2 Определенный интеграл и его геометрический смысл

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, а числа a и b принадлежат этому промежутку.

Определение. Приращение $F(b)-F(a)$ любой из первообразных функций $F(x)+C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется ***определенным интегралом*** от a до b функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются пределами интегрирования: $a-$нижним, $b-$верхним. Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, а переменная $x-$***переменной интегрирования***. Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{2.4}$$

Равенство (2.1) называется формулой Ньютона-Лейбница.

Существует и другой подход к введению понятия определенного интеграла, основанный на рассмотрении пределов интегральных сумм, который в большей степени приспособлен для приложений. Рассмотрим его на примере вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x=a$; $x=b$ (рис. 1). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Найдем ее площадь.

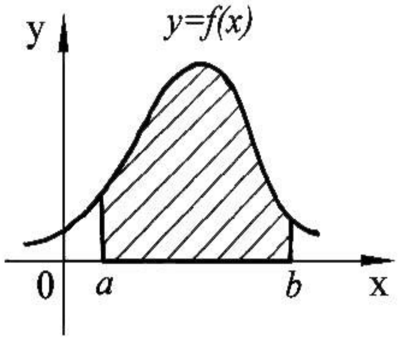

Рис. 1

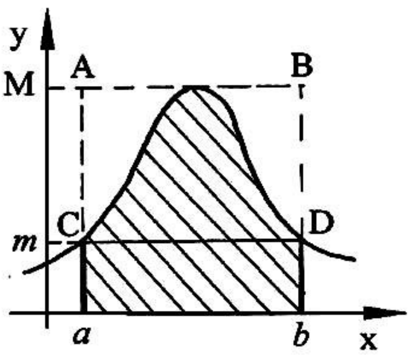

Рис. 2

Заметим, что на отрезке $[a;b]$ можно указать такую точку C, что площадь S криволинейной трапеции равна

$$S = f(C)(b-a). \tag{2.5}$$

Действительно, пусть M – наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, а m – наименьшее. Проведем прямые $y=M$ и $y=m$. Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDd$ (рис. 2).

Поэтому $S_{aCDd} < S < S_{aABb}$ или $m(b-a) < S < M(b-a)$, т.к. $S_{aCDd} = m(b-a)$; $S_{aABb} = M(b-a)$. Возьмем число $p = \dfrac{S}{(b-a)}$ и $m < p < M$.

На отрезке $[a;b]$ возьмем такую точку C, что $f(C) = p$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то каждому значению функции p соответствует хотя бы одно значение ее аргумента C, лежащего внутри отрезка $[a;b]$. Тогда $S = p(b-a)$. Данное свойство называется ***теоремой о среднем.***

Найдем теперь площадь криволинейной трапеции S через определенный интеграл. Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 3. При этом на отрезке $[a;b]$ появились точки x_1, x_2,..., x_{n-1}.

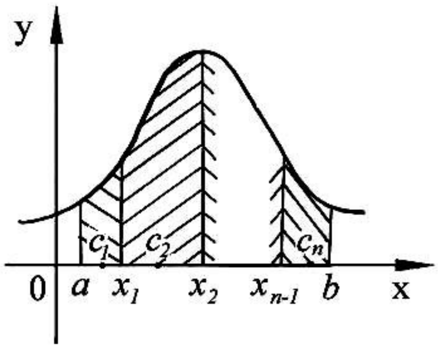

Рис 3

В соответствии с формулой (2.5) найдем для первой полосы точку c_1, $a \le c_1 \le x_1$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$. Для второй полосы найдем точку c_2, $x_1 \le c_2 \le x_2$ такую, что площадь полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$. Поступаем так для всех n полос, т.к. площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которую она разбита:

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы не разбивали криволинейную трапецию на полосы. Длину наибольшего из отрезков обозначим через λ. Перейдем в нем к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1})\right].$$

Обозначим

$$\lim_{\lambda \to 0}\left[f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(b - x_{n-1})\right],$$

через выражение $\int\limits_a^b f(x)dx$ получим

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2.6)$$

Таким образом, ввели определенный интеграл через предел особого рода сумм (***интегральных сумм***).

Определение. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, где $a<b$. Выполним следующие операции:

1.Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками x_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$, так что $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

2.Величину $\lambda=\max\limits_{i=0,\ldots,n}(x_{i-1}-x_i)$ назовем шагом разбиения.

3.На каждом из отрезков $[x_{i-1};x_i]$ зафиксируем произвольную точку C_i, $C_i\in[x_{i-1};x_i]$.

4.Составим сумму всех произведений $f(c_i)(x_i-x_{i-1})$, $i=1,\ldots,n$; $\sigma_n=f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(c_n)(b-x_{n-1})$ или в сокращенном виде

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_1)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ , \qquad (2.7)$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Суммы вида (1.7) называются ***интегральными суммами функции*** $f(x)$.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a;b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a;b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $c_i\in[x_{i-1};x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки c_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка $[a;b]$ таких, что $\lambda=\max\Delta\ x_i\to 0$ $(n\to\infty)$, при любом выборе точек $c_i\in[x_{i-1};x_i]$ интегральная сумма $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ стремится к одному и тому же конечному числу A:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum f(c_i)\Delta x_i=A$, то число A называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Итак, по определению,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\,\Delta x_i\,. \qquad (2.8)$$

Заметим без доказательств, что предел в правой части равенства (2.8) существует и конечен, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$; $x=b$ (см. рис. 1), т.е.

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.9)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона - Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной