P\frac{y^2}{l}, \qquad \delta V = R_B \cdot y = ky \cdot y = ky^2\,.$$

По принципу Лагранжа-Дирихле должно выполняться условие (4.5):

$$2P\frac{y^2}{l} = ky^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2P}{l} - k\right) y^2 = 0\,.$$

Последнее уравнение выполняется в двух случаях:

1) $y = 0$; оно соответствует начальному состоянию устойчивости;

2) $\frac{2P}{l} - k = 0$ или $P = \frac{kl}{2}$. Это и есть критическая сила, потому что если внешняя сила меньше нее, то $\delta U > 0$, если она равна ей, то $\delta U = 0$, если больше нее, то $\delta U < 0$. Таким образом, и по энергетическому критерию

$$P_{кр} = kl/2\,.$$

3. Использование динамического метода

Для расчета этой системы с одной степенью свободы динамическим методом воспользуемся формулой (2.15) из динамики сооружений

$$\omega^2 = \frac{g}{y_{ст}},$$

в которой перемещение $y_{ст}$ определим из единичного состояния (рис. 4.7 г). С этой целью составим уравнение момента относительно точки A:

$$\sum M_A = 1 \cdot 2l + P\, y_{ст} - ky \cdot l = 0.$$

Так как $y = \frac{y_{ст}}{2}$, отсюда получаем $(\frac{kl}{2} - P)\, y_{ст} = 2l$ или $y_{ст} = \frac{2l}{(\frac{kl}{2} - P)}$.

По динамическому критерию, в безразличном состоянии системы должно выполняться условие

$$\omega^2 = \frac{g}{y_{ст}} = \frac{(\frac{kl}{2} - P)g}{2l} = 0.$$

Оно выполняется только при $\frac{kl}{2} - P = 0$, т.е. при $P = \frac{kl}{2}$. Поэтому, и по динамическому критерию, $P_{кр} = kl/2$.

Действительно, если $P < kl/2$, то $\omega > 0$ и система устойчива; если $P_{кр} = kl/2$, то $\omega = 0$ и система находится в безразличном состоянии; если $P > kl/2$, то $\omega^2 < 0$ и система неустойчива.

Как видим, все три метода дали одинаковый результат. Из них статический метод оказался наиболее простым и быстро приводящим к решению. Но его можно применять только для решения простейших задач расчета на устойчивость. Энергетический метод можно использовать для решения более сложных задач. Однако, так как приходится учитывать малые величины второго порядка, он сложен для расчета. Динамический метод также сложен для расчета, поскольку для этого необходимо составлять и решать уравнение движения системы.

Расчет прямых стержней на устойчивость

Рассмотрим прямой стержень, сжимаемый вдоль оси продольной силой *P*. При возрастании этой силы стержень может изогнуться, т.е потерять устойчивость. Появление нового вида деформации − изгиба стержня − относится к потере устойчивости первого рода.

Расчет такого стержня на устойчивость будем вести статическим методом, используя ***метод начальных параметров***. Этот метод позволяет вести расчет различным образом закрепленных по концам стержней по единой методике.

Метод начальных параметров базируется на использовании значений следующих четырех начальных параметров в начале координат *O(0, 0)* принятой системы координат *xOy*:

$y(0) = y_0$ – начальное перемещение,

$y'(0) = y'_0$ – начальный поворот,

$M(0) = M_0$ – начальный изгибающий момент,

$Q(0) = Q_0$ – начальная поперечная сила,

которые позволяют определять напряженно-деформированное состояние стержня, т.е. величины его прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил $y(x), y'(x), M(x), Q(x)$ в произвольном сечении стержня x.

Эти начальные параметры зависят от условий закрепления стержня (граничных условий) по концам. Поэтому в начале расчета необходимо установить, как закреплен конкретный стержень. С этой целью рассматриваются статические и кинематические условия его закрепления.

Например, стержень на рис. 4.8 а шарнирно-оперт. Поэтому перемещения и моменты по его концам равны нулю. Тогда, с учетом системы координат, принятой на рисунке, можно написать

$x = 0$: $y(0) = 0,\ M(0) = 0$;

$x = l$: $y(l) = 0,\ M(l) = 0$.

Если у стержня защемлен левый конец, а правый свободен (рис. 4.8 б), имеем:

$x = 0$: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

$x = l$: $Q(l) = 0,\ M(l) = 0$.

Когда концы стержня закреплены по-другому, можно записать соответствующие этим закреплениям граничные условия.

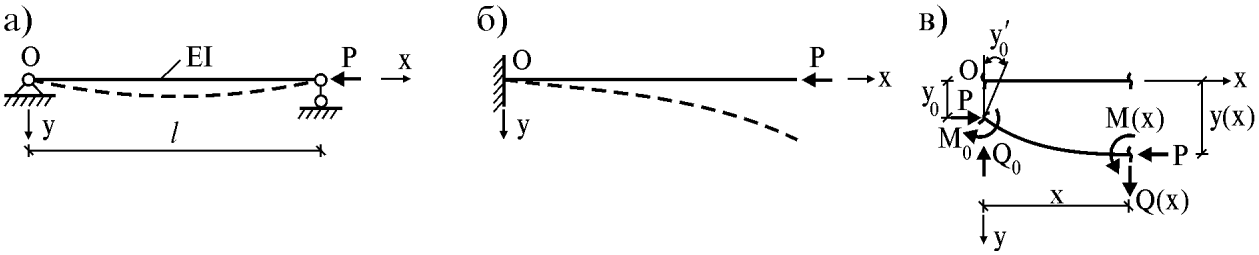


Рис. 4.8

С целью составления уравнений, пригодных для расчета любых прямых стержней с различными условиями закрепления на устойчивость, рассмотрим стержень длиной l и постоянной жесткости на изгиб EI, на которую действует продольная сжимающая сила P. Согласно статическому методу, дадим стержню малые отклонения, затем вырежем из него малый элемент длиной x (рис. 4.8 в) и рассмотрим его равновесие.

Начало координат выберем совпадающим с левым концом этого элемента. Пусть в начале координат (в точке $x=0$) известны начальные перемещения и усилия y_0, y'_0, M_0, Q_0, а в произвольном сечении x они будут $y(x), y'(x), M(x), Q(x)$.

Воспользуемся тем, что известное нам дифференциальное уравнение изгиба стержня (3.84) определяет условие равновесия между внутренними и внешними силами и выполняется для любого сечения:

$$EI\,y'' = -M(x)\,. \tag{4.6}$$

По рис. 4.8 в определим изгибающий момент в сечении x:

$$M(x) = M_0 + Q_0\,x + P(y - y_0) \tag{4.7}$$

и подставим в (4.6). Тогда это уравнение можно привести к виду

$$y'' = -\frac{M_0 + Q_0\,x + P(y - y_0)}{EI}\,. \tag{4.8}$$

Обозначим $\alpha^2 = \dfrac{P}{EI}$ и, извлекая из него корень, введем так называемый ***параметр устойчивости***

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,. \tag{4.9}$$

Тогда уравнение (4.8) приводится к виду

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{Py_0 - M_0 - Q_0 x}{EI}.$$

Это − дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений и может быть записано так:

$$y = y_{од} + y_н = A\sin\alpha\,x + B\cos\alpha\,x + y_0 - \frac{M_0 + Q_0 x}{\alpha^2 EI}\,. \tag{4.10}$$

Для определения A и B воспользуемся граничными условиями:

при $x=0$: $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'$.

