Типовой расчёт
“ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ”

Правило. Отыскивая частные производные функции нескольких переменных по одной из переменных, пользуемся правилами и формулами дифференцирования, считая в этот момент все остальные переменные постоянными.

Задание 1.

Пример 1. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = arctg\frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменную **y** считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменную **x** считаем постоянной.

б) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{xy} - \cos\frac{x}{y}$.

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy} - \cos\frac{x}{y}\right)'_x$. Считаем переменную “y” постоянной величиной.

$$\left(e^{xy}\right)'_x - \left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x = e^{xy}\left(xy\right)'_x + \sin\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x =$$

$$= e^{xy}\cdot y(x)'_x + \sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}(x)'_x = ye^{xy} + \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к. } (x)'_x = 1\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{xy}-\cos\frac{x}{y}\right)'_y$$. Считаем переменную “x” постоянной величиной.

$$\left(e^{xy}\right)'_y-\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y == e^{xy}\cdot x\left(y\right)'_y+\sin\frac{x}{y}\cdot x\left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$=x\cdot e^{xy}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\left(\text{т.к. } (y)'_y=1;\ \left(\frac{1}{y}\right)'_y=(y^{-1})'_y=-y^{-2}=-\frac{1}{y^2}\right).$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=y\,e^{xy}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\,e^{xy}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}.$

Задача 1*a*. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z=2^{xy}+\sin(2xy).$	**2.** $z=e^{xy}+\ln(x+\ln y).$
3. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$	**4.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{y}.$
5. $z=2^{xy^3}+\arcsin x.$	**6.** $z=\ln\left(x^2+y^2+xy\right).$
7. $z=\arcsin\frac{x^2}{y}.$	**8.** $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2}.$
9. $z=x^y+\operatorname{arctg}(x+y).$	**10.** $z=\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$
11. $z=\ln\sin\left(x^2+y\right).$	**12.** $z=3^{xy}+\sin\left(x^2+y^2\right).$
13. $z=e^{\frac{x}{y}}+\ln\left(x^2+xy\right).$	**14.** $z=\cos\ln xy.$
15. $z=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}.$	**16.** $z=\operatorname{tg}\ln\left(x^2+y^2\right).$
17. $z=2^{xy}+\sin(2xy).$	**18.** $z=e^{xy}+\ln(x+\ln y).$
19. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$	**20.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{y}.$
21. $z=2^{xy^3}+\arcsin x.$	**22.** $z=\ln\left(x^2+y^2+xy\right).$
23. $z=\arcsin\frac{x^2}{y}.$	**24.** $z=\arccos\sqrt{x^2+y^2}.$
25. $z=x^y+\operatorname{arctg}(x+y).$	**26.** $z=\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$
27. $z=\ln\sin\left(x^2+y\right).$	**28.** $z=3^{xy}+\sin\left(x^2+y^2\right).$

29. $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln\left(x^2 + xy\right).$	**30.** $z = \cos\ln xy.$

Задача № 1 б. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции:

1. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{xy}.$	**2.** $z = \sin(x+y) + \operatorname{tg}\left(x^2 y\right).$
3. $z = \ln\left(x^2 + 3y^2 + x\,y\right).$	**4.** $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\cdot\sin\dfrac{y}{x}.$
5. $z = \ln\dfrac{x\,y}{5x+y}.$	**6.** $z = \cos x^3 + \sin y^3 - x\,y.$
7. $z = x^y + y^x.$	**8.** $z = \sin\ln\dfrac{x}{y}.$
9. $z = \ln\cos(xy).$	**10.** $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
11. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}.$	**12.** $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}.$
13. $z = \sqrt{x^2+y^2}.$	**14.** $z = \dfrac{2x+y}{x-3y}.$
15. $z = e^{2x+y} + \sqrt{x^2+y^2}.$	**16.** $z = \arcsin x\,y.$
17. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{xy}.$	**18.** $z = \sin(x+y) + \operatorname{tg}\left(x^2 y\right).$
19. $z = \ln\left(x^2 + 3y^2 + x\,y\right).$	**20.** $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\cdot\sin\dfrac{y}{x}.$
21. $z = \ln\dfrac{x\,y}{5x+y}.$	**22.** $z = \cos x^3 + \sin y^3 - x\,y.$
23. $z = x^y + y^x.$	**24.** $z = \sin\ln\dfrac{x}{y}.$
25. $z = \ln\cos(xy).$	**26.** $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
27. $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}.$	**28.** $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}.$
29. $z = \sqrt{x^2+y^2}.$	**30.** $z = \dfrac{2x+y}{x-3y}.$

