Продолжение лабораторной работы «Скачки при сухом трении». В этой лабораторной представлены концепции динамики структур, включая разработку дифференциального уравнения движения и его решение для случая затухания и не затухания. Сначала рассматривается поведение структуры с одной степенью свободы , а затем это будет расширено до структуры с несколькими степенями свободы .

Количество степеней свободы определяется как минимальное количество переменных, необходимых для полного описания движения конструкции. Например, для одноэтажного здания, показанного на рисунке 1, предполагается, что покрытие жесткое по сравнению с двумя колоннами. Таким образом, смещение конструкции будет полностью описываться смещением пола. Точно так же здание, показанное на рисунке 2, имеет две степени свободы, потому что нам нужно описать движение каждого этажа отдельно, чтобы описать движение всей конструкции.

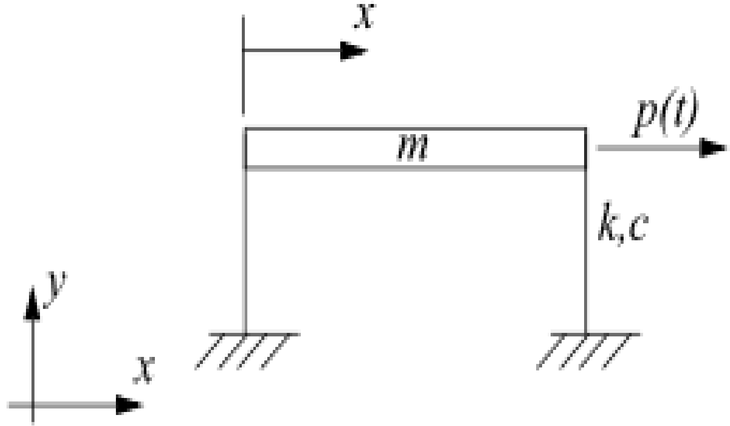
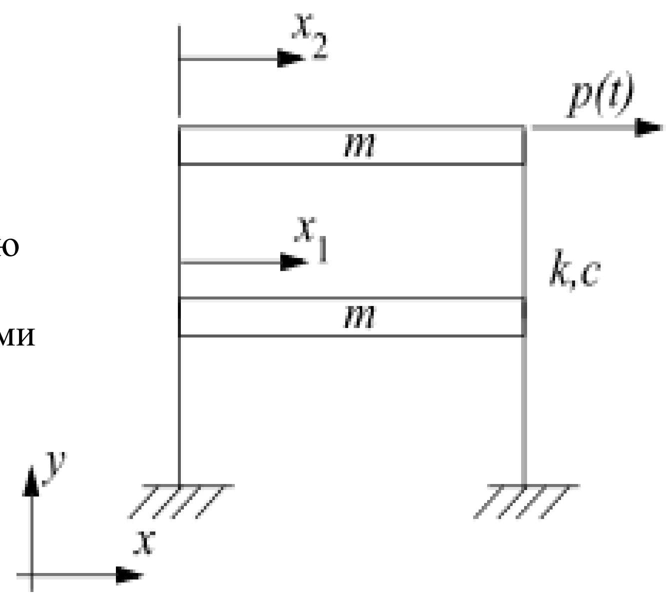
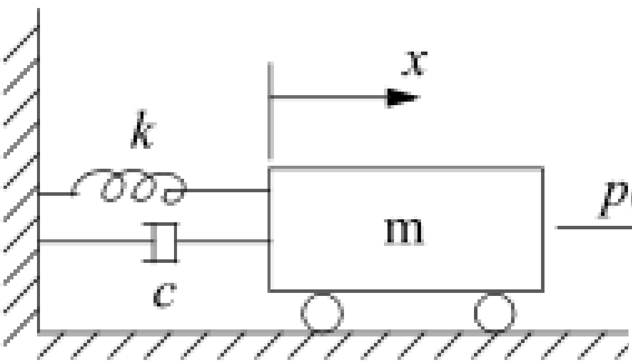
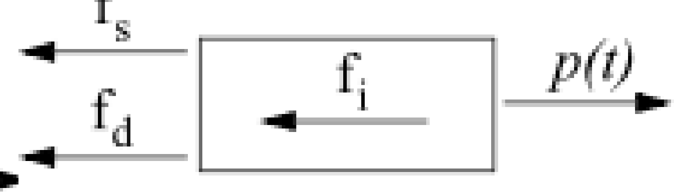


Рисунок 1. Структура с одной степенью свободы.
Рисунок 2. Структура с двумя степенями свободы.