Если в (4.10) подставить $x = 0$ и учесть первое из этих граничных условий, получаем выражение

$$y_0 = B + y_0 - \frac{M_0}{\alpha^2 EI}\,.$$

Из него определяется один из неизвестных коэффициентов:

$$B = \frac{M_0}{\alpha^2 EI}\,. \tag{4.11}$$

Для определения второго коэффициента продифференцируем (4.10):

$$y' = \alpha A\cos\alpha\,x - \alpha B\sin\alpha\,x - \frac{Q_0}{\alpha^2 EI}\,, \tag{4.12}$$

подставим в эту формулу $x = 0$ и учтем второе граничное условие. Тогда получаем

$$y_0' = \alpha A - \frac{Q_0}{\alpha^2 EI}\,.$$

Из него определяем

$$A = \frac{y_0'}{\alpha} + \frac{Q_0}{\alpha^3 EI}. \qquad (4.13)$$

Теперь, если подставить найденные коэффициенты A и B в (4.10) и (4.12), получим две формулы для определения линейных и угловых перемещений стержня в произвольном сечении x:

$$y(x) = y_0 + \frac{sin\alpha\, x}{\alpha} y_0' + \frac{cos\alpha\, x - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{sin\alpha\, x - \alpha\, x}{\alpha^3 EI} Q_0; \qquad (4.14)$$

$$y'(x) = cos\alpha\, x \cdot y_0' - \frac{sin\alpha\, x}{\alpha\, EI} M_0 + \frac{cos\alpha\, x - 1}{\alpha^2 EI} Q_0. \qquad (4.15)$$

Определим изгибающий момент. Для этого найдем производную из (4.15) и определим $y''(x)$, затем подставим его в формулу $M = -y''(x) EI$, полученную из (4.6). В итоге имеем

$$M(x) = EI\alpha\, sin\alpha\, x \cdot y_0' + cos\alpha\, x\, M_0 + \frac{sin\alpha\, x}{\alpha} Q_0. \qquad (4.16)$$

Поперечную силу определим по формуле Журавского $Q = d\,M / dx$. В итоге получаем

$$Q(x) = EI\alpha^2 cos\alpha\, x \cdot y_0' - \alpha\, sin\alpha\, x \cdot M_0 + cos\alpha\, x \cdot Q_0. \qquad (4.17)$$

Таким образом, получили четыре формулы (4.14)-(4.17), которые называются ***уравнениями метода начальных параметров***. Они позволяют определять напряженно-деформируемое состояние (перемещения и усилия) сжатого продольной силой стержня через четыре начальных параметра y_0, y_0', M_0, Q_0. Их можно применять для расчета на устойчивость стержней, различным образом закрепленных по концам.

Покажем это на примере.

Пример . Найти критическую силу $P_{кр}$ для шарнирно-опертого стержня длиной l и жесткости на изгиб EI, представленного на рис. 4.8 а.

Решение. Для этого введем систему координат, указанную на рисунке, и воспользуемся установленными граничными условиями:

$$x = 0:\ y_0 = 0,\ M_0 = 0;$$
$$x = l:\ y(l) = 0,\ M(l) = 0.$$

Итак, два начальных параметра y_0 и M_0 определились сразу. Чтобы найти еще два начальных параметра, в формулы (4.14) и (4.16) подставим $x = l$ и учтем последние два граничных условия. Тогда получим два уравнения:

$$y(l) = \frac{sin\alpha\, l}{\alpha} y_0' + \frac{sin\alpha\, l - \alpha\, l}{\alpha^3 EI} Q_0 = 0,$$

$$M(l) = EI\alpha\, sin\alpha\, l\, y_0' + \frac{sin\alpha\, l}{\alpha} Q_0 = 0.$$

Если их рассмотреть вместе, получим систему однородных уравнений относительно неизвестных y_0' и Q_0. Такая система имеет два типа решения:

1) $y_0' = Q_0 = 0$. Это простейшее (тривиальное) решение не может быть решением задачи, потому что в этом случае $y(x) \equiv 0$. Этот случай соответствует лишь моменту бифуркации положения устойчивости.

2) бесконечно большое число решений. Для этого определитель из коэффициентов системы уравнений, должен равняться нулю:

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\alpha l}{\alpha} & \dfrac{\sin\alpha l - \alpha l}{\alpha^3 EI} \\ EI\alpha \sin\alpha l & \dfrac{\sin\alpha l}{\alpha} \end{bmatrix} = 0 .$$

В дальнейшем уравнение, полученное из такого условия, будем называть ***уравнением устойчивости*** и записывать в виде

$$D = 0 . \qquad (4.18)$$

После раскрытия определителя получим

$$D = \sin\alpha l = 0 .$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\alpha l = k\pi, \;\; k = 1,2,3, \ldots \qquad (4.19)$$

Таким образом, уравнение устойчивости имеет бесчисленное число решений. Которое же из них выбрать? Для этого обратим внимание на параметр устойчивости (4.9), из которого следует

$$P = \alpha^2 EI . \qquad (4.20)$$

Из статического критерия устойчивости (критерия Эйлера) следует, что критической должна быть минимальная сила, способная привести систему к потере устойчивости. Поэтому, чтобы сила P была минимальной, параметр устойчивости α должен принимать минимальное значение $\alpha_{кр}$. Из формулы (4.19) видно, что это возможно при $k = 1$. Тогда из (4.19) имеем

$$\alpha_{кр} = \frac{\pi}{l} .$$

Если подставить это решение в (4.20), получаем величину искомой критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} EI . \qquad (4.21)$$

Исходя из решенного примера установим следующий ***алгоритм метода начальных параметров***:

1. Ввести систему координат и записать граничные условия для точек

$x = 0$ и $x = l$.

2. Используя две из формул (4.14)-(4.17), записать граничные условия для точки $x = l$. Полученные уравнения будут однородными.

3. Объединить уравнения и составить уравнение устойчивости.

4. Раскрыть определитель, записать уравнение устойчивости в обычной форме.

5. Решить это уравнение и определить $\alpha_{кр}$.

6. Определить $P_{кр}$.

Этот алгоритм можно использовать для расчета различных прямых стержней на устойчивость при разных вариантах закрепления концов. Их расчеты рассматривать не будем, приведем только некоторые результаты.

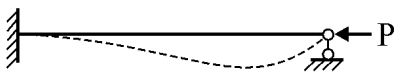
Например, на рис. 4.9 показаны четыре стержня жесткости EI и длиной l, сжатых продольной силой P с различными закреплениями по концам, и приведены их примерные формы потери устойчивости. Рядом приводятся граничные условия и значения критических сил.

а)

$$y_0 = 0,\ y_0' = 0;$$
$$M(l) = 0,\ Q(l) = 0.$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2};$$

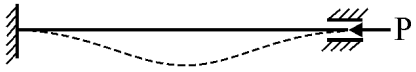
б)



$$y_0 = 0,\ y_0' = 0;$$
$$M(l) = 0,\ y(l) = 0.$$

$$P_{кр} = 2\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2};$$

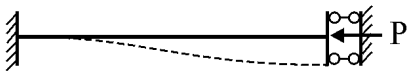
в)



$$y_0 = 0,\ y_0' = 0;$$
$$M(l) = 0,\ y'(l) = 0.$$

$$P_{кр} = 4\pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2};$$

г)



$$y_0 = 0,\ y_0' = 0;$$
$$y'(l) = 0,\ Q(l) = 0.$$

$$P_{кр} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

Рис. 4.9

Эти результаты показывают, что стержень со свободным концом (случай «а») воспринимает наименьшую нагрузку, и поэтому является самым неустойчивым. Поэтому в сооружении нецелесообразно использование консольных элементов. Если у стержня защемлены оба конца (случай «в»), он воспринимает наибольшую (в четыре раза большую чем шарнирно-опертая балка) нагрузку. Поэтому для устойчивости сооружения швы по концам колонн, применяемых при строительстве, необходимо заливать бетоном (строительным раствором).

Критическая сила, определенная для шарнирно-опертой балки по формуле (4.21) обычно рассматривается как основной случай расчета

таких стержней. Тогда критические силы для всех остальных случаев можно выразить через (4.21) по следующей формуле, введенной Эйлером:

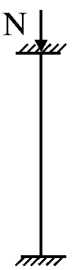
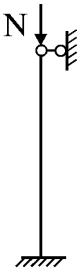
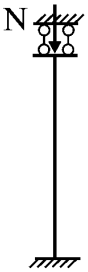
$$P_{кр} = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{EI}{l^2}. \qquad (4.22)$$

Величина μ, введенная здесь, носит название ***коэффициента приведения*** (или ***свободной***) ***длины*** и используется для приведения длины любой балки к основному случаю (т.е. к шарнирно-опертой балке).

Ниже в табл. 4.1 даны некоторые варианты закрепления концов стержней и соответствующие коэффициенты приведения их длин.

Таблица 4.1

Коэффициенты приведения длины сжато-изогнутых стержней

					
μ=1	μ=2	μ=0,5	μ=0,7	μ=1	μ=2

Для общности, в этой таблице буквой N обозначена сжимающая сила P, действующая на отдельный стержень и соответствующая ей продольная сжимающая сила, возникающая в некотором стержне стержневой системы под действием внешней нагрузки.

Расчет на устойчивость методом перемещений

Основные положения

Расчетные схемы большинства сооружений, в частности многопролетных и многоэтажных рам, являются статически неопределимыми. Для их расчета обычно используются методы сил и перемещений. Так как расчет рам на устойчивость методом сил вызывает значительные трудности, здесь рассмотрим лишь использование метода перемещений.

Как известно, основной задачей расчета рам является определение их напряженно-деформированного состояния и дальнейшая проверка условий прочности и жесткости. Но в некоторых случаях ограничиться только этим нельзя, поскольку в рамах могут возникать большие сжимающие усилия, приводящие к потере устойчивости сжатых элементов или всей рамы. Поэтому расчет рам на устойчивость является важной задачей.

К примеру, расчет рамы, изображенной на рис. 4.10 а, на внешнюю нагрузку показывает, что в ее стержнях возникают сжимающие усилия

(рис. 4.11 б). Если эти усилия будут большими, то могут привести к потере устойчивости как самих стержней, так и всей рамы. Поэтому становится очевидным необходимость проверки такой рамы на устойчивость. В некоторых случаях могут возникать задачи расчета на устойчивость при узловом воздействии нагрузки (рис. 4.10 г).

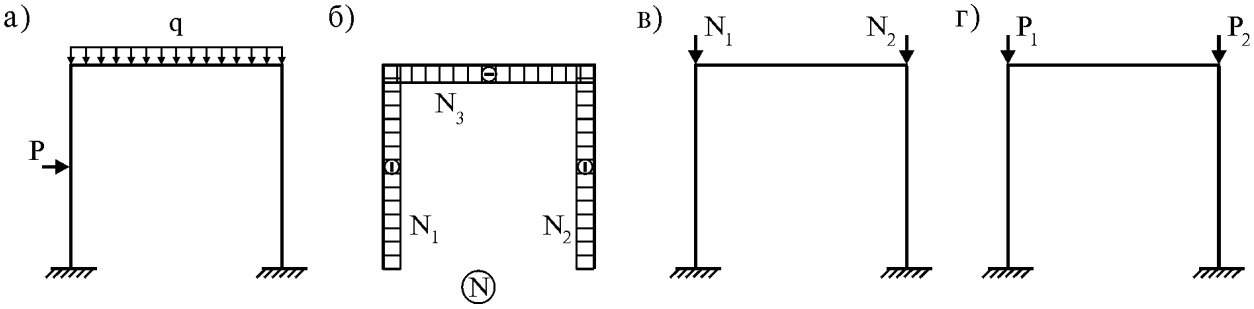


Рис. 4.10

Следует отметить, что задача расчета на устойчивость в указанной постановке ставится не совсем корректно, так как учитывает только потерю устойчивости первого рода. В действительности, в некоторых сечениях рамы материал может достигнуть предела текучести, и потому там может произойти потеря устойчивости второго рода. Но тем не менее, здесь мы будем рассматривать только упругую область работы материала и не будем касаться потери устойчивости второго рода.

Допустим, надо рассчитать раму на рис. 4.10 г. Если внешние силы будут меньше их критических значений, т.е. $P_1 < P_{1\,кр}$ и $P_2 < P_{2\,кр}$, рама устойчивость не потеряет. В этом случае возникают только продольные усилия, а изгибающие моменты и поперечные силы будут отсутствовать. Если же эти силы достигнут критических значений, т.е. $P_1 = P_{1\,кр}$ и $P_2 = P_{2\,кр}$, рама окажется в безразличном состоянии, когда выполняются условия равновесия. Однако, даже при задании небольших отклонений появятся моменты и поперечные силы, которые будут оказывать влияние на устойчивость рамы. Если же силы превысят их критических значений, т.е. $P_1 > P_{1\,кр}$ и $P_2 > P_{2\,кр}$, то рама однозначно потеряет устойчивость.

Для расчета статически неопределимых систем методом перемещений принимаются следующие гипотезы:

– силы прилагаются только в узлах;

– сжимающие силы действуют только по осям стержней;

– при потере устойчивости деформации остаются в упругой области;

– из-за малости деформаций расстояния между узлами не меняются.

Основываясь на этих гипотезах, расчет рам на устойчивость ведется по единой методике. При этом обычный алгоритм расчета на постоянную нагрузку методом перемещений существенно меняется. Этот алгоритм рассмотрим позже при решении конкретных задач.

Единичные состояния элементов основной системы

При рассмотрении различных единичных состояний элементов основной системы метода перемещений необходимо определять реакции и внутренние усилия в стержнях, подверженных воздействию осевых сжимающих сил. Эти задачи будем решать методом начальных параметров.

Пусть требуется определить опорные реакции и внутренние усилия защемленного с обоих концов стержня, один конец которого получает поворот на единичный угол (рис. 4.11).