ЗАДАНИЕ 2.

Задача 2. Доказать следующие тождества:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$, если $z=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right)$.

Решение. Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ данной функции и подставим их в равенство, которое надо доказать:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{y}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{y}}{e^{x}+e^{y}}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{y}}+\frac{e^{y}}{e^{x}+e^{y}}=1,$$

что и требовалось доказать.

б) $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$, *если* $z=x^{y}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^{y}\right)_{x}'=y\cdot x^{y-1}$ (степенная функция);

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^{y}\right)_{y}'=x^{y}\ln x$ (показательная функция).

Подставим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в равенство:

$$\frac{x}{\cancel{y}}\cdot\cancel{y}\cdot x^{y-1}+\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot x^{y}\cdot\cancel{\ln x}=2\cdot x^{y},$$

$2x^{y}\equiv 2x^{y}$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Показать, что $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y\,\partial x}$ при $z=\ln\dfrac{x+y}{y}$.

Решение. Сначала найдем первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)_{x}'=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)_{x}'=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{1}{y}(x+y)_{x}'=\frac{1}{x+y},\ \left(\text{т.к. } (x+y)_{x}'=1+0=1\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln\frac{x+y}{y}\right)_{y}'=\frac{1}{\frac{x+y}{y}}\left(\frac{x+y}{y}\right)_{y}'=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{(x+y)_{y}'\cdot y-(y)_{y}'(x+y)}{y^{2}}=$$

$$=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{1\cdot y-1\cdot(x+y)}{y^{2}}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{y-x-y}{y}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x+y}=-\frac{x}{y(x+y)}.$$

Теперь находим смешанные вторые частные производные и сравниваем их.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y(x+y)}\right)=-\frac{1}{y}\left(\frac{x}{x+y}\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{y}\cdot\frac{(x)'_x(x+y)-(x+y)'_x\cdot x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{1\cdot(x+y)-1\cdot x}{(x+y)^2}=$$

$$=-\frac{1}{y}\cdot\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=-\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{(x+y)^2}=-\frac{1}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y}\right)=\left((x+y)^{-1}\right)'_y=$$

$$=-(x+y)^{-2}(x+y)'_y=-\frac{1}{(x+y)^2}(0+1)=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Видим, что смешанные производные равны, что и требовалось доказать.

Показать, что

1.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\ln\left(x^2+y\right)$.
2.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\sqrt{2xy+y^2}$
3.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=x^y$.
4.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
5.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
6.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$
7.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.
8.	$x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=x\,e^{-\frac{y}{x}}$.

9.	$2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$ для функции $z=2\cos^2\left(x-\frac{y}{2}\right)$.
10.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.
11.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\cdot\cos\,y$.
12.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ для функции $z=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$.
13.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.
14.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ для функции $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.
15.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=\frac{y}{y^2-a^2\,x^2}$.
16.	$2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$ для функции $z=\frac{x\,y}{x-y}$.
17.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\ln\left(x^2+y\right)$.
18.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\sqrt{2x\,y+y^2}$
19.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=x^y$.
20.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$.
21.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
22.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\left(x\cos\,y-y\sin\,y\right)$
23.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.
24.	$x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=x\,e^{-\frac{y}{x}}$.
25.	$2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$ для функции $z=2\cos^2\left(x-\frac{y}{2}\right)$.

26.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.
27.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\cdot\cos y$.
28.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ для функции $z=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$.
29.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
30.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ для функции $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

ЗАДАНИЕ 3. Экстремумы функции $z=f(x,\,y)$

(максимум и минимум $z=f(x,\,y)$**)**

а) Необходимые условия: если в точке $M_0\left(x_0,\,y\right)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ в этой точке. $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – критическая точка и

$$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$$ в этой точке, то $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка экстремума.

Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$, то $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, то $M_0\left(x_0,\,y_0\right)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z=f(x_0,\,y_0)$.

Задача 4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-xy+2x-3y+4$.

Решение. Найдем сначала стационарные точки, т. е. те точки, в которых частные производные одновременно равны нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x-y+2,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=2y-x-3,\end{aligned}\quad\Rightarrow\begin{cases}2x-y+2=0,\\ 2y-x-3=0.\end{cases}$$

Изменим порядок во втором уравнении и приведем систему линейных уравнений к стандартному виду, чтобы ее можно было решить методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = -4 + 3 = -1,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-2)(-1) = 6 - 2 = 4, \; x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}, \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{3}.$$

Нашли одну стационарную точку, в которой $z'_x = z'_y = 0$, это точка $M_0\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Выясним с помощью вторых производных, есть ли в M_0 экстремум, и, если есть, какой

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y + 2) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y - x - 3) = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y - x - 3) = -1.$$

Составляем определитель $Д = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0$.

Так как $Д > 0$, экстремум существует. Так как $A = 2 > 0$, в стационарной точке M_0 функция имеет минимум. Найдем его.

$$z_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 4 + 4 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $z_{\min}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

Исследовать на экстремум:

1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**2.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**4.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**6.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**8.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**10.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**12.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**14.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$	**16.** $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$
17. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**18.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
19. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**20.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
21. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**22.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
23. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**24.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
25. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**26.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
27. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**28.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
29. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**30.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

ЗАДАНИЕ 4. Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

Правило. Чтобы найти **M** – наибольшее и **m** – наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области **D**, находят критические точки этой функции. Если эти точки принадлежат области **D**, то в них следует вычислить значения $z = f(x, y)$. Затем, используя уравнения границы **L** области **D**, нужно найти критические точки $z = f(x, y)$, принадлежащие **L**, вычислить в них значения $z = f(x, y)$. Вычислить значения $z = f(x, y)$ на концах **L**. Осталось из всех найденных значений данной функции $z = f(x, y)$ выбрать самое большое **M** и самое малое **m**.

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 2y + y^2 - x^2 + xy$ в треугольнике со сторонами $x + y = 2, \quad x = 1, \quad y = 0$.

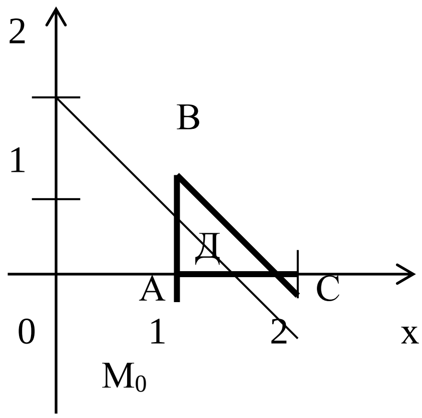
Решение. Так как свои наибольшее и наименьшее значения непрерывная функция может иметь или в стационарной точке внутри рассматриваемой области или на границе этой области, задачу будем решать в два действия. Найдем стационарные точки и значения функции в тех из них, которые лежат в рассматриваемой области.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2x + y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 + 2y + x = 0, \qquad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -2, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7,$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{y}{5} = 0{,}8, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{7}{5} = -1{,}4.$$



Точка $M_0(0{,}8;\ -1{,}4)$ не принадлежит треугольнику Д (рис. 7), поэтому значение функции в этой точке не вычисляем. Переходим ко второму действию. Треугольник Д ограничивают три прямые. Будем исследовать функцию на экстремум на каждой из них. Сначала найдем значения функции в вершинах треугольника.

$$z_A = z(1,\ 0) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 1^2 + 1 \cdot 0 = 3 - 1 = 2,$$

$$z_B = z(1,\ 1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 1 = 6,$$

$$z_C = z(2,\ 0) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0^2 - 2^2 + 2 \cdot 0 = 2.$$

Найдём экстремум на границе:

1) Рассмотрим границу AB: $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в выражение функции, получим $z = 3 \cdot 1 + 2y + y^2 - 1^2 + 1 \cdot y = y^2 + 3y + 2$.

Получили задачу на экстремум для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 3y + 2$ на отрезке $[0,\ 1]$. Находим $z' = 2y + 3 = 0$: $z' = 0$ при $y = -\dfrac{3}{2}$, а это значение y не входит в рассматриваемый отрезок $[0,\ 1]$. На концах отрезка значения функции уже подсчитаны, это z_A и z_B.

2) Переходим к границе AC: $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в выражение функции, получим $z = 3x + 2 \cdot 0 + 0^2 - x^2 + x \cdot 0 = 3x - x^2$.

Снова решаем задачу для функции одной переменной. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x - x^2$ на отрезке $[1,\ 2]$.

Находим $z'=3-2x=0$: $z'=0$ при $x=\frac{3}{2}=1{,}5$. Эта точка входит в отрезок $[1,\ 2]$. Поэтому вычислим значение функции в этой точке.

$$z\left(\frac{3}{2}\right)=3\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2{,}25\ .$$

На концах отрезка значения функции подсчитаны заранее, это z_A и z_C .

3) Рассматриваем третью границу BC: $x+y=2$. Выразим $y=2-x$ и подставим в выражение функции:

$z=3x+2(2-x)+(2-x)^2-x^2+x(2-x)=3x+4-2x+4-4x+x^2-x^2+2x-x^2=8-x-x^2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z=8-x-x^2$ на отрезке $[1,\ 2]$.

Находим $z'=-1-2x$: $z'=0$ при $x=-\frac{1}{2}$, а это значение x не входит в $[1,\ 2]$. Теперь выбираем из найденных значений функции z наибольшее. Это значение равно 6 в точке $B(1,\ 1)$. А наименьшее значение принимается в двух точках: $A(1,\ 0)$ и $C(2,\ 0)$.

Ответ: $z_{max}(1,\ 1)=6$, $z_{min}(1,\ 0)=z_{min}(2,\ 0)=2$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1.	$z=x^2+2xy-y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ y=0,\ x=3$.
2.	$z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в треугольнике со сторонами $x+y+1=0,\ \ y=0,\ \ x=-3$.
3.	$z=x^2+xy-2$ в замкнутой области, ограниченной $y=4x^2-4$ и осью OX.
4.	$z=y^2-2xy-x^2+4x-3$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ x=0,\ y=2$.
5.	$z=x^2+2x\,y-y^2-2x+2y$ в треугольнике со сторонами $y=x+2,\ \ y=0,\ \ x=2$.
6.	$z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области, ограниченной $y=x^2-4$ и осью OX.
7.	$z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$ в квадрате $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$.
8.	$z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4,\ \ 0\le y\le 4$.
9.	$z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями

	$y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3$.
10.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1$.
11.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x-y=1$.
12.	$z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0,\ x=1,\ y=2$.
13.	$z=x^2+2xy+4x-y^2$ в треугольнике со сторонами $x+y+2=0,\ x=0,\ y=0$.
14.	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике со сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=3$.
15.	$z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=2x,\ y=2,\ x=0$.
16.	$z=5x^2-3xy+y^2+4$ в квадрате, ограниченном прямыми $x=-1$, $x=1,\ y=-1,\ y=1$.
17.	$z=x^2+2xy-y^2-4x$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ y=0,\ x=3$.
18.	$z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в треугольнике со сторонами $x+y+1=0,\ y=0,\ x=-3$.
19.	$z=x^2+xy-2$ в замкнутой области, ограниченной $y=4x^2-4$ и осью OX.
20.	$z=y^2-2xy-x^2+4x-3$ в треугольнике со сторонами $y=x+1,\ x=0,\ y=2$.
21.	$z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$ в треугольнике со сторонами $y=x+2,\ y=0,\ x=2$.
22.	$z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области, ограниченной $y=x^2-4$ и осью OX.
23.	$z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$ в квадрате $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$.
24.	$z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4,\ 0\le y\le 4$.
25.	$z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=3$.

26.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=1.$
27.	$z=1+x+2y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0,\ x-y=1.$
28.	$z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0,$ $y=0,\ x=1,\ y=2.$
29.	$z=x^2+2xy+4x-y^2$ в треугольнике со сторонами $x+y+2=0,\ x=0,\ y=0.$
30.	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике со сторонами $x=0,\ y=0,\ x+y=3.$

ЗАДАНИЕ 5.

Задача 6. Найти производную функции $z=3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1$ в точке $A(0,\ 1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4,\ 4)$.

Решение. Напишем формулу производной функции по направлению вектора $\vec{n}$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\ \alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\ B,$$

где $\left(\cos\alpha,\cos\beta\right)=\dfrac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$ − орт направления вектора $\vec{n}$.

Сначала найдем вектор $\vec{n}$, в направлении которого будем искать производную. $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(4-0;\ 4-1)=(4;\ 3)$. Найдем длину $\vec{n}$. $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Направляющие косинусы вектора $\vec{n}$ совпадают с координатами орта $\vec{n}$, поэтому $\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\quad \cos\beta=\dfrac{3}{5}$.

Теперь найдем частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1\right)'_x=6x+2y^2-5,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=6\cdot0+2\cdot1^2-5=2-5=-3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1\right)'_y=-12y^2+4xy+7,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=-12\cdot1^2+4\cdot0\cdot1+7=-12+7=-5.$$

Все найденные значения подставляем в формулу производной по направлению:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A = (-3)\cdot\frac{4}{5} + (-5)\cdot\frac{3}{5} = \frac{-12-15}{5} = -\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A = -\frac{27}{5}.$

Найти производную функции:

1.	$z = x^3 - 3x^2 y + 3x y^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
2.	$z = \operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
3.	$z = x^2 y^2 - x y^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
4.	$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60^o с осью OX.
5.	$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30^o с осью OX.
6.	$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
7.	$z = x^2 - x y - 2y^2$ в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью OX угол в 60^o.
8.	$z = 3x^4 + x y + y^2$ в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью OX угол в 45^o.
9.	$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
10.	$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
11.	$z = x^2 - 3x y + 5$ в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
12.	$z = x y^2 + x^3 - x y$ в точке (1; 1) в направлении, образующем углы $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$.
13.	$z = 2x y^2 + y^3 + 3x y$ в точке (4; 1) в направлении от этой точки к точке (5; 1).
14.	$z = x y$ в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).

15.	$z = x^2 y + x^3$ в точке (1; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{1; -1\}$.
16.	$z = x^3 + 3x^2 y + 6xy + y^2$ в точке (1; 1) в направлении от этой точки к точке (2; 2).
17.	$z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
18.	$z = \operatorname{arctg} xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
19.	$z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
20.	$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60^o с осью OX.
21.	$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в начале координат в направлении луча, образующего угол в 30^o с осью OX.
22.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке (1; 3) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
23.	$z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке (1; 2) в направлении, составляющем с осью OX угол в 60^o.
24.	$z = 3x^4 + xy + y^2$ в точке (1; 2) в направлении вектора, образующего с осью OX угол в 45^o.
25.	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точке (3; 1) по направлению вектора $\vec{e} = \{3; 4\}$.
26.	$z = \ln\left(e^x + e^y\right)$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
27.	$z = x^2 - 3xy + 5$ в точке (1; 2) в направлении от этой точки к точке (1; 1).
28.	$z = xy^2 + x^3 - xy$ в точке (1; 1) в направлении, образующем углы $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$.
29.	$z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке (4; 1) в направлении от этой точки к точке (5; 1).
30.	$z = xy$ в точке (5; 1) в направлении от этой точки к точке (9; 4).