а. масса с пружиной и демпфером





б. диаграмма свободного тела
Рис. 3. Динамически эквивалентная модель одноэтажного дома.

Одна степень свободы

Можно смоделировать здание, показанное на рисунке 1, как простую динамически эквивалентную модель, показанную на рисунке 3а. В этой модели поперечная жесткость колонн моделируется пружиной (k), демпфирование моделируется амортизатором (c), а масса пола моделируется массой (m). На рис. 3б показана схема конструкции свободного тела. Эти силы включают силу пружины $f_s(t)$ демпфирующую силу $f_d(t)$ внешнюю динамическую нагрузку на конструкцию, $p(t)$ и инерционную силу $f_i(t)$ Эти силы определяются как:

$$f_s = k \cdot x \qquad (1)$$

$$f_d = c \cdot \dot{x} \qquad (2)$$

$$f_i = m \cdot \ddot{x} \qquad (3)$$

где $\dot{x}$ - первая производная смещения по времени (скорости), а $\ddot{x}$ - вторая производная смещения по времени (ускорение).

Суммируя силы, показанные на рисунке 3b, получаем

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{x} = p(t) - c\dot{x} - kx \qquad (4)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \qquad (5)$$

где масса $\boldsymbol{m}$ и жесткость k для физической системы больше нуля.

Незатухающая система

Поведение незатухающей системы (c = 0). Из дифференциальных уравнений известно, что решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad (6)$$

а ускорение дается выражением

$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}. \quad (7)$$

Используя уравнения (6) и (7) в уравнении (5) и приравнивая $p(t)$ к нулю, получаем

$$m\alpha^2 e^{\alpha t} + k e^{\alpha t} = 0 \quad (8)$$

$$e^{\alpha t}[m\alpha^2 + k] = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) выполняется, когда

$$\alpha^2 = \frac{-k}{m} \qquad (10)$$

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Решение уравнения (5) для незатухающего случая имеет вид

$$x(t) = Ae^{\omega_n i t} + Be^{-\omega_n i t} \qquad (12)$$

где постоянные дуги A и B основаны на начальных условиях, а собственная частота ω_n определяется как

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (13)$$

Используя формулу Эйлера и переписывая уравнение (12), получаем

$$e^{i\alpha t} = \cos\alpha t + i\sin\alpha t \qquad (14)$$

$$x(t) = A(\cos(\omega_n t) + i\sin(\omega_n t)) + B(\cos(-\omega_n t) + i\sin(-\omega_n t)) \qquad (15)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + Ai\sin(\omega_n t) + B\cos(-\omega_n t) + Bi\sin(-\omega_n t). \qquad (16)$$

С помощью (используя) $(-\alpha) = \cos(\alpha)$ и $(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

имеется

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + Ai\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) - Bi\sin(\omega_n t) \qquad (17)$$

или,

$$x(t) = (A + B)\cos(\omega_n t) + (A - B)i\sin(\omega_n t). \qquad (18)$$

Обозначив $A + B = C \text{ and } A - B = D$ получаем

$$x(t) = C(\cos\omega_n t) + Di(\sin\omega_n t) \qquad (19)$$

где ***C*** и ***D*** - константы, которые зависят от начальных условий ***x (t).***
Из уравнения (19) ясно, что реакция системы гармоническая. Это решение называется откликом от свободной вибрации. потому что оно получается путем установки функции принуждения $p(t)$ на ноль. Значение ω_n описывает частоту, с которой конструкция колеблется, и ***называется собственной частотой***. Его единицы - радианы / сек. Из уравнения (13) собственная частота ω_n определяется жесткостью и массой конструкции.
Колебание конструкции также можно описать собственным периодом T_n. Период структуры - это время, необходимое для завершения одного цикла, определяемого формулой

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}. \qquad (20)$$