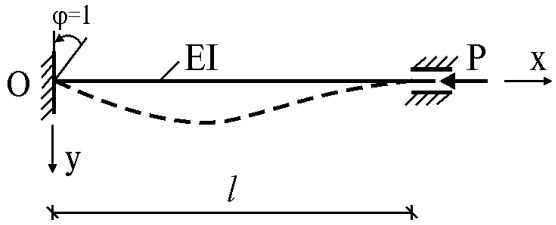


Рис. 4.11

В выбранной системе координат *xOy* определим граничные условия закрепления балки:

$$x = 0:\ \ y(0) = y_0 = 0,\ \ y'(0) = y'_0 = \varphi = 1;$$

$$x = l:\ \ y(l) = 0,\ \ y'(l) = 0.$$

Два начальных параметра определились сразу. Для определения еще двух параметров выберем соответствующие двум последним граничным условиям уравнения метода начальных параметров (4.14) и (4.15):

$$y(x) = y_0 + \frac{sin\alpha\, x}{\alpha} y'_0 + \frac{cos\alpha\, x - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{sin\alpha\, x - \alpha\, x}{\alpha^3 EI} Q_0;$$

$$y'(x) = cos\alpha\, x \cdot y'_0 - \frac{sin\alpha\, x}{\alpha EI} M_0 + \frac{cos\alpha\, x - 1}{\alpha^2 EI} Q_0.$$

Если в них подставить известные $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, при $x = l$ получим

$$y(l) = \frac{sin\alpha l}{\alpha} \cdot 1 + \frac{cos\alpha l - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{sin\alpha l - \alpha l}{\alpha^3 EI} Q_0 = 0;$$

$$y'(l) = cos\alpha l \cdot 1 - \frac{sin\alpha l}{\alpha EI} M_0 + \frac{cos\alpha l - 1}{\alpha^2 EI} Q_0 = 0.$$

Введем обозначение $v = \alpha l$. Тогда, с учетом (4.9), имеем

$$v = \alpha l = l\sqrt{\frac{N}{EI}}. \qquad (4.23)$$

В дальнейшем эту величину будем называть ***параметром устойчивости***. Попутно отметим, что между параметром устойчивости *v* и коэффициентом приведения длины μ существует простая зависимость

$$v = \frac{\pi}{\mu}. \qquad (4.24)$$

Тогда предыдущие два уравнения запишутся как система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\cos v - 1}{\alpha} M_0 + \dfrac{\sin v - v}{\alpha^2} Q_0 = -EI \sin v, \\ -\dfrac{\sin v}{\alpha} M_0 + \dfrac{\cos v - 1}{\alpha^2} Q_0 = -EI \cos v, \end{cases}$$

из решения которой определяются неизвестные параметры:

$$M_0 = \frac{EI}{2l} \cdot \frac{v(tgv - v)}{tgv(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})} = 4\frac{EI}{l} \cdot \frac{v(tgv - v)}{8tgv\,(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})} = 4\frac{EI}{l} \cdot \varphi_1(v),$$

$$Q_0 = \frac{EI}{2l^2} \cdot \frac{v^2 tg\frac{v}{2}}{tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2}} = 6\frac{EI}{l^2} \cdot \frac{v^2 tg\frac{v}{2}}{12(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})} = 6\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3(v).$$

Таким образом, определились момент и поперечная сила на левом конце стержня, в выражениях которых для упрощения записи использованы функции $\varphi_1(v), \varphi_3(v)$. Следует обратить внимание на то, что перед этими функциями стоят коэффициенты, которые определяются в статике сооружений без учета влияния сжимающей силы. Поэтому можно считать, что функции $\varphi_1(v), \varphi_3(v)$ учитывают особенность рассматриваемой задачи − влияние сжимающих сил на устойчивость стержня.

Теперь можно определить величину момента и на другом конце стержня. Для этого надо подставить в формулу (4.16) *x=l*, а затем найденные значения M_0, Q_0. Тогда получим

$$M(l) = EI\alpha \sin\alpha l \cdot 1 + \cos\alpha l \cdot 4\frac{EI}{l} \cdot \varphi_1(v) + \frac{\sin\alpha l}{\alpha} \cdot 6\frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3(v) =$$

$$= 2\frac{EI}{l} \cdot \frac{v(v - \sin v)}{4\sin v(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})} = 2\frac{EI}{l} \cdot \varphi_2(v)\ .$$

Таким же образом рассматриваются различные единичные состояния стержней с другими закреплениями по концам.

В табл. 4.2 даются результаты их расчета. В отличие от обычной таблицы метода перемещений, получаемой в статике сооружений, эту таблицу называют специальной таблицей метода перемещений. В ней используются шесть функций, две из которых были определены выше:

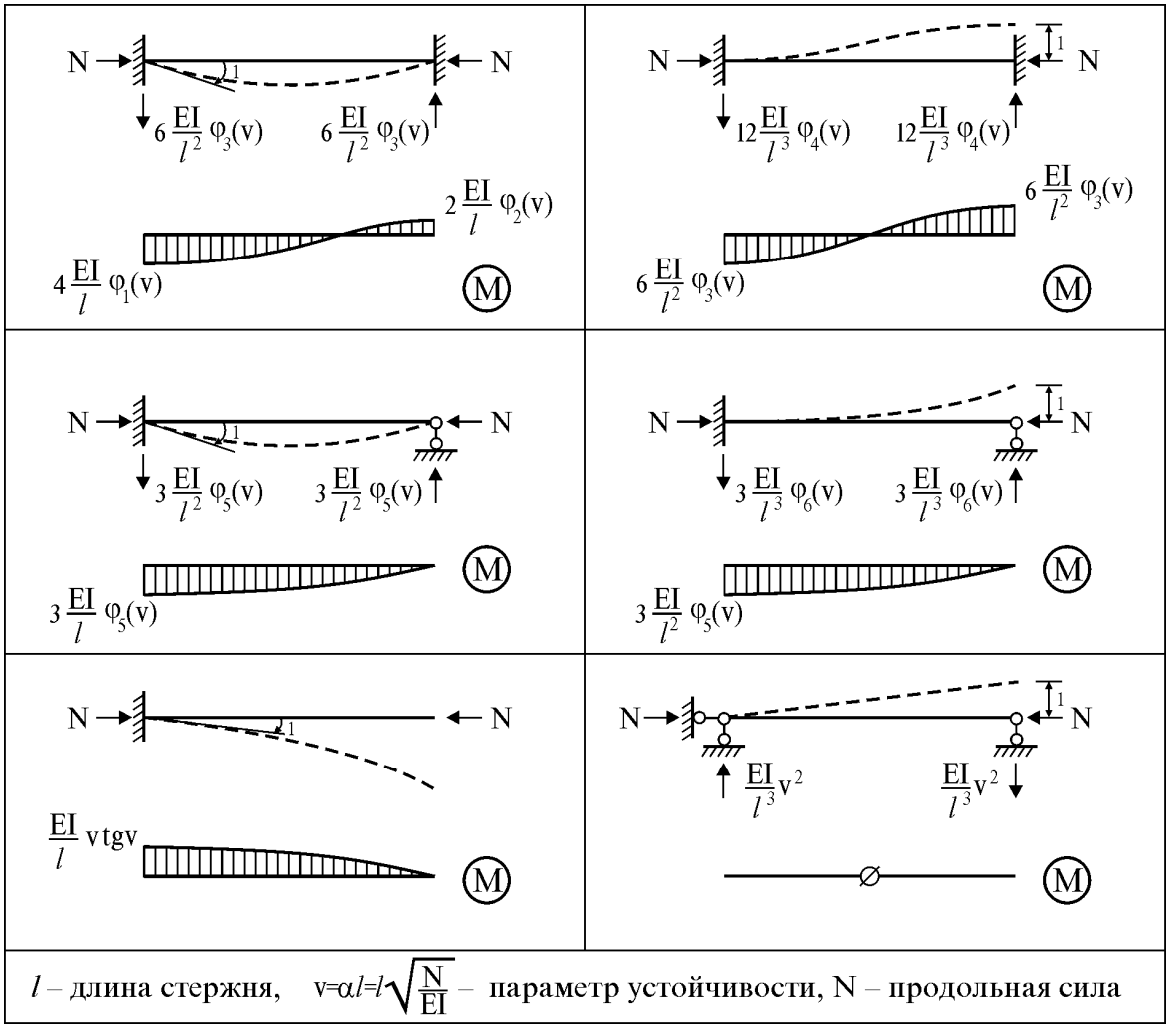
$$\varphi_1(v) = \frac{v(tgv - v)}{8tgv\,(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})};\ \varphi_2(v) = \frac{v\,(v - \sin v)}{4\sin v\,(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})};\ \varphi_3(v) = \frac{v^2 tg\frac{v}{2}}{12(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})};$$

$$\varphi_4(v) = \frac{v^3}{24(tg\frac{v}{2} - \frac{v}{2})};\qquad \varphi_5(v) = \frac{v^2 tgv}{3(tgv - v)};\qquad \varphi_6(v) = \frac{v^3}{3(tgv - v)}.$$

Таблица 4.2

Реакции сжато-изогнутых стержней от единичных перемещений

(специальная таблица метода перемещений)



l – длина стержня, $v=\alpha l=l\sqrt{\frac{N}{EI}}$ – параметр устойчивости, N – продольная сила

Как видим, получаются достаточно сложные функции. Для упрощения расчетов эти функции подсчитываются отдельно (см. табл. 4.3).

Таблица 4.3

Значения специальных функций

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\varphi_5(v)$	$\varphi_6(v)$
0,0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,9997	1,0002	0,9998	0,9990	0,9993	0,9960
0,2	0,9987	1,0007	0,9993	0,9960	0,9973	0,9840
0,3	0,9970	1,0015	0,9985	0,9910	0,9940	0,9640
0,4	0,9947	1,0027	0,9973	0,9840	0,9893	0,9360
0,5	0,9916	1,0042	0,9958	0,9750	0,9832	0,8999
0,6	0,9879	1,0061	0,9940	0,9640	0,9757	0,8557
0,7	0,9836	1,0083	0,9918	0,9510	0,9669	0,8035
0,8	0,9785	1,0109	0,9893	0,9360	0,9565	0,7432
0,9	0,9727	1,0138	0,9864	0,9189	0,9447	0,6747
1,0	0,9662	1,0172	0,9832	0,8999	0,9313	0,5980
1,1	0,9590	1,0209	0,9797	0,8788	0,9164	0,5131
1,2	0,9511	1,0251	0,9757	0,8557	0,8998	0,4198

(Продолжение таблицы 4.3)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\varphi_5(v)$	$\varphi_6(v)$
1,3	0,9424	1,0297	0,9715	0,8307	0,8814	0,3181
1,4	0,9329	1,0348	0,9669	0,8035	0,8613	0,2080
1,5	0,9227	1,0403	0,9619	0,7744	0,8393	0,0893
π/2≈1,57	0,9149	1,0445	0,9581	0,7525	0,8225	0
1,6	0,9116	1,0463	0,9565	0,7432	0,8152	–0,0381
1,7	0,8998	1,0529	0,9508	0,7100	0,7891	–0,1743
1,8	0,8871	1,0600	0,9447	0,6747	0,7606	–0,3194
1,9	0,8735	1,0676	0,9382	0,6374	0,7297	–0,4736
2,0	0,8590	1,0760	0,9313	0,5980	0,6961	–0,6372
2,1	0,8436	1,0849	0,9241	0,5566	0,6597	–0,8103
2,2	0,8273	1,0946	0,9164	0,5131	0,6202	–0,9931
2,3	0,8099	1,1051	0,9083	0,4675	0,5772	–1,1861
2,4	0,7915	1,1164	0,8998	0,4198	0,5304	–1,3896
2,5	0,7720	1,1286	0,8908	0,3700	0,4793	–1,6040
2,6	0,7513	1,1417	0,8814	0,3181	0,4234	–1,8299
2,7	0,7295	1,1559	0,8716	0,2641	0,3621	–2,0679
2,8	0,7064	1,1712	0,8613	0,2080	0,2944	–2,3189
2,9	0,6819	1,1878	0,8505	0,1497	0,2195	–2,5838
3,0	0,6560	1,2057	0,8393	0,0893	0,1361	–2,8639
3,1	0,6287	1,2251	0,8275	0,0267	0,0424	–3,1609
π ≈3,14	0,6168	1,2337	0,8225	0	0	–3,2899
3,2	0,5997	1,2462	0,8152	–0,0381	–0,0635	–3,4769
3,3	0,5691	1,2691	0,8024	–0,1051	–0,1847	–3,8147
3,4	0,5366	1,2940	0,7891	–0,1743	–0,3248	–4,1781
3,5	0,5021	1,3212	0,7751	–0,2457	–0,4894	–4,5727
3,6	0,4655	1,3509	0,7606	–0,3194	–0,6862	–5,0062
3,7	0,4265	1,3834	0,7455	–0,3954	–0,9270	–5,4904
3,8	0,3850	1,4191	0,7297	–0,4736	–1,2303	–6,0436
3,9	0,3407	1,4584	0,7133	–0,5542	–1,6269	–6,6969
4,0	0,2933	1,5019	0,6961	–0,6372	–2,1726	–7,5060
4,1	0,2424	1,5501	0,6783	–0,7225	–2,9802	–8,5836
4,2	0,1878	1,6037	0,6597	–0,8103	–4,3156	–10,196
4,3	0,1287	1,6636	0,6404	–0,9005	–6,9947	–13,158
4,4	0,0648	1,7310	0,6202	–0,9931	–15,327	–21,780
4,4934	0,0000	1,8017	0,6006	–1,0820	–∞/+∞	–∞/+∞
4,5	–0,0048	1,8070	0,5991	–1,0884	227,93	221,18
4,6	–0,0809	1,8933	0,5772	–1,1861	14,669	7,6160
4,7	–0,1645	1,9920	0,5543	–1,2865	7,8186	0,4553
3 π /2≈4,71	–0,1755	2,0051	0,5514	–1,2991	7,4038	0
4,8	–0,2572	2,1056	0,5304	–1,3896	5,4023	–2,2777
4,9	–0,3607	2,2375	0,5054	–1,4954	4,1463	–3,8570
5,0	–0,4772	2,3923	0,4793	–1,6040	3,3615	–4,9719
5,1	–0,6099	2,5757	0,4520	–1,7155	2,8130	–5,8570
5,2	–0,7629	2,7960	0,4234	–1,8299	2,3986	–6,6147
5,3	–0,9422	3,0648	0,3935	–1,9474	2,0668	–7,2965
5,4	–1,1563	3,3989	0,3621	–2,0679	1,7884	–7,9316
5,5	–1,4182	3,8236	0,3291	–2,1917	1,5455	–8,5379
5,6	–1,7481	4,3794	0,2944	–2,3189	1,3266	–9,1268
5,7	–2,1803	5,1346	0,2580	–2,4495	1,1235	–9,7065
5,8	–2,7777	6,2139	0,2195	–2,5838	0,9302	–10,283
5,9	–3,6679	7,8727	0,1790	–2,7219	0,7421	–10,861
6,0	–5,1594	10,727	0,1361	–2,8639	0,5551	–11,444
6,1	–8,2336	16,739	0,0907	–3,0102	0,3656	–12,037
6,2	–18,590	37,308	0,0424	–3,1609	0,1700	–12,643
2π≈6.28	–∞	+∞	0	–3,2899	0	–13,159

Примеры решения задач

Для пояснения алгоритма и порядка расчета рам на устойчивость рассмотрим два примера.

Пример. На одноэтажную раму действует сосредоточенная сила P, направленная вдоль оси одной из стоек (рис. 4.12 а). Определить критическую величину этой силы $P_{кр}$.

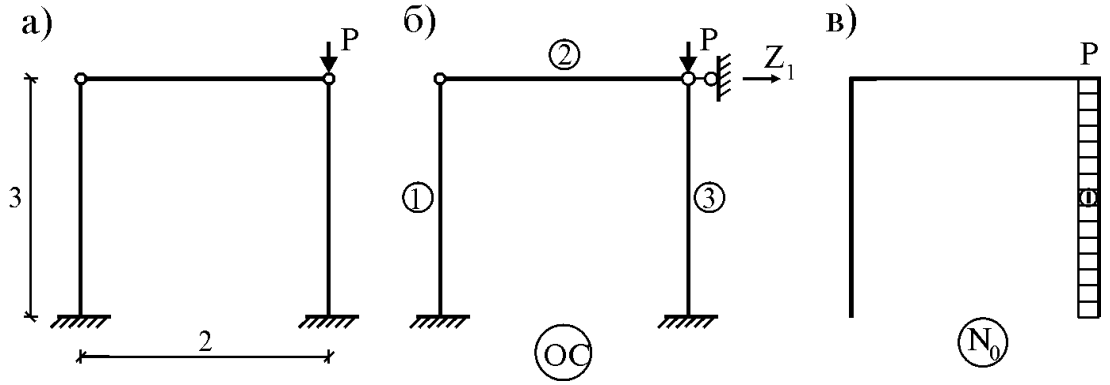


Рис. 4.12

Решение.

1. Определяем число неизвестных по методу перемещений:

$$n = n_y + n_л = 0 + 1 = 1.$$

2. Выбираем основную систему (рис. 4.12 б).
3. Строим эпюру продольных сил N_0 в основной системе (рис. 4.12 в).
4. Определяем параметры устойчивости стержней:

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = 3\sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

5. Каноническое уравнение будет

$$r_{11}Z_1 = 0$$

(так как внешняя нагрузка до момента потери устойчивости не вызывает изгиба элементов, то $R_{1P} = 0$).

6. Рассмотрим единичное состояние основной системы (рис. 4.13 а).
7. В единичном состоянии строим эпюру изгибающих моментов.

При этом надо помнить следующее: в стержне 3 в основной системе имеется сжимающее усилие (рис. 4.12 в), поэтому при построении эпюры изгибающих моментов в этом стержне надо пользоваться специальной таблицей метода перемещений (табл. 4.2), а в стержнях 1 и 2 сжимающие силы отсутствуют, поэтому при построении эпюр моментов в этих стержнях надо использовать обычную таблицу метода перемещений. Тогда эпюра моментов для стержня 3 будет криволинейной, а для стержня 1 будет прямолинейной (рис. 4.13 б). Следует отметить, что при решении данной задачи построение этой эпюры не обязательно.

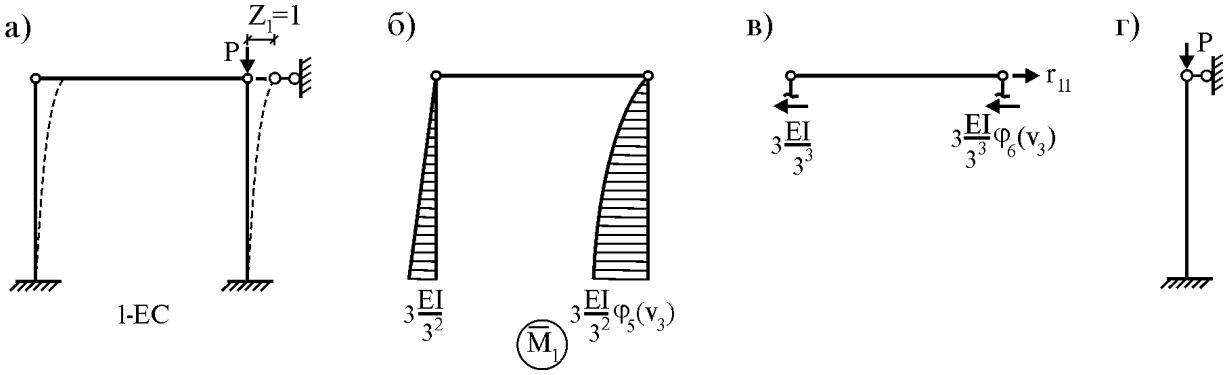


Рис. 4.13

8. По рис. 4.13 в определяем коэффициент канонического уравнения:

$$r_{11} = \frac{EI}{3^3} + \frac{EI}{3^3}\varphi_5(v_3).$$

9. Каноническое уравнение $r_{11}Z_1 = 0$ имеет два решения:

$$1)\ r_{11} = 0, \qquad 2)\ Z_1 = 0.$$

Согласно основной системе (рис. 4.12 б), второе решение соответствует закреплению верхнего конца 3-го стержня в горизонтальном направлении. Поэтому этот стержень, подвергнутый воздействию сжимающей силы *P*, можно рассматривать отдельно (рис. 4.13 г).

Такие задачи решены теоретически, результаты их расчета приведены в табл. 4.1. Нашему случаю соответствует 4-ая схема этой таблицы, из которой определяем коэффициент приведения длины стержня $\mu=0,7$. Тогда

$$v_3 = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,7} = 4,49.$$

Если рассматривать первое решение, то

$$r_{11} = \frac{EI}{3^3} + \frac{EI}{3^3}\varphi_5(v_3) = 0.$$

Из него получаем уравнение $1 + \varphi_5(v_3) = 0$ или $\varphi_5(v_3) = -1$.

Тогда, используя табл. 4.3, определяем корень уравнения $v_3 = 2,2$.

Итак, получили два решения: 1) $v_3 = 4,49$, 2) $v_3 = 2,2$. По критерию Эйлера, критической является наименьшая из них. Поэтому $v_{\text{кр}} = 2,2$.

10. Определяем величину критической силы и коэффициент приведения длины стержня. Принимая

$$v_3 = v_{кр} = 3\sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EI}},$$

получаем

$$P_{кр} = \frac{v_{кр}^2}{3^2} EI = \frac{2,2^2}{3^2} EI = 0,54\,EI, \qquad \mu = \frac{\pi}{v_{кр}} = \frac{3,14}{2,2} = 1,43.$$

Из данного примера видно, что уравнение $Z_1 = 0$ дает завышенное значение параметра устойчивости стержня (а значит и критической силы). При решении и других задач получаются аналогичные результаты. Поэтому решения типа $Z_i = 0$ $(i = 1,2,...)$ обычно не рассматриваются.

Пример Провести расчет рамы, представленной на рис. 4.14 а, на устойчивость.

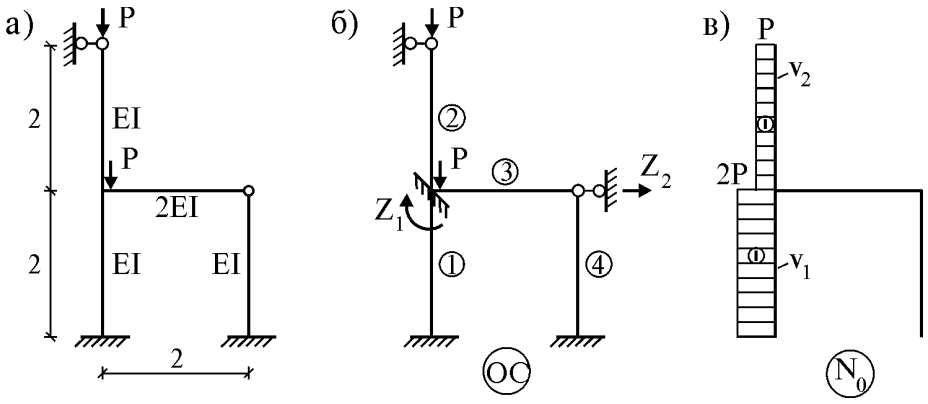


Рис. 4.14

Решение.

1. Определяем число неизвестных:

$$n = n_y + n_л = 1 + 1 = 2.$$

2. Выбираем основную систему (ОС). Она получается введением двух условных связей − заделки и опоры (рис. 4.14 б).

3. Строим эпюру продольных сил N_0 в основной системе (рис. 4.14 в). В ней имеются два стержня, где возникают сжимающие усилия.

4. Параметры устойчивости стержней рамы будут:

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{2P}{EI}}, \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_3 = v_4 = 0.$$

Наибольший из них соответствует 1-му стержню. Примем его за основной параметр устойчивости и обозначим

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{2P}{EI}} = v.$$

Тогда

$$\frac{v_2}{v} = 2\sqrt{\frac{P}{EI}} : 2\sqrt{\frac{2P}{EI}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7.$$

Значит, $v_2 = 0{,}7v$.

5. Запишем систему канонических уравнений метода перемещений, в которых $R_{1P} = R_{2P} = 0$:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0. \end{cases}$$

Такая однородная система уравнений имеет два решения:

$$1)\ D = \det\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = 0, \qquad 2)\ Z_1 = Z_2 = 0.$$

Второе решение, как дающее завышенное значение критического корня, рассматривать не будем. А первое решение с учетом $r_{12} = r_{21}$ и после раскрытия определителя принимает вид

$$D(v) = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Это и есть уравнение устойчивости.

6. Рассмотрим два единичных состояния основной системы, в которых обозначены деформации элементов и реактивные усилия (рис. 4.15 а, б):

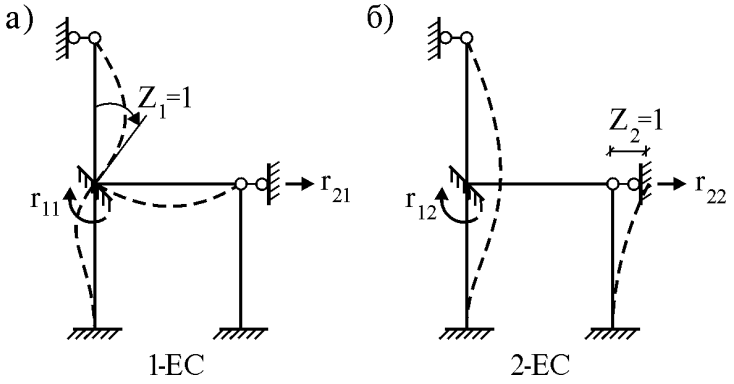


Рис. 4.15

7. Используя таблицы метода перемещений, в обоих состояниях строим эпюры изгибающих моментов (рис. 4.16 а, б).

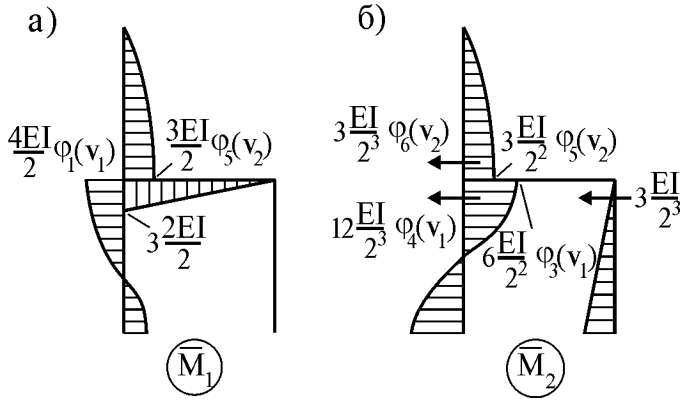


Рис. 4.16

При этом при построении эпюр в стержнях 1 и 2 (в них учитывается сжатие) основной системы используем специальную таблицу метода перемещений (табл. 4.2), а при построении эпюр в стержнях 3 и 4 (где сжимающие силы отсутствуют) используем обычную таблицу метода перемещений. Поэтому эпюры моментов для стержней 1 и 2 будут криволинейными, а для стержней 3 и 4 − прямолинейными.

8. Коэффициенты системы канонических уравнений определяем согласно единичным состояниям (рис. 4.15) и по рис. 4.16:

$$r_{11} = 4\frac{EI}{2}\varphi_1(v_1) + 3\frac{EI}{2}\varphi_5(v_2) + 3\frac{2EI}{2} = EI\left[2\,\varphi_1(v_1) + 1{,}5\,\varphi_5(v_2) + 3\right];$$

$$r_{12} = -6\frac{EI}{2^2}\varphi_3(v_1) + 3\frac{EI}{2^2}\varphi_5(v_2) = EI\left[-1{,}5\,\varphi_3(v_1) + 0{,}75\,\varphi_5(v_2)\right];$$

$$r_{22} = 12\frac{EI}{2^3}\varphi_4(v_1) + 3\frac{EI}{2^3}\varphi_6(v_2) + 3\frac{EI}{2^3} = EI\left[1{,}5\;\varphi_4(v_1) + 0{,}375\;\varphi_6(v_2) + 0{,}375\right].$$

9. Решаем уравнение устойчивости. Для этого подставим найденные коэффициенты в уравнение устойчивости и сократим его на *EI*. Получим трансцендентное уравнение (уравнение с бесконечным числом корней). С целью определения наименьшего положительного корня этого уравнения вначале определим интервал, в котором этот корень находится. Для этого проведем следующие рассуждения:

1) уравнение устойчивости зависит от параметра устойчивости 1-го стержня рамы $v_1 = v$, поэтому исследуем поведение этого стержня;

2) в состоянии “малой жесткости” рамы, когда изгибные жесткости всех стержней (кроме 1-го) равны нулю (рис. 4.17 а), стержень 1 можно рассматривать отдельно как показано на рис. 4.17 б. В этом случае по табл. 4.1 имеем $\mu = 2$. Тогда $v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57$;

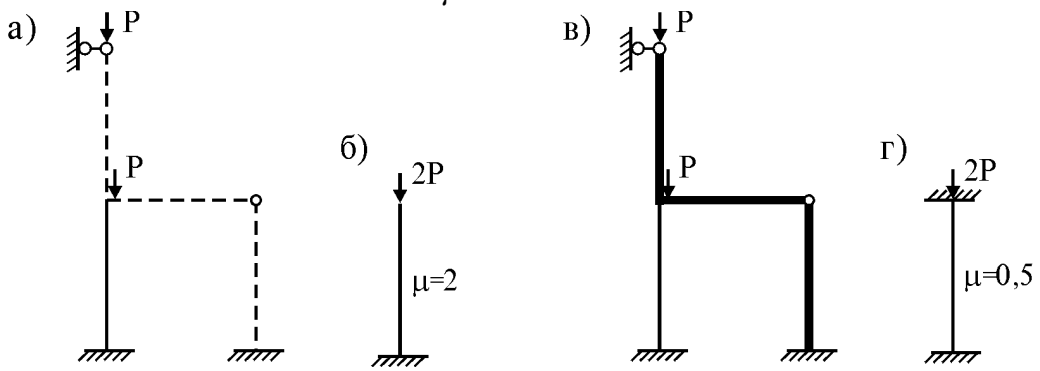


Рис. 4.17

3) в состоянии “большой жесткости”, когда изгибные жесткости всех стержней (кроме 1-го) равны бесконечности (рис. 4.17 в), стержень 1 можно рассматривать отдельно как показано на рис. 4.17 г. По табл. 4.1 принимаем [ ]. Тогда, $v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3{,}14}{0{,}5} = 6{,}28$;

4) в действительности жесткость 1-го стержня находится в интервале от нуля до бесконечности. Поэтому искомый корень уравнения устойчивости должен находиться между найденными крайними значениями, т.е.

$$1{,}57 < v_{кр} < 6{,}28\,.$$

Теперь уточним его. Это удобно проводить в следующей табличной форме (значения специальных функций берутся из табл. 4.3):

$v_1 = v$	$v_2 = 0{,}7v$	$\varphi_1(v_1)$	$\varphi_5(v_2)$	$r_{11} = 2\varphi_1(v_1) + 1{,}5\varphi_5(v_2) + 3$	$\varphi_3(v_1)$	$r_{12} = -1{,}5\varphi_3(v_1) + 0{,}75\phi_5(v_2)$	$\varphi_4(v_1)$	$\varphi_6(v_2)$	$r_{22} = 1{,}5\varphi_4(v_1) + 0{,}375\varphi_6(v_2) + 0{,}375$	$D = r_{11}r_{22} - r_{12}^2$
3,0	2,1	0,656	0,660	5,301	0,839	-0,764	0,089	-0,810	0,205	0,503
4,0	2,8	0,293	0,294	4,028	0,696	-0,823	-0,637	-2,319	-1,450	-6,520
3,2	2,2	0,599	0,620	5,130	0,815	-0,758	-0,038	-0,993	-0,055	-0,854
3,1	2,2	0,629	0,620	5,188	0,828	-0,776	0,027	-0,993	0,043	-0,380

При заполнении этой таблицы в найденном интервале определяются точки, между которыми функция $D = r_{11}r_{22} - r_{12}^2$ меняет свой знак. Так, при $v = 3{,}0$ имеем $D = 0{,}503 > 0$, при $v = 4{,}0$ $D = -6{,}520 < 0$. Значит, критический корень лежит между *3,0* и *4,0*. Далее сужаем интервал и видим, что корень лежит в интервале $3{,}0 < v_{кр} < 3{,}1$ (рис. 4.18 а). Затем проводим интерполяцию (рис. 4.18 б) и принимаем $v_{кр} = 3{,}06$.

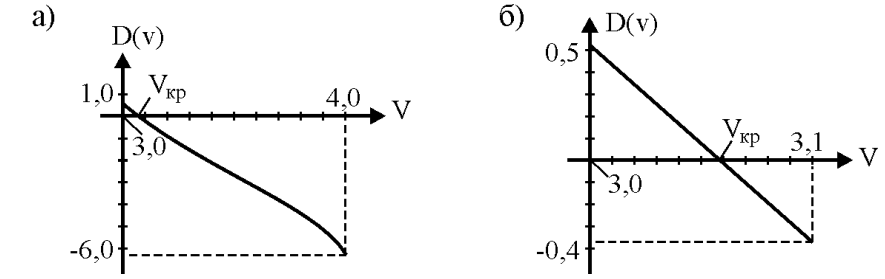


Рис. 4.18

10. Определяем критические силы и приведенные длины стержней:

$$P_{1,кр} = \frac{v_{1,кр}^2}{l_1^2} EI_1 = \frac{3{,}06^2}{2^2} EI = 2{,}34\,EI\,, \qquad \mu_1 = \frac{\pi}{v_1} = \frac{3{,}14}{3{,}1} = 1{,}03\,.$$

$$P_{2,кр} = \frac{v_{2,кр}^2}{l_2^2} EI_1 = \frac{(0{,}7 \cdot 3{,}06)^2}{2^2} EI = 1{,}147\,EI\,, \quad \mu_2 = \frac{\pi}{v_2} = \frac{3{,}14}{0{,}7 \cdot 3{,}06} = \frac{3{,}14}{2{,}17} = 1{,}47\,.$$

Контрольные вопросы

1. Какие проблемы решает устойчивость сооружений?

2. Какие виды потери устойчивости знаете?

3. В чем состоит основная задача расчета на устойчивость?

4. Какие методы используются в расчетах на устойчивость?

5. Какие критерии используются при определении критической силы?

6. Каковы алгоритмы статического, энергетического и динамического методов?

7. Как составляются уравнения метода начальных параметров?

8. Как определяется уравнение устойчивости?

9. Чему равны критические силы и приведенные длины сжатых стержней с различными закреплениями по концам?

10. Какие гипотезы используются при расчете рам на устойчивость?

11. В чем состоит порядок расчета рамы на устойчивость?

12. Как определяются границы критического корня?

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Раевский А.Н. Основы расчета сооружений на устойчивость. − М.: Высш. шк., 1962. −158 с.

2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.

3. Саргсян А.Е., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов. – М.: АСВ, 1998. – 320 с.

4. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов. М.: Стройиздат, 1984. 416 с.

Содержание

Устойчивость сооружений 88
Введение в устойчивость сооружений 88
Виды и типы потери устойчивости 89
Задачи и методы расчета на устойчивость 94
Статический метод 94
Энергетический метод 95
Динамический метод 96
Расчет прямых стержней на устойчивость 99
Расчет на устойчивость методом перемещений 105
Основные положения 105
Единичные состояния элементов основной системы. 107
Примеры решения задач 111
Литература 117